7. Espaces L^p

Exercice 1 (Variante de l'inégalité de Hölder)**.** Soient $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Soient $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$. Montrer que $fg \in L^r(\mu)$ et :

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Exercice 2 (Inclusions)**.**

(i) Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Montrer que $L^q([0,1]) \subset L^p([0,1])$. L'inclusion est-elle stricte ?

(ii) Donner un exemple de fonction appartenant à tout L^p, mais pas à L^∞ sur $\mathbb{R}$.

(iii) Soient $p \neq q$. Montrer que $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$ ne sont pas comparables (i.e. ni $L^p(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$, ni $L^q(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$).

(iv) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que $L^p(E) \cap L^q(E) \subset L^r(E)$ si $1 \leq p \leq r \leq q < +\infty$. En déduire que, pour f donnée, l'ensemble $\{p \in [1, +\infty[, \ f \in L^p(E)\}$ est un intervalle.

Exercice 3 (Espaces de suites)**.** Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit $\ell^p(\mathbb{N}) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$:

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty \right\}.$$

Montrer que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$ si $p \leq q$. L'inclusion est-elle stricte ?

Exercice 4. Posons $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x(1+|\ln x|)^2}$. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ et $f \notin L^p(\mathbb{R}_+^*)$ si $p \neq 1$.

Exercice 5. Soient $f, g \in L^1([a,b])$. Montrer que, en notant $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G : x \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\int_a^b f(t)G(t)\,\mathrm{d}t = F(b)G(b) - \int_a^b F(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Posons $F : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{-1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\|F\|_2 \leq 2\|f\|_2$.

Exercice 7. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Posons $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^{\frac{p-1}{p}}\right)$.

Exercice 8. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé et f une fonction positive intégrable. Montrer que si $\mu(\{f > 0\}) < 1$ alors $\lim\limits_{p\to0^+} \|f\|_p = 0$. Montrer que $\lim\limits_{p\to0^+} \int_E f^p\,d\mu = \mu(\{f > 0\})$.

Exercice 9 (Lemme de Scheffé)**.** Soit (f_n) une suite de fonctions de L^p convergeant p.p. vers $f \in L^p$. Montrer que :

$$\|f_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\|_p \iff \|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Exercice 10 (Inégalité de Hardy)**.** Soit $p \in]1, +\infty[$. À toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, on associe $F : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'inégalité de Hardy ci-dessous est vérifiée pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$:

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p .$$

Indication : on commencera par vérifier la bonne définition des objets en jeu, puis par montrer, pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$:

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p\,\mathrm{d}x \leq \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} f(x)F(x)^{p-1}\,\mathrm{d}x.$$

Justifier que la constante $\frac{p}{p-1}$ est optimale. Que dire dans les cas $p = 1$ et $p = +\infty$?

Exercice 11. Soient $1 \leq p < +\infty$ et $a \in \mathbb{R}$. Posons $\tau_a : f \in L^p(\mathbb{R}) \mapsto f(\cdot - a)$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, montrer que $\|\tau_a f - f\|_p \xrightarrow[a\to0]{} 0$.