

Théorème : Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p$  premier impair.

$$\forall u \in GL_n(\mathbb{F}_p). \quad \varepsilon(u) = \left( \frac{\det u}{p} \right) \quad \text{ou} \quad \left( \frac{a}{p} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \equiv 0 [p] \\ 1 & \text{si } a \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_p \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme : Soient  $K$  un corps,  $M$  un groupe abélien,  $n \neq 2, K \neq \mathbb{F}_2$ .

Tout morphisme de groupes  $\varphi : GL_n(K) \rightarrow M$  se factorise par le déterminant.

$$\exists ! \delta : K^\times \rightarrow M, \varphi = \delta \circ \det.$$

$$D(GL_n(K)) = SL_n(K).$$

$\forall x, y \in GL_n(K), \varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = 0$  car  $M$  abélien, donc  $D(GL_n(K)) \subset \ker \varphi$

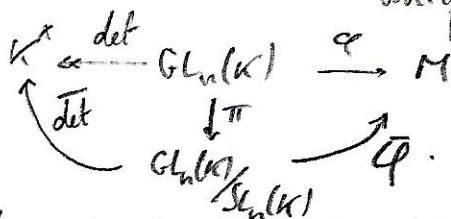
Donc  $\exists ! \bar{\varphi} : GL_n(K) / SL_n(K) \rightarrow M$  morphisme bijectif.

D'autre part,  $\det : GL_n(K) \rightarrow K^\times$  est surjectif de noyau  $SL_n(K)$

donc  $\exists ! \det : GL_n(K) / SL_n(K) \rightarrow K^\times$  isomorphisme.

$$\text{De là, } \varphi = \delta \circ \det \text{ avec } \delta = \bar{\varphi} \circ (\det)^{-1}$$

unique car  $\det$  surjectif.



Ici,  $\exists ! \delta : \mathbb{F}_p^\times \rightarrow \{\pm 1\}, \varepsilon = \delta \circ \det.$

Lemme : le symbole de Legendre est l'unique morphisme de groupes non trivial de  $\mathbb{F}_p^\times$  dans  $\{\pm 1\}$ .

$\forall a \in \mathbb{F}_p^\times, a^{p-1} \equiv 1 [p]$  par Fermat donc  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 [p]$

Or  $\varphi : \mathbb{F}_p^\times \rightarrow \mathbb{F}_p^\times, x \mapsto x^2$  a  $\{\pm 1\}$  pour noyau, donc il y a  $\frac{p-1}{2}$  carrés dans  $\mathbb{F}_p^\times$ .

Donc : si  $a \in \mathbb{F}_p^{\neq 2}$ , alors  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$  et sinon,  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]$   
i.e.  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left( \frac{a}{p} \right) [p]$ .

Le symbole de Legendre est donc un morphisme non trivial de  $\mathbb{F}_p^\times \rightarrow \{\pm 1\}$ .

Si  $\alpha : \mathbb{F}_p^\times \rightarrow \{\pm 1\}$  non trivial, alors  $H = \ker \alpha$  est l'unique (car  $2 \mid p-1$  et  $\mathbb{F}_p^\times$  cyclique) ss-gpe d'indice 2 de  $\mathbb{F}_p^\times : \mathbb{F}_p^\times = H \sqcup xH$  où  $x \notin H$

et  $\alpha(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in H \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} : \alpha$  entièrement déterminé.

La signature  $\varepsilon : GL_n(\mathbb{F}_p) \rightarrow \{\pm 1\}$  est un morphisme de groupes donc par lemme,  $\exists \delta, \varepsilon = \delta \circ \det$ , avec  $\delta$  morphisme de groupes  $\mathbb{F}_p^\times \rightarrow \{\pm 1\}$ .

Soit  $q = p^n$ . Vu comme  $\mathbb{F}_p$ -ev,  $\mathbb{F}_q$  et  $\mathbb{F}_p^n$  sont isomorphes fixe 0 et  $\mathbb{F}_p$ -linéaire

De plus,  $\mathbb{F}_q^\times$  cyclique donc si  $\langle g \rangle = \mathbb{F}_q^\times$ , la permutation  $x \mapsto gx^{\sqrt[n]{}}$  peut être vue comme le cycle  $(g, g^2, \dots, g^{q-1})$  de signature  $(-1)^q = -1$  car  $q$  impair.