

4. Intégrale de Lebesgue

Dans toute la suite, (E, \mathcal{A}, μ) désigne un espace mesuré.

Exercice 1. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Montrer l'inégalité de Markov :

$$\forall K > 0, \mu(\{f \geq K\}) \leq \frac{1}{K} \int_E f \, d\mu.$$

Exercice 2. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur E . Montrer que $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \int_A f \, d\mu = 0.$$

Exercice 3. Soit m la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que pour tout $u : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$\int_{\mathbb{N}} u \, dm = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n).$$

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions intégrables sur (E, \mathcal{A}, μ) vérifiant :

$$\int_E f \, d\mu > \int_E g \, d\mu.$$

Montrer que $\{f > g\}$ est non vide. Donner un exemple dans lequel cet ensemble est réduit à un singleton.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} a > 0$. Montrer que f n'est pas intégrable sur \mathbb{R} .

Exercice 6. Soient (E, \mathcal{A}) et (F, \mathcal{B}) deux espaces mesurables, $f : E \rightarrow F$ mesurable. Soit μ une mesure sur (E, \mathcal{A}) . On note $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ la mesure image de μ par f sur (F, \mathcal{B}) . Montrer qu'une fonction mesurable $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ est μ_f -intégrable si et seulement si $g \circ f$ est μ -intégrable et que dans ce cas :

$$\int_E g \circ f \, d\mu = \int_F g \, d\mu_f.$$

Exercice 7. Donner un exemple (espace mesuré et suite de fonctions mesurables) pour lequel l'inégalité de Fatou est stricte.

Exercice 8. Soit $(f_n : E \rightarrow \mathbb{R})$ une suite de fonctions mesurables convergeant μ presque partout vers une fonction f mesurable. Montrer que f est intégrable sur E si :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_E |f_n| \, d\mu < +\infty.$$

Exercice 9. Soit $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur E . Montrer la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) \leq \delta \implies \int_A |f| \, d\mu \leq \varepsilon.$$

En déduire que, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, la primitive suivante de f est uniformément continue :

$$F : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_{[0,x]} f \, d\lambda.$$

Exercice 10. Soit $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que f est intégrable sur E si et seulement si :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n \mu(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}) < +\infty.$$

À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^{-\alpha} \mathbb{1}_{x>1}$ est-elle Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R} ?

Exercice 11. Supposons μ finie. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que f est intégrable sur E si et seulement si :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{|f| \geq n\}) < +\infty.$$

Que dire dans le cas où l'on se passe de l'hypothèse μ finie ?

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur \mathbb{R} . Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(\cdot + n)|$ converge presque partout sur $[0, 1]$.

Exercice 13 (Un critère d'intégrabilité). Montrer que pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable :

$$\int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\}) dt = \int_E f d\mu.$$

Est-ce encore vrai pour toute fonction intégrable ? Montrer que pour tout $p \in]0, +\infty[$:

$$\int_E f^p d\mu = p \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\}) t^{p-1} dt.$$

Exercice 14. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que la boule unité B_d soit de mesure de Lebesgue finie. Donner une condition sur d et p pour que la fonction $x \mapsto \|x\|^{-p}$ soit Lebesgue-intégrable sur B_d .

Exercice 15 (Lemme de Scheffé). Soit (f_n) une suite de fonctions positives et intégrables sur E , convergeant presque partout vers f intégrable sur E et vérifiant :

$$\int_E f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E f d\mu.$$

Montrer que la suite (f_n) converge vers f dans $L^1(E)$. Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose plus les fonctions positives ?

Exercice 16. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ croissante, continue en 0 et 1, dérivable λ -presque partout. Montrer que :

$$\int_0^1 f'(x) dx \leq f(1) - f(0).$$

En s'appuyant sur l'ensemble de Cantor, donner un exemple de fonction pour laquelle cette inégalité est stricte.

Exercice 17. Déterminer la limite de la suite $I_n(\alpha)$ ci-dessous selon $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx.$$

Exercice 18. Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge μ -presque partout vers une fonction f . On suppose qu'il existe n_0 tel que f_{n_0} soit intégrable sur E . Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Que peut-on dire sans l'hypothèse d'intégrabilité ?