2. Tribus et Mesures

Exercice 1. Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble à 3 éléments. Donner $\mathcal{P}(E)$ et l'ensemble des tribus de E.

Exercice 2. Pour E un ensemble, donner des conditions pour que les classes suivantes soient des tribus :

$$\{\emptyset, E\}, \quad \mathcal{P}(E), \quad \{\emptyset, \{x\}, E\}, \quad \{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, E\} \text{ pour } x \in E,$$
$$\text{les parties finies de } E, \text{ les parties finies ou cofinies de } E,$$
$$\text{les parties dénombrables de } E, \text{ les parties dénombrables ou codénombrables de } E.$$

Exercice 3 (Tribu image réciproque et tribu image)**.** Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ tribus sur E et F respectivement.

(i) Montrer que $f^{-1}(\mathcal{B}) = \left\{f^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}\right\}$ est une tribu sur E.

(ii) Justifier que $f(\mathcal{A})$ n'est en général pas une tribu sur F.

(iii) Montrer que $\left\{B,\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$ est une tribu sur F.

Exercice 4. Justifier que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma\{\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n\}\}$ n'est pas une tribu sur $\mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit E un ensemble.

(i) Déterminer la tribu engendrée par les singletons $\mathcal{S} = \sigma(\{\{x\},\ x \in E\})$.

(ii) Déterminer la tribu engendrée par les parties finies de E.

(iii) Supposons que E ait au moins deux éléments. Déterminer la tribu engendrée par les paires de E, i.e. $\mathcal{D} = \sigma\left(\{\{x, y\},\ (x, y) \in E^2,\ x \neq y\}\right)$.

(iv) Déterminer (et donner le cardinal) de la tribu engendrée par une partition finie de E.

Exercice 6. Soit a un réel. Montrer que δ_a définit bien une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (masse de Dirac en a).

Exercice 7. On se place sur la tribu $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable}\}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mu : A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ 1 & \text{sinon}; \end{cases}$ définit une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

Exercice 8. Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$ espace mesurable. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{A}$. Montrer que :

(i) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, alors $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

(ii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, alors $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$, si de plus :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \mu(A_{n_0}) < +\infty.$$

Exercice 9. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une application vérifiant :

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) si $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(iii) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, croissante pour l'inclusion, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

Exercice 10. Soit E un ensemble. Soit (A_n) une suite de sous-ensembles de E.

(i) Interpréter les ensembles suivants :

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 0}\bigcap_{k\geq n} A_k \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n} A_k.$$

(ii) Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Montrer que :

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \quad \text{et} \quad \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) < +\infty \implies \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(iii) Montrer le premier lemme de Borel-Cantelli :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty \implies \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

(iv) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Que dire de l'ensemble des points $x\in\mathbb{R}$ tels que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{-n}}{|x_n - x|} < +\infty$.

Exercice 11. Montrer qu'un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle est vide.
Soit $\varepsilon > 0$. Construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue inférieure ou égale à ε.

Exercice 12. Montrer qu'un borélien $A \subset [0,1]$ tel que $\lambda([0,1]\backslash A) = 0$ est dense dans $[0,1]$.

Exercice 13. Soient $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, $(F,\mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : (E,\mathcal{A},\mu) \to (F,\mathcal{B},\mu)$ une fonction mesurable. Montrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} \mu_f & : & \mathcal{B} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & & B & \longmapsto & \mu(f^{-1}(B)) \end{array}$$

définit une mesure sur $(F,\mathcal{B})$, appelée mesure image de μ par f.

Exercice 14. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant $\mu([0,1]) = 1$ et invariante par translation :

$$\forall a\in\mathbb{R},\ \forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mu(a+B) = \mu(B).$$

Pour $a < b$, déterminer $\mu(\{a\})$ et $\mu([a,b])$. En déduire $\mu([a,+\infty[)$.

Exercice 15 (Existence d'ensembles non mesurables)**.** Considérons $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ donnée par $x\sim y \iff x-y\in\mathbb{Q}$. L'axiome du choix (non dénombrable) assure l'existence d'une application f qui à une classe d'équivalence associe l'un des éléments de la classe. Soit A l'ensemble contenant un élément de chaque classe ci-dessous :

$$A = \left\{ f(\gamma) - \lfloor f(\gamma) \rfloor,\ \gamma \in \mathrm{R}/\!\sim \right\} \subset [0,1].$$

Montrer que A n'est pas mesurable pour la mesure de Lebesgue (invariante par translation) en observant :

$$[0,1] \subset \bigsqcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (A+r) \subset [-1,2].$$

Exercice 16. Soit $C_0 = [0,1]$. On définit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : à partir de C_n, union finie d'intervalles fermés disjoints, on obtient C_{n+1} en retirant à chaque intervalle de C_n son tiers médian. On pose ensuite $C = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

(i) Déterminer la mesure de C.

(ii) Montrer que

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{3^n},\ (\alpha_n) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*} \right\}.$$

(iii) Montrer que C est un compact, d'intérieur vide, dont tous les points sont d'accumulation.