154. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications

Cadre : E espace vectoriel de dimension finie, sur K, $u \in \mathcal{L}(E)$.

I. Notion de stabilité

1. Espaces stables

Déf 1 : Un sous-espace vectoriel F de E est u-stable si $u(F) \subset F$.

Ex 2 : Les espaces $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont u-stables. $\{0\}$ et E aussi.

Prop 3 : Si u et v commutent, alors $\ker v$ et $\operatorname{Im} v$ sont u-stables.

Cor 4 : Les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de u sont u-stables.

Ex 5 : Si $K = \mathbb{R}$, u admet une droite ou un plan stable.
Si $K = \mathbb{C}$, u admet une droite stable.

Prop 6 : Si u admet un sous-espace propre de dimension supérieure ou égale à 2, alors u admet une infinité de sous-espaces stables.

Ex 7 : $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ a une infinité de sous-espaces stables.

2. Endomorphismes induits et base adaptée

Déf 8 : Soit F sous-espace vectoriel de E u-stable.
La restriction de u à F définit l'endomorphisme induit $u_F : F \to F$. En particulier, F est u_F-stable.

Rmq 9 : On définit aussi $\bar{u} \in \mathcal{L}(E/F)$ obtenu par passage au quotient :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, "u_F"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "u"] & E/F \arrow[d, "\bar{u}"] \\ F \arrow[r, hook] & E \arrow[r] & E/F \end{tikzcd}$$

Lem 10 : Soient F u-stable, B base de E dont les premiers vecteurs forment une base B_F de F. La matrice de u dans B est de la forme $\operatorname{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.
De plus, $A = \operatorname{Mat}_{B_F}(u_F)$, $D = \operatorname{Mat}_{B'}(\bar{u})$ où $B' = \pi(B \setminus B_F)$.

Rmq 11 : La stabilité se lit sur la matrice de u dans une bonne base. Réciproquement, une matrice triangulaire supérieure par blocs fournit des sous-espaces stables.

Ex 12 : Si $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, alors $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sont stables par T. Ainsi, $E = F \oplus G$, F et G T-stables.

Cor 13 : On a : $\chi_u = \chi_{u_F} \chi_{\bar{u}}$.
De plus, u nilpotent $\Leftrightarrow$ u_F et $\bar{u}$ nilpotent.

Rmq 14 : L'implication $u = 0 \Rightarrow u_F = 0, \bar{u} = 0$ est claire. La réciproque est en revanche fausse.

Ex 15 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un contre-exemple : $u \neq 0$.

Cor 16 : Le polynôme χ_u est irréductible si et seulement si u n'a pas de sous-espace stable.

3. Dualité

Déf 17 : Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $v \in \mathcal{L}(E,F)$. On définit l'application transposée de v par ${}^t v : F^* \to E^*$, $f \mapsto f \circ v$.

Prop 18 : On a $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} {}^t u$, $\operatorname{Im} {}^t u = (\ker u)^\perp$, $\ker({}^t u) = \operatorname{Im}(u)^\perp$.

Rem 19 : La matrice dans les bases duales de B et B' de ${}^t u$ est la transposée de la matrice de u dans les bases B et B'.

Prop 20 : Un sous-espace vectoriel F est u-stable si et seulement si $F^\perp$ est ${}^t u$-stable.

Rem 21 : Ce résultat est très utile dans des raisonnements par récurrence (en dimension finie). Si $\mathbb{K}x$ est ${}^t u$-stable, alors $(\mathbb{K}x)^\circ$ est u-stable et l'hypothèse de récurrence s'applique.

II. Sous-espaces stables et réduction.

1. Lemme des noyaux

Thm 22 : Soient $P_1, \dots, P_r \in K[X]$ premiers entre eux deux à deux.
Notons $P = P_1 \cdots P_r$. Alors : $\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(u)$.

Cor 23 : Dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice de u est diagonale par blocs.

Cor 24 : Si P annule u (i.e. $\Pi_u | P$), alors $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(u)$.

Rmq 25 : De plus, la projection sur $N_i = \ker P_i(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$ est un polynôme en u.

Thm 26 : Décomposition de Dunford.
Supposons χ_u scindé sur K (quitte à considérer une extension).
Il existe un unique couple (d,n) tel que : d diagonalisable, n nilpotent, $u = d+n$ et $dn = nd$.

Rmq 27 : De plus, d et n sont polynômes en u.

Rmq 28 : Si $F = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{r_i} = \chi_u$, en choisissant U_i de sorte que $\frac{1}{F} = \sum_{i=1}^{s} \frac{U_i}{(X-\lambda_i)^{r_i}}$, on a $p_i = U_i Q_i(u)$ où $Q_j = \prod_{i\neq j} (X-\lambda_i)^{r_i}$

Appli 29 : Si $u = d+n$ comme ci-dessus, alors $\exp(u) = \exp(d)\exp(n)$

Cor 30 : u diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exp(u)$ diagonalisable.

Ex 31 : $\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

2. Invariants de similitude. Décomposition de Frobenius

Def 32 : Pour $x \in E$, le polynôme minimal de u en x est le polynôme unitaire engendrant $\{P \in K[X],\ P(u)(x) = 0\}$. Il est noté Π_u^x.

Ex 33 : Pour $x = 0$, $\Pi_u^0 = 1$, car $\forall P \in K[X]$, $P(u)(0) = 0$.

Prop 34 : L'ensemble $\{P(u)(x),\ P \in K[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $d = \deg \Pi_u^x$. La famille $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ en est une base.

Def 35 : On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$, $\{P(u)(x), P \in K[X]\} = E$.
La matrice compagnon associée à $P = \sum_{i=1}^{p} a_i X^i \in K[X]$ est

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots\ 0 & \\ & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in M_p(K).$$

Prop 36 : Soit u cyclique. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $C(\Pi_u)$.

Lem 37 : Il existe $x \in E$, $\Pi_u^x = \Pi_u$. **DEV 1**

Thm 38 : Il existe $F_1, \dots, F_r$ sous-espaces vectoriels de E u-stables tels que :
- $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$.
- $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, u_{F_i} est cyclique
- En notant $P_i = \Pi_{u_{F_i}}$, $P_{i+1} | P_i$

De plus, (P_i) ne dépend que de u.

Rem 39 : Les (P_i) sont appelés invariants de similitude de u.

Cor 40 : Avec les notations ci-dessus, il existe B base de E telle que $\mathrm{Mat}_B(u) = \mathrm{diag}(C(P_i))_{1\le i\le r}$.
De plus, $P_1 = \Pi_u$, $\prod_{i=1}^{r} P_i = \chi_u$

Cor 41 : Deux endomorphismes sont semblables si et seulement si ils ont mêmes invariants de similitude.

Rmq 42 : La réduction de Jordan est une conséquence de celle de Frobenius.

Cor 43 : Pour $n = 2$ ou 3, deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont mêmes polynômes minimal et caractéristique.

Ex 44 : Faux si $n \geq 4$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ont mêmes polynômes minimal et caractéristique mais ne sont pas semblables.

Ex 45 : Soit $M = \begin{pmatrix} M_1 & \\ & M_2 \end{pmatrix}$ où $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Les invariants de similitude sont $X^4 - 1$ et $X^2 - 1$. $[X^2 - 1 | X^4 - 1]$

Cor 46 : Si $A, B \in M_n(K)$ sont semblables sur $M_n(L)$, L extension de K, alors elles sont semblables sur $M_n(K)$.

3. Réduction simultanée.

Cette partie s'appuie sur la proposition 3.

Prop 47 : Si u et v diagonalisables (resp. trigonalisables) commutent, alors u et v sont co-diagonalisables (resp. co-trigonalisables).

Rmq 48 : L'hypothèse de diagonalisabilité est indispensable. $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ commutent, sans être co-diagonalisables.

Rmq 49 : Réduire simultanément permet de sommer et composer très facilement.

Thm 50 : Soit $(u_i) \subset \mathcal{L}(E)$ famille d'endomorphismes commutant deux à deux. Si les u_i sont diagonalisables (resp. trigonalisables), il existe une base de diagonalisation (resp. trigonalisation) commune.

Ex 51 : Si E est muni d'un produit scalaire ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), la base peut être choisie orthonormée pour la trigonalisation.

III. Endomorphismes remarquables

1. Endomorphismes normaux.

Def 52 : On suppose ici E hermitien, l'adjoint est bien défini. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $uu^* = u^*u$.

Rmq 53 : Matriciellement, cela se traduit par $MM^* = M^*M$.

Lem 54 : Si F est u-stable, alors $F^\perp$ est u^*-stable.

Lem 55 : Si u est normal, $E_\lambda(u)$ et $E_\lambda(u)^\perp$ sont u-stables et u^*-stables.

Thm 56 : Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) u est normal.

(ii) u se diagonalise dans une base orthonormale de E.

(iii) u et u^* sont codiagonalisables en base orthonormale.

Cor 57 : Matriciellement, M est normale si et seulement si il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$, $P^*MP = P^{-1}MP$ est diagonale.

Lem 58 : Si E est euclidien de dimension 2, u normal, $Sp(u) = \emptyset$, alors dans toute base orthonormale de E, $Mat(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$.

Thm 59 : Soient E euclidien, u normal. Il existe $\mathcal{B}$ base orthonormale de E telle que
$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & R_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_s \end{pmatrix} \text{ où } R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$$
avec $\lambda_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}$. **DEV 2**

Cor 60 : Si $M^* + M = 0$, alors $\exists U \in U_n(\mathbb{C})$, $U^{-1}MU$ diagonale à coefficients imaginaires purs.

Cor 61 : Dans le cas réel, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & R_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_s \end{pmatrix}$

2. Endomorphismes semi-simples

Def 62 : L'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit semi-simple si tout espace u-stable admet un supplémentaire u-stable.

Thm 63 : Si u est diagonalisable, alors u est semi-simple.

Rmq 64 : Le lemme des noyaux permet d'écrire $F = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} F \cap E_\lambda$

Prop 65 : Si K est algébriquement clos, c'est une équivalence. u semi-simple $\Leftrightarrow$ u diagonalisable

Thm 66 : Notons $\Pi_u = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_r^{\alpha_r}$ décomposition en facteurs irréductibles. u semi-simple $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, r\}, \alpha_i = 1$

IV. Représentations linéaires de groupes.

Def 67 : Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit G fini. Une représentation est un morphisme $\rho : G \to GL(V)$. Un sous-espace vectoriel W de V est une sous-représentation si $\forall g \in G, \forall w \in W, \rho(g)(w) \in W$, i.e. W est $\rho(g)$ stable.

Thm 68 : Toute représentation est complètement irréductible (i.e. pour toute sous-représentation W de V, il existe L sous-représentation, $V = W \oplus L$).

Cor 69 : Si G est abélien, alors toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1 et pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable.