Exercices colles MPSI 2023-24 Henri IV

Sacha Quayle

Table des matières

1 Ensembles, applications

Exercice.
Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$.

Solution. On procède par double implication. Supposons que f est injective et soit $A \subset E$.

- Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$.
- Réciproquement, si $f \in f^{-1}(f(A))$, alors $f(x) \in f(A)$, donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$ et par injectivité de f on a alors $x = a \in A$.

Inversement, supposons : $\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$. Soient $x, y \in E$ tel que $f(x) = f(y)$. En considérant $A = \{x\}$, on a $f(A) = \{f(y)\}$, donc $y \in f^{-1}(f(A)) = A = \{x\}$, d'où $x = y$.

Exercice.
Soient E, F, G des ensembles de $f : F \to G$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si :

$$\forall g, h : E \to F,\ f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Solution. On procède par double implication. On suppose que f est injective. Soient $g, h : E \to F$ des applications telles que $f \circ g = f \circ h$. Alors, pour tout $x \in E$, $f(g(x)) = f(h(x))$, d'où par injectivité de f, on a $g(x) = h(x)$. D'où $g = h$.

Inversement, on suppose : $\forall g, h : E \to F,\ f \circ g = f \circ h \implies g = h$. Soient $a, b \in E$ tels que $f(a) = f(b)$. On considère $g, h : E \to F$ définis par : $\forall x \in E,\ g(x) = a$ et $h(x) = b$. Alors $f \circ g = f \circ h$, donc par hypothèse $g = h$, et donc $a = b$. Donc f est injective.

Exercice.
Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. Soient A, B des parties de E. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si pour toutes parties A, B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Solution.

1. Soit $y \in f(A \cap B)$: il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$, ainsi $y \in f(A) \cap f(B)$.
2. On suppose d'abord f injective. Soient A, B des parties de E. On a déjà l'inclusion directe. Soit ainsi $y \in f(A) \cap f(B)$. Il existe alors $a \in A$ et $b \in B$ tels que $y = f(a) = f(b)$, ainsi par injectivité de f on a $a = b \in A \cap B$, et donc $y \in f(A \cap B)$. Inversement, on suppose : pour toutes parties A, B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. On pose $A : \{x\}$ et $B = \{y\}$. Si par l'absurde $x \neq y$, alors $A \cap B =$, donc $= f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) = \{f(x)\} \neq$, d'où la contradiction. Donc $x = y$.
3. Il suffit de prendre A, B disjoints et f constante.

Exercice.
Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Solution. Si f est injective, alors $f \circ f = id$, donc f est surjective. Si f est surjective : soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Il existe x', y' dans E tels que $x = f(x')$ et $y = f(y')$, et ainsi : $x = f(x') = f \circ f \circ f(x') = f(f(x)) = f(f(y)) = f \circ f \circ f(y') = f(y') = y$, donc f est injective.

Exercice.
Soient E et F des ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. Soient A, B des parties de E. Si f est injective sur A et B, l'est-elle sur $A \cup B$?
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E. On suppose que $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et que la suite $(A_n)_n$ est croissante pour l'inclusion. Montrer que si f est injective sur A_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est injective sur E.

Solution.

1. Non (faire un dessin).
2. On suppose que f est injective sur tous les A_n. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Puisque $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_{n_1}$ et $y \in A_{n_2}$. Quitte à échanger les rôles, on peut supposer que $n_2 \geqslant n_1$. Ainsi, par croissance de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $x \in A_{n_2}$. D'où par injectivité de f sur A_{n_2}, on obtient $x = y$. D'où f est injective sur E.

2 Dénombrement

2.1 Raisonnements par récurrence

Exercice.
Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Solution. On démontre la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$" par récurrence simple sur $n \geqslant 0$:

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{P}(n)$. Alors $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$, par hypothèse de récurrence. Or
$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = (n+1)^2\left(\frac{n+2}{2}\right)^2,$$
d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Exercice.
On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - 2^n.$$

Solution. On démontre la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 3^n - 2^n$" par récurrence forte sur $n \geqslant 0$:

- Par définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on a $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$.
- Soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{P}(0), ..., \mathcal{P}(n+1)$. Par définition, on a $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$, donc par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 6(3^n - 2^n) \\ &= 3^n(15-6) - 2^n(10-6) \\ &= 9.3^n - 4.2^n \\ &= 3^{n+2} - 2^{n+2}, \end{aligned}$$

  d'où $\mathcal{P}(n+2)$ (on aurait aussi pu le démontrer par récurrence double).

Exercice.
Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 - nx \leqslant (1-x)^n \leqslant \frac{1}{1+nx}.$$

Solution. On démontre la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$\forall x \in [0,1],\ 1 - nx \leqslant (1-x)^n \leqslant \frac{1}{1+nx}$" par récurrence simple sur $n \geqslant 0$:

- On a $1 \leqslant 1 \leqslant 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{P}(n)$. Soit $x \in [0,1]$. D'une part,

$$\begin{aligned} (1+(n+1)x)(1-x)^{n+1} &= (1+nx)(1-x)^n(1-x) + x(1-x)^{n+1} \\ &\leqslant 1.(1-x) + x(1-x)^{n+1} \end{aligned}$$

  par hypothèse de récurrence. On a aussi $1-x \leqslant 1$, donc $(1-x)^{n+1} \leqslant 1$. D'où $(1+(n+1)x)(1-x)^{n+1} \leqslant 1 - x + x = 1$, d'où la deuxième inégalité. Pour la première, on a

$$(1-x)^{n+1} = (1-x)^n(1-x) \geqslant (1-nx)(1-x)$$

  par hypothèse de récurrence. Or $(1-nx)(1-x) = 1 - (n+1)x + nx^2 \geqslant 1 - (n+1)x$, d'où la première inégalité. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

2.2 Coefficients binomiaux

Exercice.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le cardinal des ensembles $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ et $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$.

Solution. On note $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$, $B = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leqslant i = j \leqslant n\}$ et $C = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leqslant j < i \leqslant n\}$. Les ensembles A, B et C forment une partition de $\{1, ..., n\}^2$, donc $|A| + |B| + |C| = n^2$, avec $|C| = |A|$ et $|B| = n$, donc on en déduit $|A| = \frac{n(n-1)}{2}$, puis $|\{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}| = |A \cup B| = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les sommes $S = \sum_{p=0,\, p \text{ pair}}^{n} \binom{n}{p}$ et $T = \sum_{p=0,\, p \text{ impair}}^{n} \binom{n}{p}$. Calculer $S+T$ et $S-T$. En déduire S et T.

Solution. On a $S + T = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$ et $S - T = \sum_{p=0,\, p \text{ pair}}^{n} \binom{n}{p} - \sum_{p=0,\, p \text{ impair}}^{n} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} = (1-1)^n = 0$. Ainsi on en déduit $S = T$ et $2S = 2^n$, d'où $S = T = 2^{n-1}$.

Exercice.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier : $\sum_{p=0}^n p\binom{n}{p} = \sum_{p=0}^n (n-p)\binom{n}{p}$. En déduire la somme $\sum_{p=0}^n p\binom{n}{p}$.
2. Montrer : $\forall p \in \{1, ..., n\}$, $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$. Retrouver ainsi la somme $\sum_{p=0}^n p\binom{n}{p}$.
3. Retrouver cette somme en dérivant la fonction $t \mapsto \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} t^p$.

Solution.

1. On réindexe la somme et on utilise la propriété de symétrie : $\sum_{p=0}^n p\binom{n}{p} = \sum_{p=0}^n (n-p)\binom{n}{n-p} = \sum_{p=0}^n (n-p)\binom{n}{p}$. On en déduit $2\sum_{p=0}^n p\binom{n}{p} = \sum_{p=0}^n n\binom{n}{p} = n2^n$, donc $\sum_{p=0}^n p\binom{n}{p} = n2^{n-1}$
2. On a : pour tout $p \in \{1, ..., n\}$,
$$\begin{aligned} p\binom{n}{k} &= p\frac{n!}{p!(n-p)!} = n\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\ &= n\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = n\binom{n-1}{p-1}. \end{aligned}$$
On en déduit $\sum_{p=0}^n p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^n p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^n n\binom{n-1}{p-1} = \sum_{p=0}^{n-1} n\binom{n-1}{p} = n2^{n-1}$.
3. On note $f : t \mapsto \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} t^p$. Alors $f(t) = (1+t)^n$ et $\sum_{p=0}^n p\binom{n}{p} = f'(1) = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$.

Exercice.

1. Montrer que pour tout $p, q, r \in \mathbb{N}^3$, $\sum_{i=0}^r \binom{p}{i}\binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}$ (formule de Vandermonde).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simple de $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$.

Solution.

1. On dénombre de deux façons différentes le nombre de parties à r élements d'un ensemble à $p+q$ éléments.
2. On a : $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$

Exercice.
Soit E un ensemble de cardinal fini n. Déterminer le cardinal de
$$\{(A, B) \in \mathcal{P}(E),\ A \subset B\}.$$

Solution. On a :
$$\begin{aligned} |\{(A, B) \in \mathcal{P}(E),\ A \subset B\}| &= \sum_{\{(A,B)\in\mathcal{P}(E),\ A\subset B\}} 1 = \sum_{B\in\mathcal{P}(E)} \sum_{A\in\mathcal{P}(E), A\subset B} 1 \\ &= \sum_{B\in\mathcal{P}(E)} |\{A \in \mathcal{P}(E), A \subset B\}| = \sum_{B\in\mathcal{P}(E)} |\mathcal{P}(B)| \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{B\in\mathcal{P}(E),|B|=k} |B| = \sum_{k=0}^n \sum_{B\in\mathcal{P}(E),|B|=k} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^n 2^k\binom{n}{k} = 3^n. \end{aligned}$$

Exercice.
Montrer que pour tout $n \geqslant p$,
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Solution. On démontre par récurrence simple sur $n \geqslant 0$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$\forall p \leqslant n$, $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$".

- La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- On suppose $\mathcal{P}(n)$ $(n \geqslant 0)$. Soit $p \geqslant n+1$. Si $p \geqslant n$, alors
$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1},$$
par l'hypothèse de récurrence et la formule du triangle de Pascal. Et si $p = n+1$, alors la relation est aussi vraie. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

On peut aussi retrouver le résultat par des arguments de dénombrement : $\binom{n+1}{k+1}$ correspond au nombre de parties à $k+1$ éléments de $\{0, ..., n\}$. Or pour choisir cette partie, on peut commencer par choisir son plus grand élément k (on aura alors $k \geqslant p$), puis on choisit une partie à p éléments de $\{0, ..., k-1\}$.

Exercice (*nombres de Bell*).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble fini de cardinal n. On pose $B_0 = 1$.

1. Calculer B_1, B_2, B_3.
2. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Solution.

1. On a $B_1 = 1$, $B_2 = 2$ et $B_3 = 5$.
2. On fixe E un ensemble à $n+1$ éléments. Pour choisir une partition de E, on choisit d'abord une première partie A de E, de cardinal k entre 1 et $n+1$, puis on choisit une partition de l'ensemble $E \backslash A$, qui est de cardinal $n-k$.

3 Structures algébriques

3.1 Groupes

Exercice.
Montrer que $H = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q},\ (a, b) \neq (0, 0)\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Solution. On a bien $H \subset G$ et $1 = 1 + 0.\sqrt{2} \in H$. Soient $x = a + b\sqrt{2} \in H$ et $y = a' + b'\sqrt{2} \in H$. Alors :

$$xy = (a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2},$$

Avec $aa' + 2bb', ab' + ba' \in \mathbb{Q}$, et on n'a pas $aa' + 2bb' = 0$ et $ab' + ba' = 0$ (car sinon, on aurait $xy = 0$, donc $x = 0$ ou $y = 0$, ce qui est exclu par définition de H). Donc $xy \in H$. D'autre part,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$$

(on a bien $a^2 - 2b^2 \neq 0$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel), ainsi

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2},$$

avec $\frac{a}{a^2-2b^2}, -\frac{b}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q} \setminus (0, 0)$, donc $\frac{1}{x} \in H$. Donc H est un sous-groupe de G.

Exercice.
Soit $(G, .)$ un groupe.

1. Si $x \in G$, montrer que $C_G(x) = \{y \in G,\ xy = yx\}$ est un sous-groupe de G. $C_G(x)$, formé des éléments de G qui commutent avec x, est appelé le centralisateur de x.

2. Montrer que $Z(G) = \{x \in G,\ \forall y \in G,\ xy = yx\}$ est un sous-groupe de G. $Z(G)$, formé des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, s'appelle le centre de G.

Solution.

1. On a $C(G) \subset G$ et $e \in C(G)$ car $xe = ex$. Soient $y, z \in C(G)$. Alors

$$x(yz) = (xy)z = (yx)z = y(xz) = y(zx) = (yz)x,$$

donc $yz \in C(G)$. D'autre part,

$$xy = yx \implies y^{-1}x = xy^{-1},$$

donc $y^{-1} \in C(G)$. Donc $C(G)$ est un sous-groupe de G.

2. On a $Z(G) \subset G$ et $e \in Z(G)$ car : $\forall y \in G,\ ey = ye$. Soient $x_1, x_2 \in Z(G)$. Alors :

$$\forall y \in G,\ (x_1x_2)y = y(x_1x_2),$$

donc $x_1x_2 \in Z(G)$. De même, $x_1^{-1} \in Z(G)$. Donc $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

Exercice (*opérations sur les sous-groupes*).
Soient $(G, .)$ un groupe et A, B des sous-groupes de G.

1. Montrer que $A \cap B$ est un sous-groupe de G. Est-ce-que $A \cup B$ est un sous-groupe de G ?
2. Montrer que $A \cup B$ est un sous-groupe de G si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.
3. On note $AB = \{ab,\, a \in A,\, b \in B\}$. Montrer que AB est un sous-groupe de G si et seulement si $AB = BA$.
4. On suppose que AB est un sous-groupe, que G est fini et que $|A| + |B| > |G|$. Montrer que $AB = G$.

Solution.

1. On a $A \cap B \subset G$, et $e \in A$, $e \in B$ car A, B sont des sous-groupes de G, donc $e \in A \cap B$. Soient $x, y \in A \cap B$. Alors par propriétés des sous-groupes A et B, on a $xy \in A$ et $xy \in B$, donc $xy \in A \cap B$. De même, $x^{-1} \in A \cap B$. Donc $A \cap B$ est un sous-groupe de G. La propriété n'est plus vraie pour l'union : par exemple, $2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$, on a $2, 3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$, mais $2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.
2. Si $A \subset B$, alors $A \cup B = B$ est bien un sous-groupe de G (de même si $B \subset A$). Réciproquement, on suppose que $A \cup B$ est un sous-groupe de G. Supposons par l'absurde que l'on ait ni $A \subset B$, ni $B \subset A$. Il existe alors $x \in A \setminus B$ et $y \in B \setminus A$. Puisque $x, y \in A \cup B$, alors par propriété de sous-groupe, $xy \in A \cup B$: on a alors $xy \in A$ ou $xy \in B$. Supposons par exemple $xy \in A$: alors $y = x^{-1}xy \in A$ car A est un sous-groupe de G, d'où la contradiction. Si l'on suppose $xy \in B$ alors on obtient de la même façon $x \in B$, ce qui est contradictoire aussi. Donc on en déduit $A \subset B$ ou $B \subset A$.
3. On suppose $AB = BA$. Montrons que AB est un sous-groupe de G : on a $AB \subset G$ et $e = e.e \in AB$. Soient $x = ab \in AB$ et $y = a'b' \in AB$. Alors $xy = aba'b'$, avec $ba' \in BA = AB$, donc il existe $a'', b'' \in A \times B$ tel que $ba' = a''b''$. Ainsi
$$xy = aba'b' = a(a''b'')b = (aa'')(b''b) \in AB.$$
On a également $x^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in BA = AB$. Ainsi, AB est un sous-groupe de G.

   Réciproquement, on suppose que AB est un sous-groupe de G. Soit $x = ab \in AB$. Alors $x^{-1} \in AB$ (propriété de sous-groupe), et $x^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, donc il existe $a', b' \in A \times B$ tel que $b^{-1}a^{-1} = a'b'$, et alors $x = ab = b'^{-1}a'^{-1} \in BA$. D'où $AB \subset BA$. Si $y = ba \in BA$, alors $y^{-1} \in AB$, donc par propriété de sous-groupe, $y \in AB$. D'où $BA \subset AB$. Donc $AB = BA$.
4. Si G est fini et $|A| + |B| > |G|$, soit $x \in G$. On cherche $a \in A$ tel que $a^{-1}x \in B$. Si par l'absurde pour tout $a \in A$, $a^{-1}x \notin B$, alors $\{a^{-1}x,\, a \in A\} \cup B \subset G$ et donc $|G| \geqslant |\{a^{-1}x,\, a \in A\}| + |B| = |A| + |B|$, d'où la contradiction.

Exercice (*théorème de Lagrange*).
Soient $(G, .)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G.

1. On définit sur G la relation $\sim$ définie par
$$x \sim y \Leftrightarrow \exists h \in H,\, y = xh.$$
Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G et déterminer les classes d'équivalence.
2. Montrer le théorème de Lagrange : $|H|$ divise $|G|$.
3. En déduire que si $x \in G$, alors $x^{|G|} = e$.

Solution.

1. La relation est réflexive ($x \sim x$ car $x = x.e$), transitive (si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $y = xh_1$ et $z = yh_2$ avec $h_1, h_2 \in H$, donc $z = x(h_1h_2)$ et $x \sim z$), et symétrique (si $x \sim y$, alors $y = xh$ avec $h \in H$, donc $x = yh^{-1}$, donc $y \sim x$), donc $\sim$ est bien une relation d'équivalence sur G. Pour tout $x \in G$, la classe d'équivalence de x est $C(x) = \{y \in G,\, \exists h \in H,\, y = xh\} = \{xh,\, h \in H\} = xH$.

2. On note $\{x_1, ..., x_n\}$ un système de représentants pour la relation $\sim$. Alors on a la partition disjointe $G = \bigcup_{i=1}^n C(x_i)$, donc $|G| = \sum_{i=1}^n |C(x_i)| = \sum_{i=1}^n |x_iH|$. Or, pour tout $x \in G$, on a $|H| = |xH|$: en effet, l'application $f : H \to H$ définie par $f(h) = xh$ est une bijection (vérifier), donc $|G| = \sum_{i=1}^n |H| = n|H|$, donc $|H|$ divise $|G|$.

3. On applique le théorème de Lagrange à $H =< x >$.

Exercice.
Déterminer tous les morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même. Lesquels sont injectifs ? Lesquels sont surjectifs ?

Solution. On effectue un raisonnement par analyse-synthèse.

1. Analyse : Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ un morphisme de groupes. Alors $f(0) = 0$ et pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$, $f(n + m) = f(n) + f(m)$. Ainsi, $f(n) = f(1 + ... + 1) = nf(1) = na$ avec $a \in \mathbb{Z}$.

2. Synthèse : Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de la forme $f(n) = na$ avec $a \in Z$. Alors $f(0) = 0$, et pour tout $n, m \in Z$, on a $f(n + m) = (n + m)a = na + ma = f(n) + f(m)$, donc f est bien un morphisme de groupes.

Ainsi, les morphismes de $\mathbb{Z}$ dans lui-même sont les applications de la forme $f_a(n) = na$ avec $a \in Z$. Pour tout $a \neq 0$, si $f_a(n) = 0$, alors $na = 0$, donc $n = 0$. Ainsi, les morphismes injectifs sont les f_a pour $a \neq 0$.

On a f_a surjectif $\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{Z}, m = na \Leftrightarrow \mathbb{Z}a = \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \in \{-1, +1\}$. Donc les morphismes surjectifs sont f_{-1} et f_1.

Exercice.
Soit $(G, .)$ un groupe. Pour $a \in G$, on note $\tau_a : G \to G$ défini par $\tau_a(x) = axa^{-1}$. Montrer que $\theta = \{\tau_a,\, a \in G\}$, muni de la loi de composition, est un sous-groupe de l'ensemble $End(G)$ des morphismes de groupes $G \to G$.

Solution. On a bien $\theta \subset End(G)$: en effet, si $a \in G$, $\forall x, y \in G$, $\tau_a(x.y) = a(x.y)a^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = \tau_a(x)\tau_a(y)$, donc τ_a est un morphisme de groupes. On a $id = \tau_e \in \theta$. Soient $a, b \in G$. Alors : $\forall x \in G$, $\tau_a \circ \tau_b(x) = \tau_a(bxb^{-1}) = abxb^{-1}a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = \tau_{ab}(x)$, donc $\tau_a \circ \tau_b \in \theta$. En outre, L'application τ_a est bijective car : $\forall x \in G$, $\tau_a \circ \tau_{a^{-1}}(x) = \tau_{aa^{-1}}(x) = x$, et de même $\tau_{a^{-1}} \circ \tau_a(x) = x$, donc on en déduit que τ_a est bijective d'inverse $\tau_{a^{-1}} \in \theta$. Ainsi, θ est bien un sous-groupe de $End(G)$.

Exercice.
Soient G un groupe fini et $\varphi : G \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes. Calculer $\sum_{x \in G} \varphi(x)$.

Solution. Si φ est constante égale à 1, alors la somme vaut $|G|$. On suppose ainsi φ non constante. Alors il existe $g \in G$ tel que $\varphi(g) \neq 1$. L'application $x \mapsto gx$ est une bijection de G, donc

$$\sum_{x \in G} \varphi(x) = \sum_{x \in G} \varphi(gx) = \varphi(g) \sum_{x \in G} \varphi(x),$$

or $\varphi(g) \neq 1$, donc $\sum_{x \in G} \varphi(x) = 0$.

3.2 Le groupe symétrique

Exercice (*générateurs de S_n*).
Soit $n \geqslant 1$. Montrer à chaque fois que S_n est engendré par :

1. Les transpositions de S_n.
2. Les transpositions de la forme $(1\,i)$ pour $i \in [\![2, n]\!]$.
3. Les transpositions de la forme $(i\ i+1)$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$.
4. Les permutations $(1\,2)$ et $(1\,2...n)$.

Solution.

1. S_n est engendré par les cycles, et tout cycle s'écrit comme produit de transpositions.
2. Pour tout $(i, j) \in [\![2, n]\!]$, $(i\,j) = (1\,i)(1\,j)(1\,i)$.
3. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $(1\,i) = (1\,2)(2\,3)....(i-1\ i)....(2\,3)(1\,2)$.
4. On a : pour tout cycle $(a_1...a_p)$ et pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma(a_1...a_p)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)...\sigma(a_p))$. Ainsi, en notant $\sigma = (1\,2...n)$, on a $(2\,3) = \sigma(1\,2)\sigma^{-1}$, $(3\,4) = \sigma(2\,3)\sigma^{-1} = \sigma^2(1\,2)\sigma^{-2}$, d'où le résultat par récurrence.

Exercice (*groupe alterné*).
Soit $n \geqslant 1$. On note A_n le groupe alterné.

1. Montrer que si $n \geqslant 4$, alors $Z(A_n) = \{id\}$.
2. Montrer que si $n \geqslant 5$, alors A_n est engendré par les 3-cycles, et que les 3-cycles sont conjuguées dans A_n.

Solution.

1. Soit $\gamma \neq id$ un élément de A_n : il existe i tel que $\gamma(i) \neq i$. Puisque $n \geqslant 4$, il existe $k \notin \{i, \gamma(i), \gamma^2(i)\}$. Soit $\sigma = (i\,\gamma(i)\,k)$. Alors $\sigma\gamma(i) = k$ et $\gamma\sigma(i) = \gamma^2(i) \neq k$, donc $\sigma\gamma \neq \gamma\sigma$.
2. S_n est engendré par les transpositions, et A_n correspond aux permutations ayant un nombre pair de transpositions dans la décomposition en produit de transpositions. Ainsi, il suffit de montrer que les doubles transpositions s'écrivent comme produit de 3-cycles. Soient $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]$. On considère la permutation $\sigma = (i\,j)(k\,l)$.

   - Si $i = k$ et $j = l$, alors $\sigma = (i\,j)^2 = id = \gamma^3$ pour tout 3-cycle γ.
   - Si $i = k$ et $j \neq l$, alors $\sigma = (i\,j)(i\,l) = (i\,j\,l)$.
   - Si i, j, j, l sont distincts, alors $\sigma = (i\,k\,j)(i\,k\,l)$.

   Donc A_n est bien engendré par les 3-cycles. D'autre part, on sait que les 3-cycles sont conjugués dans S_n (tous les cycles de même longueur sont conjugués) : si $\sigma, \sigma' \in A_n$ sont des 3-cycles, il existe $\gamma \in S_n$ tel que $\sigma = \gamma\sigma'\gamma^{-1}$. Si $\gamma \in A_n$, c'est gagné. Sinon, puisque $n \geqslant 5$, il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ qui ne sont pas dans le support du 3-cycle σ'. Si on pose $\tau = (i\,j)$, on a alors

   $$\sigma = (\gamma\tau)\sigma'(\gamma\tau)^{-1}, \qquad \gamma\tau \in A_n,$$

   donc c'est gagné. D'où les 3-cycles sont conjugués dans A_n.

3.3 Anneaux, idéaux, corps

Exercice.

1. Montrer qu'un corps est intègre. Est-ce-qu'un anneau intègre est un corps ?
2. Montrer qu'un anneau intègre fini est un corps.
3. Soit A un anneau non nul commutatif.
   (a) Montrer que A est un corps si et seulement si les seuls idéaux de A sont A et $\{0\}$.
   (b) On suppose que A est intègre et n'a qu'un nombre fini d'idéaux. Montrer que A est un corps.

Solution.

1. Un corps est intègre (c'est du cours). La réciproque est fausse en général (par exemple, $\mathbb{Z}$ est intègre mais n'est pas un corps).
2. Soient A est un anneau intègre fini, et $x \in A$ non nul. On considère l'application $f : A \to A$ définie par $f(y) = xy$. Alors f est injective par intégrité de A, donc puisque A est fini, f est bijective : en particulier, il existe $y \in A$ tel que $xy = 1$, donc x est inversible et A est un corps.
3. (a) On suppose que A est un corps. Soit I un idéal non nul de A, montrons que $I = A$. Soit $x \in A$. I est non nul donc il existe $y \in I$ non nul, et puisque A est un corps y est inversible. On a alors $x = xy^{-1}.y \in I$ par définition d'un idéal, donc $I = A$.
   Réciproquement, on suppose que les seuls idéaux de A sont A et $\{0\}$. Soit $x \in A$ non nul. Alors xA est un idéal de A, et x non nul donc $xA \neq \{0\}$, donc $xA = A$ et en particulier il existe $y \in A$ tel que $xy = 1$, donc x est inversible.
   (b) Soit $x \in A$ non nul. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^k A$ est un idéal de A. Puisque A n'a qu'un nombre fini d'idéaux, il existe $k < l$ tels que $x^k A = x^l A$: il existe donc $a, b \in A$ tels que $x^k a = x^l b$, et donc $x.x^{l-k-1} = ab^{-1}$. Donc x est inversible et A est un corps.

Exercice (*anneau des entiers de Gauss*).
On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau.
2. Déterminer les endomorphismes d'anneaux $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i]$.
3. Déterminer $\mathbb{Z}[i]^\times$.

Solution.

1. Ok.
2. Si par l'absurde $\phi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$ est un morphisme d'anneaux, alors $0 \leqslant \phi(i)^2 = \phi(-1) = -1$, d'où la contradiction. Si $\phi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i]$ est un morphisme, alors $\phi(1) = 1$ et $\phi(i)^2 = \phi(i^2) = \phi(-1) = -1$, donc $\phi(i) = i$ ou $\phi(i) = -i$. Dans le premier cas, on trouve $\phi : z \mapsto z$ et dans le deuxième cas on trouve $\phi(z) = \overline{z}$. Inversement, ce sont bien des morphismes de $\mathbb{Z}[i]$.
3. Pour déterminer $\mathbb{Z}[i]^\times$, on considère pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) = |z|^2$. Alors pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) \in \mathbb{N}$. Ainsi, si $z \in \mathbb{Z}[i]^\times$, il existe $z' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$, et donc $N(z)N(z') = N(zz') = N(1) = 1$, donc $N(z) = 1$. Ainsi, si on écrit $z = a + ib$, on a $a^2 + b^2 = 1$, donc $(a, b) \in \{(0, 1), (0, -1), (1, 0)\, (-1, 0)\}$, c'est-à-dire $z \in \{\pm i, \pm 1\}$. Inversement, ces éléments sont bien des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$. Donc $\mathbb{Z}[i] = \{\pm i, \pm 1\}$.

Exercice (*anneau de Boole*).
Soit A un anneau non nul tel que pour tout $x \in A$, $x^2 = x$.

1. Montrer que A est commutatif.
2. Déterminer A dans le cas où A est intègre.

Solution.

1. Si $x, y \in A$, alors $(x+y)^2 = x + y$, donc en développant on obtient $xy + yx = 0$, donc $xy = -yx$. Or, pour tout $z \in A$, $z = z^2 = (-z)^2 = -z$, d'où $xy = yx$ et A est commutatif.
2. On suppose A intègre. Alors : $\forall x \in A$, $x(x-1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$. Ainsi, $A = \{0\}$ ou $\{0, 1\}$.

Exercice (*idéaux premiers et maximaux*).
Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A.

1. On dit que l'idéal I est premier si $I \neq A$ et : $\forall x, y \in A$, $xy \in I \implies x \in I$ ou $y \in I$.
   (a) Montrer que I est premier si et seulement si l'anneau quotient A/I est intègre.
   (b) On suppose que tout idéal de A est premier. Montrer que A est un corps.
2. On dit que l'idéal I est maximal si pour tout idéal J tel que $I \subset J$, on a $J = I$ ou $J = A$. Montrer que I est maximal si et seulement si A/I est un corps.
3. Quels sont les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$? Les idéaux maximaux ?

Solution.

1. (a) On a $xy \in I$ si et seulement si $\overline{xy} = 0$, d'où l'équivalence.
   (b) Si $x \in A$ est non nul, alors $I = x^2A$ est un idéal de A, donc il est premier. On a $x^2 \in I$, donc $x \in I$: il existe $a \in A$ tel que $x = x^2a$, donc $x(1 - xa) = 0$. Or A est intègre car par hypothèse l'idéal $\{0\}$ est premier, donc puisque $x \neq 0$ on a $xa = 1$ et x est inversible. Donc A est un corps.
2. On suppose I maximal. Soit $\overline{x} \in A/I$ non nul. On considère l'idéal $J = I + x.A$ engendré par I et x. On a $I \subset J$ et $J \neq I$ (car $x \notin I$), donc $J = A$: en particulier il existe $y \in I$ et $a \in A$ tel que $y + xa = 1$, et donc $\overline{xa} = \overline{1}$, donc $\overline{x}$ est inversible. Réciproquement, on suppose que A/I est un corps. Soit J un idéal tel que $I \subset J$ et $I \neq J$: il existe $x \in J$ avec $x \notin I$, donc $\overline{x} \neq 0$, donc $\overline{x}$ est inversible : il existe $\overline{y} \in A/I$ tel que $\overline{xy} = 1$, c'est-à-dire $1 - xy \in I$, donc $1 \in J$. Ainsi, $J = A$ et I est maximal.

4 Arithmétique

Exercice. On s'intéresse au système suivant dans $\mathbb{Z}$: (1) $\left\{\begin{array}{l} x \equiv 1[3] \\ x \equiv 5[11] \end{array}\right.$

1. Trouver une relation de Bézout entre les entiers 3 et 11.
2. En déduire une solution particulière du système (1).
3. Trouver toutes les solutions de (1).

Solution.

1. On trouve : $11.(-1) + 3.(4) = 1$.
2. Si x est une solution de (1), on a alors $x = 3k + 1 = 11q + 5$, où $k, q \in \mathbb{Z}$. On a alors $3.k - 11.q = 4$. Or, d'après la question 1, on a $11.(-4) + 3.(16) = 4$, donc si on prend $k = 16$ et $q = 4$, on obtient une solution particulière de (1) : $x_0 = 49$.
3. Soit x une solution de (1). On a alors $x \equiv 1[3]$ et $x \equiv 5[11]$. On a alors $x = 3k+1 = 11q+5$, où $k, q \in \mathbb{Z}$, donc $3k - 11q = 4$. Puisque x_0 est une solution particulière, on a également $3.(16) + 11.(-4) = 4$, donc en soustrayant les deux égalités, $3(k-16) - 11(q-4) = 0$. On obtient alors $3|11(q-4)$, or 3 et 11 sont premiers entre eux, donc $3|(q-4)$, c'est à dire $q = 3n+4$ où $n \in \mathbb{Z}$. De la même façon, $k = 11n' + 16$ où $n' \in \mathbb{Z}$. Finalement, $x = 11(3n+4) + 5 = 33n + 49$. Réciproquement, tout entier de la forme $33n + 49$ est congru à 1 modulo 3 et à 5 modulo 11.

Exercice.

1. Soit $(G, .)$ un groupe abélien, et $x, y \in G$. On suppose que x est d'ordre a, et y est d'ordre b, avec $a \wedge b = 1$. Montrer que xy est d'ordre ab.
2. Soit K un corps commutatif de cardinal fini $n \geqslant 1$. On note m le ppcm des ordres des éléments de $(K^*, .)$. Montrer qu'il existe un élément dans K d'ordre m (indication : on commencera par décomposer m en produit de nombres premiers).

Solution.

1. On note k l'ordre de xy. Puisque $(xy)^{ab} = x^{ab}y^{ab} = 1$ (car G est abélien), on a $k|ab$. Montrons que $ab|k$. On a $(xy)^k = 1$, donc $x^k = y^{-k}$ et $y^k = x^{-k}$. On a ainsi $x^{kb} = 1$ et $y^{ka} = 1$, donc $a|kb$ et $b|ka$. Or a et b sont premiers entre eux, donc $a|k$ et $b|k$. De même puisque a et b sont premiers entre eux, on a donc $ab|k$. D'où $k = ab$.
2. On écrit la décomposition de m en produit de nombres premiers : $m = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. D'après la question précédente, si on trouve pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ un élément x_i d'ordre $p_i^{\alpha_i}$, alors par récurrence, $x = \prod_{i=1}^{r} x_i$ est d'ordre m. Or, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, par définition de m, il existe y_i d'ordre $p_i^k q_i$, où q_i est un entier non multiple de p_i et $k = \alpha_i$: en effet, pour tout $y \in G$ on peut écrire son ordre sous la forme $p_i^k q$ où p_i ne divise pas q. Si par l'absurde on a toujours $k < \alpha_i$, alors $p_i^k \prod_{j=1,\, j \neq i}^{r} p_j^{\alpha_j}$ serait un multiple commun à tous les ordres des éléments de G, d'où la contradiction par définition du ppcm. Ainsi, il existe y_i d'ordre $p_i^k q_i$. Dans ce cas, l'élément $x = y^{q_i}$ est d'ordre $p_i^{\alpha_i}$, et c'est gagné.

Exercice (*indicateur d'Euler*).
Si $n \geqslant 1$, on définit l'indicateur d'Euler de n par la formule :

$$\varphi(n) = |\{k \in [\![1, n]\!],\ k \wedge n = 1\}|.$$

1. (a) Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   (b) Quel est le lien avec l'indicateur d'Euler ?
2. (a) Calculer $\varphi(p^\alpha)$ pour p premier et $\alpha \geqslant 1$.
   (b) Montrer que si n, m sont des entiers non nuls premiers entre eux, alors $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.
   (c) En déduire $\varphi(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. (a) Pour tout $d \in \mathcal{D}_n$ (l'ensemble des diviseurs de n), on pose $A_d = \{k \in [\![1, n]\!],\ k \wedge n = d\}$. Déterminer le cardinal de A_d.
   (b) Démontrer la formule $n = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \varphi(d)$.

Solution.

1. C'est du cours. On a $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$.
2. (a) Puisque p est premier, un entier $k \leqslant p^\alpha$ est premier avec p si et seulement si p ne divise pas k. Ainsi, $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - |D|$, où $D = \{k \in [\![1, p^\alpha]\!], p|k$. Or un entier $k \in D$ s'écrit $k = pl, avecl \in [\![1, p^{\alpha-1}]\!]$, d'où $|D| = p^{\alpha-1}$ et $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.
   (b) Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ sont isomorphes d'après le théorème chinois, donc on en déduit $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times| = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|.|(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times|$, d'où l'égalité d'après la question 1.
   (c) On écrit la décomposition de n en produit de nombres premiers : $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$, alors d'après les deux questions précédentes, $\varphi(n) = \prod_{i=1}^r \varphi(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^r (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}) = n \prod_{i=1}^r (1 - \frac{1}{p_i})$.
3. (a) On a une bijection $f : A_d \to \{l \in [\![1, \frac{n}{d}]\!],\ l \wedge \frac{n}{d} = 1\}$ donnée par $f(k) = \frac{k}{d}$, ainsi A_d est de cardinal $\varphi(\frac{n}{d})$.
   (b) On a la partition $n = \cup_{d \in \mathcal{D}_n} A_d$, donc $n = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} |A_d| = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \varphi(n/d) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \varphi(d)$.

Exercice (*infinité de nombres premiers*).

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
2. (a) Montrer que si un entier n est congru à 3 modulo 4, alors il admet un facteur premier congru à 3 modulo 4.
   (b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Solution.

1. Si par l'absurde il existe un nombre fini de nombres premiers $p_1, ..., p_N \geqslant 2$, alors on considère $n = \prod_{i=1}^N p_i + 1$: n est un entier différent de $p_1, ...p_N$, donc n n'est pas premier : il existe k tel que $p_k|n$. Or $p_k| \prod_{i=1}^N p_i$, donc on aurait $p_k|1$, d'où la contradiction.
2. (a) On remarque pour commencer que tout facteur premier différent de 2 est congru à 1 ou 3 modulo 4, et n est congru à 3 modulo 4, donc est impair, donc 2 n'est pas un facteur premier de n. Ainsi, si par l'absurde n est congru à 3 modulo 4, mais tous les diviseurs premiers de n ne le sont pas, alors ils sont tous congrus à 1 modulo 4, donc leur produit aussi. D'où la contradiction. Donc n admet un facteur premier congru à 3 modulo 4.
   (b) On suppose par l'absurde qu'il existe un nombre fini de nombres premiers congrus à 3 modulo 4, on les note $p_1, ..., p_N$. On considère $n = 4 \prod_{i=1}^N p_i - 1$, alors n est congru à 3 modulo 4, donc par la question précédente, il existe k tel que p_k est congru à 3 modulo 4 et $p_k|n$, ainsi on aurait $p_k| - 1$, d'où la contradiction.

Exercice.
Soit $p \geqslant 2$ un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $p | \binom{p}{k}$.
2. En déduire une autre preuve du petit théorème de Fermat : $\forall n \geqslant 1$, $n^p \equiv n[p]$.

Solution.

1. Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. On a $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$, donc $p | k! \binom{p}{k}$. Or, pour tout $l \in [\![1, k]\!]$, $p \wedge l = 1$, donc d'après le théorème de Gauss on obtient $p | \binom{p}{k}$.
2. On démontre la propriété par récurrence sur $n \geqslant 1$: si $n = 1$ c'est vrai. Si on suppose la propriété vraie au rang n, alors
$$(n+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k,$$
or d'après la question 1, pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a $p | \binom{p}{k}$, donc $(n+1)^p \equiv n^p + 1[p]$, et par hypothèse de récurrence on obtient donc $(n+1)^p \equiv n + 1[p]$.

5 Nombres complexes

Exercice (noyaux de Dirichlet et de Féjer).
Calculer pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$ les sommes suivantes :

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}, \quad K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

Solution. Pour la première somme, si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors la somme vaut $2n+1$. Sinon, on reconnaît une somme géométrique, on factorise ensuite par l'angle moitié au numérateur et au dénominateur pour faire apparaître le sinus et on trouve : $D_n(x) = \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}$.

Pour la deuxième somme, on fait la même distinction de cas, si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on utilise ce qui précède, on écrit $\sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$ puis on utilise la linéairité de la partie imaginaire afin de se ramener à un calcul de somme géométrique, puis on trouve $K_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$.

Exercice.
Soit $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité. Calculer :

$$\sum_{w \in \mathbb{U}_n} w^p, \quad \prod_{w \in \mathbb{U}_n} w, \quad \sum_{w \in \mathbb{U}_n} (1+w)^n, \quad \sum_{w \in \mathbb{U}_n} |w-1|.$$

Solution. On a $\mathbb{U}_n = \{z^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$ où $z = e^{2i\pi/n}$. Ainsi, $\sum_{w \in \mathbb{U}_n} w^p = \sum_{k=0}^{n-1} z^{pk} = \frac{z^{pn}-1}{z^p-1} = 0$ car $z^n = 1$. On a $\prod_{w \in \mathbb{U}_n} w = z^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$. On a

$$\sum_{w \in \mathbb{U}_n} (1+w)^n = \sum_{k=0}^{n-1} (1+z^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} z^{kl} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \sum_{k=0}^{n-1} z^{kl} = 2n,$$

d'après la première somme. Enfin, puisque pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $|z^k - 1| = 2|\sin(k\pi/n)| = 2\sin(k\pi/n)$ (en factorisant par l'angle moitié), on obtient

$$\sum_{w \in \mathbb{U}_n} |w-1| = \sum_{k=0}^{n-1} 2\sin(k\pi/n) = 2 \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/n} = 2\frac{\cos(\pi/2n)}{\sin(\pi/2n)}.$$

6 Suites et séries

6.1 Suites numériques

Exercice.
Etudier la nature des suites suivantes et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \frac{5n+(-1)^n}{2n+(-1)^{n+1}}$
2. $u_n = \frac{\ln(n+e^n)}{n}$
3. $u_n = \frac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}$

Solution. Le principe est de factoriser à chaque fois par le terme dominant.

1. On factorise au numérateur par $5n$ et au dénominateur par $2n$, on trouve que la suite converge vers $5/2$.
2. On factorise par e^n dans le ln puis on utilise le fait que $ne^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, donc la suite converge vers 1.
3. On factorise par $\sqrt{n}$ et n^2 dans le ln au numérateur et au dénominateur respectivement, on trouve que la suite converge vers $1/4$.

Exercice.
On fixe $z_0 \in \mathbb{C}$ et on considère la suite $(z_n)_n$ de nombres complexes défini par récurrence :

$$\forall n \geqslant 1,\ z_n = \frac{z_{n-1} + |z_{n-1}|}{2}.$$

Déterminer la limite de $(z_n)_n$.

Solution. On écrit z_0 sous forme exponentielle : $z_0 = re^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi]$ (on pourrait aussi écrire $z_0 = a + ib$ mais vu la forme de la relation de récurrence la première forme simplifie les calculs). Alors :

$$z_1 = \frac{1}{2}(re^{i\theta} + r) = \frac{r}{2}e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}) = r\cos(\theta/2)e^{i\theta/2},$$

donc par récurrence, on obtient

$$z_n = re^{i\theta/2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos(\theta/2^k).$$

Or, par récurrence et en utilisant la formule $\cos(a)\sin(a) = \frac{1}{2}\sin(2a)$, on a

$$\sin(\theta/2^n) \prod_{k=1}^{n} \cos(\theta/2^k) = \frac{1}{2^n}\sin(\theta).$$

On trouve donc $z_n = \frac{r\sin(\theta)}{2^n \sin(\theta/2^n)} e^{i\theta/2^n}$, donc, puisque $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\to} 0$, on obtient

$$z_n = r\frac{\sin(\theta)}{\theta}\frac{\theta/2^n}{\sin(\theta/2^n)}e^{i\theta/2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} r\frac{\sin(\theta)}{\theta}.$$

Exercice.
Montrer qu'une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est stationnaire.

Solution. Soit $(x_n)_n$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui converge vers $x \in \mathbb{R}$: pour $\varepsilon = 1/3$ il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|x_n - x| \leqslant 1/3$. Alors :

$$\forall n \geqslant N,\ |x_n - x_N| \leqslant |x_n - x| + |x_N - x| \leqslant 2/3,$$

Or $(x_n)_n$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc on en déduit : $\forall n \geqslant N,\ x_n = x_N$. La suite est bien stationnaire.

Exercice (critère de d'Alembert).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$.

1. Si $l < 1$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Si $l > 1$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
3. Que se passe-t-il si $l = 1$?

Solution.

1. On suppose que $l < 1$. Soit $\varepsilon > 0$: il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, en particulier : $u_{n+1} \leqslant (\varepsilon + l)u_n$. Par récurrence on obtient donc : pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant (\varepsilon + l)^{n-N} u_N$. On peut prendre pour commencer $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon + l < 1$ (c'est à dire $\varepsilon < 1 - l$), et dans ce cas on aura alors $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la suite est convergente vers 0.

2. On suppose que $l > 1$. Soit $\varepsilon > 0$: il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, en particulier : $u_{n+1} \geqslant (l - \varepsilon)u_n$. Par récurrence on obtient donc : pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} \geqslant (l - \varepsilon)^{n-N} u_N$. On peut prendre pour commencer $\varepsilon > 0$ tel que $l - \varepsilon > 1$ (c'est à dire $\varepsilon < l - 1$), et dans ce cas on aura alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Donc la suite diverge.

3. Si $l = 1$, on ne peut rien conclure : par exemple si $u_n = n$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, et la suite $(u_n)_n$ diverge. Et si $u_n = 1$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, et la suite $(u_n)_n$ converge (car elle est constante).

Exercice (suites de Cauchy).
Une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geqslant N,\ |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Montrer qu'une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est convergente.
3. Montrer la réciproque de la question 1.

Solution.

1. On suppose que $(u_n)_n$ converge vers $u \in \mathbb{C}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - u| \leqslant \varepsilon/2$. Alors : pour tout $n, m \geqslant N$, $|u_n - u_m| \leqslant |u_n - u| + |u - u_m| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Donc la suite est de Cauchy.

2. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente : il existe une extraction φ telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers $u \in \mathbb{C}$. Soit $\varepsilon > 0$. On a :
   - $u_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $|u_{\varphi(n)} - u| \leqslant \varepsilon/2$.
   - La suite $(u_n)_n$ est de Cauchy, donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geqslant N_2$, $|u_n - u_m| \leqslant \varepsilon/2$.

   On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \geqslant N$, on a $\varphi(n) \leqslant n \leqslant N$, donc
   $$|u_n - u| \leqslant |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - u| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

   Donc la suite $(u_n)_n$ converge.

3. Si $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy, alors montrons qu'elle est bornée : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geqslant N$, $|u_n - u_m| \leqslant 1$. On pose $M = \max\{|u_0|, ..., |u_{N-1}|, 1 + |u_N|\}$, alors on a par construction que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Donc la suite $(u_n)_n$ est bornée par M : par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet alors une sous-suite convergente. D'après la question 2, elle est donc convergente.

Rmq. C'est un exo classique sur les suites, une application de ces résultats à un théorème de point fixe sera donnée plus tard (c'est souvent plus facile de montrer qu'une suite est de Cauchy que de montrer directement sa convergence puisqu'on n'a pas besoin de connaître sa limite).

Exercice (théorème de Césaro).
Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \in \mathbb{C}$. Montrer que $\frac{S_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Solution.

1. On suppose d'abord que $a = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant \varepsilon/2$. Soit $n \geqslant N$. Alors :
$$\begin{aligned}\left|\frac{S_n}{n}\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} u_k\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\varepsilon \\ &\leqslant \frac{C_N}{n} + \varepsilon,\end{aligned}$$
où $C_N = \sum_{k=1}^{N}|u_k|$ est une constante indépendante de n. On a donc $\frac{C_N}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, $\frac{C_N}{n} \leqslant \varepsilon/2$. Ainsi, pour tout $n \geqslant \max(N, N')$, $\left|\frac{S_n}{n}\right| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Donc on a bien $\frac{S_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $a \neq 0$, alors on applique ce qui précède à la suite $(u_n - a)_n$.
2. Non : par exemple si $u_n = (-1)^n$, alors $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$, donc $\frac{S_n}{n} = 0$ si n est pair et $\frac{S_n}{n} = \frac{-1}{n}$ sinon, donc $\frac{S_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, mais la suite $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0.

Exercice.
Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection telle que la suite $\left(\frac{f(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel l. Montrer que $l = 1$.

Solution.

Exercice.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.

Solution. Il faut montrer que si x, y sont deux valeurs d'adhérence de la suite u, alors tout élément de $[x, y]$ est une valeur d'adhérence de u.

6.2 Séries numériques

Exercice.
Étudier la nature de la série de terme général u_n, avec :

1. $u_n = \frac{3^n - n^2}{5^n - 2^n}$, $n \geqslant 1$.
2. $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$, $n \geqslant 1$.
3. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 0$.

Solution.

1. On a $u_n \sim \left(\frac{3}{5}\right)^n$, et la série $\sum \left(\frac{3}{5}\right)^n$ est convergente, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs (ici, tout est bien positif), la série $\sum u_n$ est convergente.
2. La suite $(u_n)_n$ est alternée, et $(|u_n|)_n$ est une suite décroissante qui tend vers 0, donc d'après le théorème de convergence des séries alternées, la série $\sum u_n$ est convergente.
3. On a : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = e^{-\sqrt{n}\ln(2)}$, donc par croissance comparée, $n^2 u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série $\sum \frac{2}{n^2}$ est convergente (car $2 > 1$), donc d'après le théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice.
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de termes positifs convergentes. Montrer que les séries $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \max(u_n, v_n)$ convergent.

Solution. On a : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, donc $ab \leqslant \frac{(a-b)^2}{2}$. Ainsi, on en déduit $\sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{u_n + v_n}{2}$, or les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, donc la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.
On a : $\forall n \geqslant 0$, $\max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n$ car les termes des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont positifs, donc de même on en déduit que la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge.

Exercice.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

Solution.

1. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée $x \mapsto \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \geqslant 0$, donc la fonction est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n \sim \frac{u_n}{1+u_n}$ (ce qui nous amène donc à faire une distinction de cas sur si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ou pas). Dans ce cas, le théorème de comparaison de séries à termes positifs s'applique. Sinon, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente. Montrons ainsi que la série $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ est divergente. La suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \geqslant 0$, il existe $n \geqslant N$ tel que $u_n \geqslant \varepsilon$. Alors, par croissance de la fonction à la question 1, on obtient $\frac{u_n}{1+u_n} \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, donc la suite $\left(\frac{u_n}{1+u_n}\right)_n$ ne tend pas vers 0, et donc la série $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ est grossièrement divergente, donc divergente.

Exercice (critère de d'Alembert).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$.

1. Si $l < 1$, montrer que la série $\sum u_n$ converge et déterminer sa limite.
2. Si $l > 1$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
3. Que se passe-t-il si $l = 1$?

Solution. Reprendre la démonstration du critère de d'Alembert pour les suites. Si $l = 1$, on considère les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$: dans les deux cas, $l = 1$ mais la première est divergente et la deuxième convergente.

Exercice.
Si $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

1. Justifier que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge. On se propose de trouver un équivalent de la suite des sommes partielles.
2. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
3. En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque $n \to \infty$.

Solution.

1. Séries de Riemann.
2. On a :
   - $u_n - v_n = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   - $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{-2n-1+2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}}$. Or on a $-2n - 1 + 2\sqrt{n(n+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow 4n(n+1) \leqslant (2n+1)^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n \leqslant 4n^2 + 4n + 1$, ce qui est toujours vrai, donc $(u_n)_n$ est décroissante. Par un argument analogue, on montre également que $(v_n)_n$ est croissante.

   Donc les suites sont adjacentes.
3. On en déduit donc que les deux suites convergent vers la même limite l, donc
$$\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$
   d'où $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice (sommation des relations d'équivalence).
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de réels positifs. On note $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $V_n = \sum_{k=1}^n v_k$ les sommes partielles associés. On suppose que la série $\sum v_n$ diverge.

1. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$. Montrer que $U_n \underset{n\to\infty}{=} O(V_n)$.
2. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$. Montrer que $U_n = \underset{n\to\infty}{=} o(V_n)$.

Solution.

Exercice.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^\alpha}$$

Solution. Par comparaison série-intégrale, pour $\alpha \neq -1$, $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Si $\alpha > 0$, $u_n \sim \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$, donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Si $-1 < \alpha \leqslant 0$, alors $u_n \sim \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$ donc la série diverge. Si $\alpha = -1$, alors $u_n \sim \frac{1}{\ln(n)}$ donc la série diverge. Si $\alpha < -1$, alors $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.

Exercice.
Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de nombres complexes. On note $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

1. On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1} - u_n)$ converge absolument, que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n v_n$ converge.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Étudier la convergence de $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$.

Solution. On utilise la formule de transformation d'Abel :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) S_k.$$

Exercice.
Soit $\alpha > 0$. On pose pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}.$$

Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie, puis montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Solution. La suite est bien définie grâce au critère des séries alternées. Si $\alpha > 1$, alors $|u_n| \leqslant \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$, donc la série converge absolument.
Si $\alpha \leqslant 1$, alors d'après les séries alternées, u_n est du même signe que $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha}$ et donc (par la formule $|x| = \text{signe}(x)x$), $|u_n| = (-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc alternée et $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Pour appliquer le critère des séries alternées, il suffit donc de montrer que la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. On montre :

$$|u_{n+1}| - |u_n| = (-1)^n \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k,$$

où $v_k = (-1)^k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$. La série $\sum v_k$ est encore une série alternée, de terme général qui tend en valeur absolue vers 0, et

$$|v_{k+1}| - |v_k| = \frac{2}{(k+1)^\alpha} - \frac{1}{(k+2)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 0$$

par convexité de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$. Ainsi, la série $\sum v_k$ est alternée, donc son reste est du signe de son premier terme, donc de $(-1)^{n+1}$, donc $|u_{n+1}| - |u_n| \leqslant 0$ et $\sum u_n$ est alternée, donc convergente.

Exercice.
Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes telle que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n}$ converge absolument. On suppose :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^k}=0.$$

Que peut-on dire de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$?

Solution. Montrons que la suite est nulle : par l'absurde, si elle n'est pas nulle, on peut pose p le plus petit entier tel que $a_p\neq 0$. Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$0=\frac{a_p}{p^k}+\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^k},$$

avec $\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^k}=\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{p}{n}\right)^k a_n=p\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{p}{n}\right)^{k-1}\frac{a_n}{n}$, donc $\left|\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{a_n}{n^k}\right|\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$, donc $a_p=0$, d'où la contradiction.

Exercice.
Soit $\sum u_n$ une série à termes >0. On note pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$.

1. Soit $\alpha>1$. Montrer que la série $\sum\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.
2. Soit $\alpha\leqslant 1$. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge. Montrer que la série $\sum\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge. *On pourra utiliser le critère de Cauchy : si $(v_n)_n$ est une suite de réels, la série $\sum v_n$ converge si et seulement si : $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall p>q\geqslant N$, $\left|\sum_{k=q}^{p}v_k\right|\leqslant\varepsilon$.*

Solution.

1. On a $\frac{u_n}{S_n^\alpha}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^\alpha}\leqslant\int_{S_{n-1}}S_n\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, donc
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{S_k^\alpha}\leqslant\int_{S_0}^{S_n}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t,$$
donc la série est convergente.
2. La série $\sum u_n$ diverge, donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $S_n\geqslant 1$ pour tout $n\geqslant N$. On a alors pour $q>p\geqslant N$, $\sum_{k=p}^{q}\frac{u_k}{S_k^\alpha}\geqslant\sum_{k=p}^{q}\frac{u_k}{S_k}\geqslant\frac{\sum_{k=p}^{q}u_k}{S_q}=\frac{S_q-S_p}{S_q}=1-\frac{S_p}{S_q}$. Or, pour $p\geqslant N$, il existe $q>p$ tel que $S_q\geqslant 2S_p$, donc :
$$\forall p\geqslant N,\ \exists q\geqslant p,\ \sum_{k=p}^{q}\frac{u_k}{S_k^\alpha}\geqslant 1/2,$$
donc par le critère de Cauchy la série diverge.

Exercice.
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$v_n=\frac{1}{1+n^2u_n}.$$

Si la série $\sum u_n$ converge, déterminer la nature de la série $\sum v_n$. Que peut-on dire si la série $\sum u_n$ diverge ?

Solution. Montrons que la série $\sum v_n$ diverge. Si $n^2 u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $v_n \sim \frac{1}{n^2 u_n}$ et $\sqrt{u_n v_n} \sim \frac{1}{n}$ et la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ diverge. Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{u_k v_k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \sum_{k=1}^{n} v_k,$$

donc la série $\sum v_k$ diverge. Si $n^2 u_n$ ne tend pas vers $+\infty$, alors v_n ne tend pas vers 0 et donc la série est grossièrement divergente.

Exercice.
On pose pour $n \geqslant 1$, $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, puis calculer sa somme.

Solution. La série converge car $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Pour calculer la somme, on a

$$\sum_{n=1}^{2p+1} u_n = \sum_{n=1}^{p} u_{2n} + \sum_{n=0}^{p} u_{2n+1} = \sum_{n=1}^{p} \left(\log\left(\frac{2n+1}{2n}\right) - \log\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\right) - \log(2),$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2p+1} u_n = \log\left(\frac{(2p+1)!^2}{2^{4p}(p!)^4(p+1)}\right) - \log(2) = 2\log(v_p),$$

où $v_p = \dfrac{(2p+1)!}{2^{2p+1/2}(p!)^2\sqrt{p+1}}$. Par la formule de Stirling, on a $v_p \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\dfrac{2p+1}{2p}\right)^{2p+1}\dfrac{1}{e}$, donc $v_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \ln(2) - \ln(\pi)$.

6.3 Suites et topologie sur $\mathbb{R}$

Exercice.
Démontrer qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est compacte (au sens des suites) si et seulement si elle est fermée bornée.

Solution. Si A est fermée bornée : puisque A est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de $\mathbb{R}$, or A est fermée donc d'après la caractérisation par les suites, cet élément appartient à A. Donc A est compacte.

Réciproquement, on suppose que A est compacte. Soit $(u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $l \in \mathbb{R}$, et montrons que $l \in A$. Puisque A est compacte, il existe une extraction φ telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers $l' \in A$. Or on a aussi $u_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, d'où par unicité de la limite, $l = l' \in A$. Donc A est fermée. Supposons par l'absurde que A n'est pas bornée. Alors pour tout $n \geqslant 1$, il existe $u_n \in A$ tel que $|u_n| \geqslant n$. Alors toute suite extraite $(u_n)_n$ n'est pas bornée, donc n'est pas convergente, d'où la contradiction car A compacte. Donc A est bornée.

Exercice.
Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que $\overline{A}$ est égal à l'intersection des fermés de $\mathbb{R}$ contenant A. En déduire que $\overline{A}$ est le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ contenant A. En déduire que si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Solution. Montrons ainsi : $\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}, A\subset F} F$. Soit $x \in \overline{A}$: il existe $x_n \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$ contenant A. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$, donc d'après la caractérisation des fermés par les suites, on a $x \in F$. Donc $x \in \bigcap_{F \text{ fermé}, A\subset F} F$.

Réciproquement, on suppose que $x \notin \overline{A}$: il existe un ouvert O de $\mathbb{R}$ contenant x tel que $O \cap A = \varnothing$. Alors $O \cap A^\circ = \varnothing$, donc $O^C \cup \overline{A}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ contenant A et $x \notin O^C \cap \overline{A}$. Donc $x \notin \bigcap_{F \text{ fermé}, A\subset F} F$.

Exercice (caractérisation séquentielle de la densité).
Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite dense si pour tout $x < y \in \mathbb{R}$, $]x, y[\cap A \neq \varnothing$. Montrer que A est dense si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Solution. On suppose que A est dense. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\cap A \neq \varnothing$, donc il existe $x_n \in]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\cap A$. Ainsi, $(x_n)_n$ est une suite de A qui converge vers x.

Inversement, on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers x. Soit alors $x < y \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ une suite qui converge vers $\frac{x+y}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{y-x}{2}$, alors il existe N tel que $|u_N - \frac{x+y}{2}| < \varepsilon$, alors on a $u_N \in]x, y[\cap A$. Donc A est une partie dense.

Exercice (caractérisation séquentielle des fermés).
Soit F une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que F est fermée si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$, si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in \mathbb{R}$, alors $x \in F$.

Solution. On suppose que F est fermée. Soit $(x_n)_n$ une suite à valeurs dans F qui converge vers $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $x \in F$. Supposons par l'absurde que $x \notin F$. Alors en notant $O = F^C$, $x \in O$ et O est une partie ouverte, donc par définition il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O$. Or $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, donc il existe N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|x_n - x| < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, donc $x_n \in O$, donc $x_n \notin F$, d'où la contradiction. Donc $x \in F$.

Inversement, on raisonne par contraposée : on suppose que F n'est pas fermée : par définition $O = F^C$ n'est pas ouverte, donc il existe $x \in O$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on n'a pas $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O$, c'est à dire qu'il existe $y_\varepsilon \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ tel que $y_\varepsilon \notin O$, i.e $y_\varepsilon \in F$. En prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, on construit ainsi une suite $(y_n)_n$ d'éléments de F qui tend vers $x \notin O$. On a donc le résultat voulu.

Exercice (valeurs d'adhérence).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle admet une unique valeur d'adhérence.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que si $(u_n)_n$ est une suite bornée qui diverge, alors elle admet au moins deux valeurs d'adhérence. Quelle condition doit-on donc rajouter pour que la réciproque de la question 1 soit vraie ?

Solution.

1. On suppose que la suite converge vers $u \in \mathbb{C}$. Soit l une valeur d'adhérence : il existe une sous-suite de u qui converge vers l. Or la sous-suite converge aussi vers u, donc par unicité de la limite, $u = l$. Donc la suite admet une unique valeur d'adhérence.
2. Non : par exemple on considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_{2p} = 1$ et $u_{2p+1} = p$. Alors elle possède une unique valeur d'adhérence qui est 1 : en effet, si φ est une extraction, alors ou bien $\varphi(n)$ est impair pour un nombre infini d'entiers n, au quel cas la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est divergente. Ou bien $\varphi(n)$ est impair pour un nombre fini d'entiers n, auquel cas $\varphi(n)$ est pair pour tout n assez grand, donc $(u_{\varphi(n)})_n$ est stationnaire égale à 1, donc convergente. Mais la suite ne converge pas, donc la réciproque est fausse.
3. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite admet une valeur d'adhérence $l \in \mathbb{C}$. Or la suite diverge, donc ne tend pas vers l : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $|u_n - l| > \varepsilon$. On construit donc une extraction φ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)} - l| > \varepsilon$. Alors la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est bornée, donc admet une valeur d'adhérence $l' \neq l$ (car en passant à la limite, on a $|l - l'| > \varepsilon > 0$). En particulier, l' est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$, donc la suite possède bien au moins deux valeurs d'adhérence différentes. On en conclut donc que la réciproque de la question 1 est vraie si on suppose que la suite est bornée.

7 Fonctions numériques

7.1 Limites et comparaisons

Exercice.
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques vérifiant : $\exists l \in \mathbb{R},\ f(x) \underset{x\to\infty}{\to} l$.

Solution. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une telle fonction. On note T une période de f : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a alors : $\forall n \geqslant 1,\ f(x+nT) = f(x)$. Or $x + nT \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $f(x) = f(x+nT) \underset{n\to\infty}{\to} l$. Donc $f(x) = l$. Ainsi, f est constante égale à l.

Exercice (théorème de point fixe de Picard).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne avec $0 \leqslant K < 1$ (on dit alors que la fonction f est contractante). On se propose de démontrer que f admet un unique point fixe.

1. On fixe $u_0 \in \mathbb{R}$ et on considère la suite définie par récurrence par : $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer :
$$\forall l \geqslant 2,\ |u_{l+1} - u_l| \leqslant K^l |f(u_1) - f(u_0)|.$$
En déduire que la suite de nombres réels $(u_n)_n$ est de Cauchy.
2. En déduire que f admet un unique point fixe.
3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe p tel que g^p (la p-composée de g) est contractante. Montrer que g admet un unique point fixe.

Solution.

1. On commence par remarquer que, par récurrence :
$$\forall l \geqslant 2,\ |u_{l+1} - u_l| = |f(u_l) - f(u_{l-1})| \leqslant K|u_l - u_{l-1}| \leqslant K^l |f(u_1) - f(u_0)|.$$
Soient $n > m \in \mathbb{N}$. On calcule :
$$|u_n - u_m| = \left|\sum_{l=m}^{n-1} (u_{l+1} - u_l)\right| \leqslant \sum_{l=m}^{n-1} |u_{l+1} - u_l| \leqslant \sum_{l=m}^{n-1} K^l |f(u_1) - f(u_0)| = \frac{K^m - K^n}{1-K} |f(u_1) - f(u_0)|,$$
Or $\frac{K^m - K^n}{1-K} \leqslant \frac{K^m}{1-K} \underset{m\to\infty}{\to} 0$, donc la suite est bien de Cauchy.
2. La suite $(u_n)_n$ est donc convergente : on note a sa limite. Alors, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et par continuité de f, on obtient $f(a) = a$, donc f admet un point fixe. En outre, si par l'absurde $b \neq a$ est un autre point fixe de f, alors $|a-b| = |f(a) - f(b)| \leqslant K|a-b| < |a-b|$, d'où la contradiction. Donc f admet un unique point fixe.
3. On applique ce qui précède à g^p : il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $g^p(a) = a$. Ainsi : $g^p(g(a)) = g(g^p(a)) = g(a)$, donc $g(a)$ est aussi un point fixe de g^p, donc par unicité, on a $g(a) = a$. En outre, si x est un point fixe de g, alors x est aussi un point fixe de g^p, donc on a unicité : g admet un unique point fixe.

7.2 Fonctions continues et uniformément continues

Exercice.
Soient A une partie de $\mathbb{R}$, $a \in A$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que f est continue au point a si et seulement si pour toute suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, on a $f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

Solution. On suppose que f est continue au point a. Soit $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Soit $\varepsilon > 0$: par continuité de f en a, il existe δ tel que pour tout $x \in A$, si $|x-a| \leqslant \delta$, alors $|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$. Puisque $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|a_n - a| \leqslant \delta$, et ainsi :

$$\forall n \geqslant N,\, |f(a_n) - f(a)| \leqslant \varepsilon,$$

donc $f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

Réciproquement, on raisonne par contraposée : on suppose que f n'est pas continue au point a : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in A$ tel que $|x-a| \leqslant \delta$ et $|f(x)-f(a)| > \varepsilon$. Ainsi : pour tout $n \geqslant 1$, il existe $a_n \in A$ tel que $|a_n - a| \leqslant \frac{1}{n}$ et $|f(a_n) - f(a)| > \varepsilon$. La suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ est donc une suite convergeante vers a, mais $(f(a_n))_n$ ne tend pas vers $f(a)$.

Exercice.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer f.
2. On suppose que f est croissante sur $\mathbb{R}$. Déterminer f.

Solution. D'après l'hypothèse, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$. Ainsi : $\forall n, m \in N^*$, $f(n) = f\left(m\frac{n}{m}\right) = mf\left(\frac{n}{m}\right)$, donc $f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{f(n)}{m} = \frac{n}{m}f(1)$. On en déduit : $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = xf(1)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$: par densité de $\mathbb{Q}$, il existe $(x_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Par continuité de f, on a alors $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Or $f(x_n) = x_n f(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} xf(1)$, donc par unicité de la limite, $f(x) = x$. Ainsi, f est de la forme $f(x) = xf(1)$, et réciproquement toute fonction de cette forme convient.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$, il existe $(x_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ des suites qui convergent vers x telles que $\forall n$, $x_n \leqslant x \leqslant y_n$. Par croissance de f, on a alors : $\forall n$, $f(x_n) \leqslant f(x) \leqslant f(y_n)$, or $f(x_n) = x_n f(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} xf(1)$ et $f(y_n) = y_n f(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} xf(1)$, donc d'après le théorème des gendarmes, on a $f(x) = xf(1)$.

Exercice.
Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2}$.

Solution. En appliquant la formule avec $x/2$, on voit que $f(x/2) - f(x/4) = x/4$. On montre par récurrence que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant 1$, $f(x) - f(\frac{x}{2^n}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k}$ (formule sympa car on pourra exploiter la continuité de f en faisant tendre n vers l'infini). Ainsi : $f(x) - f(x/2^n) = x\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Or $\frac{x}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par continuité de f, on a $f(\frac{x}{2^n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0)$, d'où par unicité de la limite, on obtient $f(x) - f(0) = x$. Donc f est de la forme $f(x) = x + f(0)$. Réciproquement, toute fonction de cette forme vérifie la relation de l'énoncé.

Exercice.
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. Soient $x > 0$, et $(x_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers x. On suppose que $\forall n$, $x_n \leqslant x$. Alors, par croissance de f, on a $f(x_n) \leqslant f(x)$. D'autre part, par décroissance de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, on a $f(x_n) = x_n \frac{f(x_n)}{x_n} \geqslant x_n \frac{f(x)}{x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, donc d'après le théorèmes des gendarmes, on a $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Si : $\forall n$, $x_n \geqslant x$, alors on obtient le même résultat par un raisonnement analogue. Sinon, on peut extraire deux suites (y_n) et (z_n) avec $y_n \leqslant x$ et $z_n \geqslant x$, alors d'après ce qui précède, on a $f(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ et $f(z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, donc $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Donc, d'après la caractérisation de la continuité par les suites, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique non constante. On se propose de démontrer que f admet une plus petite période, c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$ tel que f est T-périodique, et pour tout $t < T$, f n'est pas t-périodique. On considère l'ensemble des périodes de f : $A = \{t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+t) = f(x)\}$.

1. Justifier que A admet une borne inférieure. On la note T dans la suite.
2. Montrer que $T > 0$. Conclure.

Solution.

1. f est périodique, donc A est non vide, et A est minorée (par 0), donc A admet bien une borne inférieure.
2. On suppose par l'absurde que $T = 0$. On va montrer que dans ce cas, f est constante, ce qui serait contradictoire. Il existe une suite $(t_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour tout n, $t_n > 0$. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$. Montrons : $\forall \varepsilon > 0$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. La fonction f est continue, donc est continue au point y : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{R}$, si $|z - y| \leqslant \delta$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Or $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe N tel que $t_N \leqslant \delta$. Or, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x + kt_N \leqslant y < x + (k+1)t_N$, donc $|(x + kt_N) - y| \leqslant t_N \leqslant \delta$, donc $|f(x + kt_N) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Or $t_N \in A$, donc f est t_N-périodique, donc on en déduit $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $f(x) = f(y)$ et f est constante, d'où la contradiction. Pour conclure, il reste juste à montrer que $T \in A$: en effet, il existe $(t_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$. Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + t_n) = f(x)$, on en déduit par continuité de f que $T \in A$.

Exercice.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour toutes suites $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, si $x_n - y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $f(x_n) - f(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Solution. C'est une caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité, la preuve étant très similaire à la caractérisation séquentielle de la continuité.

1. On suppose que f est uniformément continue : soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites telles que $x_n - y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $\varepsilon > 0$: il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Or $x_n - y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|x_n - y_n| \leqslant \delta$, et alors $|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant \varepsilon$, donc $f(x_n) - f(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Réciproquement, on suppose que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$: il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, il existe x_n, $y_n \in \mathbb{R}$ tel que $|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n}$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. On a donc construit deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ telles que $x_n - y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $f(x_n) - f(y_n)$ ne tend pas vers 0.
2. On pose $x_n = \sqrt{n\pi}$ et $y_n = \sqrt{n\pi + \pi/2}$: alors on montre que $x_n - y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $\sin(x_n^2) - \sin(y_n^2) = 1$ qui ne tend pas vers 0, donc la fonction g n'est pas uniformément continue.

Exercice.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet une limite finie en b. Montrer que f est uniformément continue sur $[a, b[$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Si $b \in \mathbb{R}$, alors f se prolonge en une fonction continue sur $[a, b]$ donc par le théorème de Heine, f est uniformément continue. On suppose $b = +\infty$. On note l la limite finie : $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} l$. Soit $\varepsilon > 0$: il existe $A > 0$ tel que $\forall x \in [a, +\infty[,\ |x| \geqslant A \implies |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$. La fonction f est continue sur $[a, A+1]$ donc est uniformément continue : il existe $\delta' > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, A+1]$, $|x - y| \leqslant \delta' \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon/2$. On pose $\delta = \min(\delta', 1)$. Soit $x, y \in [a, \infty[$ tel que $|x - y| \leqslant \delta$. Montrons que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
   - Si $x \in [a, A]$ ou $y \in [a, A]$, alors puisque $|x - y| \leqslant \delta \leqslant 1$, on a $x, y \in [0, A+1]$, et alors on a $|x - y| \leqslant \delta \leqslant \delta'$, donc $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
   - Si $x, y \in [A, \infty[$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - l| + |f(y) - l| \leqslant \varepsilon$.

   Donc f est uniformément continue sur $[a, \infty[$.
2. On utilise la question 1.

7.3 Suites de fonctions

Exercice.
Pour tout $n \geqslant 0$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $[a, \infty[$ avec $a > 0$.

Solution. On commence par montrer que la suite de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle. Ainsi, s'il y a convergence uniforme, c'est forcément vers la fonction nulle et donc $\|f_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On commence sur $\mathbb{R}_+$: il y a un problème en 0, en effet pour tout $n \geqslant 1$, on a $f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = e^{-\pi/2}$, donc $\|f_n\|_\infty \geqslant e^{-\pi/2} > 0$. Donc il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Par contre, si $a > 0$, alors on a : $\forall x \geqslant a,\ |f_n(x)| \leqslant e^{-na}$, donc $\|f_n\|_\infty \leqslant e^{-na} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il y a convergence uniforme sur $[a, \infty[$.

Exercice.
Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $K > 0$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions K-lipschitziennes de $[a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Solution. On commence par montrer que f est K-lipschitzienne : soit $x, y \in [a, b]$. On a : $\forall n \geqslant 0$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant K|x - y|$, donc en faisant tendre n vers l'infini on en déduit que f est K-lipschitzienne. Soit $\varepsilon > 0$. On fixe une subdivision $a = a_1, ..., a_p = b$ de $[a, b]$ de pas $< \frac{\varepsilon}{K}$. Pour tout $k \in \{1, ..., p\}$, on a $f_n(x_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, donc il existe N_k tel que pour tout $n \geqslant N_k$, $|f_n(x_k) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. On pose $N = \max(N_1, ..., N_p)$. Soit $n \geqslant N$. Soit $x \in [a, b]$: il existe k tel que $x \in [a_k, a_{k+1}[$, ainsi :

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leqslant |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\
&\leqslant L|x - x_k| + \varepsilon + K|x - x_k| \\
&= 2K|x - x_k| + \varepsilon \\
&\leqslant 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

donc on en déduit $\|f_n - f\|_\infty \leqslant 3\varepsilon$, donc la convergence est bien uniforme.

Exercice (un théorème de Dini).
Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction f continue sur $[a, b]$. On souhaite démontrer que la convergence est en fait uniforme. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \geqslant 0$, on pose

$$K_{n,\varepsilon} = \{\, x \in [a, b],\ f(x) - f_n(x) > \varepsilon\}.$$

1. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geqslant 0$ tel que $K_{n,\varepsilon}$ est vide. Montrer alors que la convergence de $(f_n)_n$ est uniforme.
2. Conclure.

Solution.

1. On remarque que par croissance de la suite de fonctions, on a $|f(x) - f_n(x)| = f(x) - f_n(x)$ et $K_{n+1,\varepsilon} \subset K_{n,\varepsilon}$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $K_{n,\varepsilon}$ est vide, c'est à dire $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Donc on a convergence uniforme.

2. Si par l'absurde la convergence n'est pas uniforme, alors par contraposée de la question précédente, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $K_{n,\varepsilon}$ n'est pas vide : il existe $x_n \in K_{n,\varepsilon}$. On a une suite de $[a, b]$ compact, donc il existe une sous-suite convergente : $x_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in [a, b]$. Par continuité de f, on a $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(l)$ et de même, si $p \in \mathbb{N}$, on a $f_p(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(l)$. Ainsi, pour n assez grand (de sorte que $\varphi(n) > p$),
$$f(x_{\varphi(n)}) - f_p(x_{\varphi(n)}) \geqslant f(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) > \varepsilon,$$
donc en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $0 > \varepsilon$, d'où la contradiction.

7.4 Fonctions dérivables

Exercice.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(x)| \leqslant |P(x)|$. Montrer que la fonction f est nulle.

Solution. P est de degré impair donc possède au moins une racine. Quitte à translater on peut supposer que $P(0) = 0$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}_+$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est de classe C^n sur $[0, x]$, dérivable $n+1$ fois sur $]0, x[$, donc d'après la formule de Taylor-Lagrange il existe $c_n \in]0, x[$ tel que $f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_n)$. Or : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n+1)}(c_n)| \leqslant |P(c_n)| \leqslant \sup\limits_{t\in[0,x]} |P(t)| < \infty$, donc on en déduit en faisant tendre n vers l'infini que $f(x) = 0$. On applique le même raisonnement si $x \in \mathbb{R}_-$. Donc f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, \infty[$ telle que $f(0) = 0$. On suppose que $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0, \infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Solution. Si f est nulle, OK. Sinon, quitte à considérer $-f$, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) > 0$. On a $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par continuité de f, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) = f(a)$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle sur $]a, b[$, on en déduit le résultat.

Exercice.
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe $0 < x_1 < ... < x_n < 1$ tels que $f'(x_1) + ... + f'(x_n) = n$.

Solution. On applique la formule des accroissements finis entre i/n et $(i + 1)/n$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n - 1$.

Exercice.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) = (1 - x^2)^n$ et $f(x) = 0$ sinon. Déterminer la classe de f.

Solution. On voit que pour tout $k < n$, f est de classe C^k sur $]-1,1[$, et $f^{(k)}(x) \underset{x\to\pm1}{\longrightarrow} 0$, donc $f^{(k)}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$. Par contre, on peut montrer par récurrence sur $k \leqslant n$ que $f^{(k)}$ est de la forme $f^{(k)}(x) = (2x)^k n(n-1)...(n-k+1)(1-x^2)^{n-k} + P_k(x)(1-x^2)n-k+1$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme. Ainsi, on a $f^{(n)}(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque $x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm1$, donc f n'est pas de classe C^n.

Exercice.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que les fonctions f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. Pour toute fonction bornée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note $\|g\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$.

1. Montrer que la fonction f' est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Donner une majoration de $\|f'\|_\infty$ en fonction seulement de $\|f\|_\infty$ et $\|f''\|_\infty$.

Solution.

1. On veut une inégalité faisant intervenir f, f' et f'' : on pense à l'inégalité de Taylor-Lagrange. Soit $x \in \mathbb{R}$: pour tout $h > 0$, en appliquant la formule entre x et $x+h$, on obtient : $|f(x+h)-f(x)-hf'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}\|f''\|_\infty$, ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \frac{h}{2}\|f''\|_\infty + \frac{1}{h}|f(x+h) - f(x)| \leqslant \frac{h}{2}\|f''\|_\infty + \frac{2\|f\|_\infty}{h},$$
donc f' est bien bornée.
2. D'après ce qui précède, on a $\|f'\|_\infty \leqslant \frac{h}{2}\|f''\|_\infty + \frac{2\|f\|_\infty}{h}$ pour tout $h > 0$. On cherche la meilleure majoration possible : on fait une étude de la fonction $h \mapsto \frac{h}{2}\|f''\|_\infty + \frac{2\|f\|_\infty}{h}$: la fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et admet un minimum en $h = 2\sqrt{\frac{\|f\|_\infty}{\|f''\|_\infty}}$, donc en en déduit $\|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{\|f\|_\infty\|f''\|_\infty}$.

7.5 Fonctions convexes

Exercice.
Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer :
$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Solution. Pour la première inégalité, on utilise le fait que f est au-dessus de sa tangente en $\frac{a+b}{2}$, puis on intègre entre a et b. Pour la deuxième, on remarque que f est en-dessous de sa corde entre a et b, puis on intègre.

Exercice.

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Démontrer l'inégalité de Jensen : pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $x_1, ..., x_n \in I$ et pour tout $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, on a
$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$
2. Montrer que pour tout $x_1, ..., x_n > 0$, $1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}$.
3. Montrer que pour tout $a_1, ..., a_n > 0$ et $b_1, ..., b_n > 0$, on a
$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{1/n}.$$

Solution.

1. On raisonne par récurrence : le cas $n = 1$ et $n = 2$ est immédiat par définition d'une fonction convexe. On suppose la propriété vraie au rang n : soient $x_1, ..., x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1} \in [0,1]$ tels que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$. Alors : $f(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k) = f(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k + \widetilde{\lambda_n}\widetilde{x_n})$ où $\widetilde{\lambda_n} = \lambda_n + \lambda_{n+1}$ et $\widetilde{x_n} = \frac{\lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}$. Par hypothèse de récurrence puisque $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k + \widetilde{\lambda_n} = 1$, on obtient $f(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k) + \widetilde{\lambda_n} f(\widetilde{x_n}) \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$.
2. La fonction $f : x \mapsto \log(1 + e^x)$ est convexe (sa dérivée seconde est positive) donc si $x_1, ..., x_n > 0$, il existe $a_1, ..., a_n$ tels que $x_k = e^{ak}$. En appliquant l'inégalité de Jensen avec les a_i et la fonction f on obtient l'inégalité voulue.
3. On remarque que $\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} \left(1 + \left(\prod_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n}\right)$ puis on applique la question 2.

Exercice.
Soient $p, q \geqslant 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soient $x, y > 0$. Montrer que $xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
2. Soient $a_1, ..., a_n > 0$ et $b_1, ..., b_n > 0$. Montrer : $\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}$ (inégalité de Hölder). *Indication :* on pourra commencer par le cas $\sum_{k=1}^n a_k^p = \sum_{k=1}^n b_k^q = 1$.
3. On suppose que $p > 1$. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}$ (inégalité de Minkowski).

Solution.

1. On utilise la concavité de la fonction log.
2. On suppose d'abord que $\sum_{k=1}^n a_k^p = \sum_{k=1}^n b_k^q = 1$. Alors d'après la question 1 : $\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n a_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n b_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, donc c'est OK. Dans le cas général, on pose $\widetilde{a_k} = \frac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}}$ de sorte que $\sum_{k=1}^n \widetilde{a_k}^p = 1$. On pose de même $\widetilde{b_k} = \frac{b_k}{\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}}$, alors on a $\sum_{k=1}^n \widetilde{a_k}\widetilde{b_k} \leqslant 1$, d'où l'inégalité voulue.
3. On écrit : $(a_k + b_k)^p = (a_k + b_k)(a_k + b_k)^{p-1}$, on obtient alors $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1} +$

$\sum_{k=1}^n b_k(a_k+b_k)^{p-1}$ donc d'après la question 2,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^p &\leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{1/q}+\left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{1/q}\\ &=\left(\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

D'où en divisant par $\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$ l'inégalité voulue.

8 Algèbre linéaire

8.1 Applications linéaires

Exercice.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer : Ker(u)= Ker(u^2) si et seulement si Ker(u)$\cap$ Im(u) = $\{0\}$.

2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E \Leftrightarrow \text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u) \Leftrightarrow \text{Im}(u^2) = \text{Im}(u)$.

3. On considère u l'application sur $\mathbb{R}[X]$ définie par $u(P) = P'$. Justifier que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ et calculer Im(u), Im(u^2), Ker(u) et Ker(u^2).

Solution.

1. On suppose que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$. Soit $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$: il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$, et $u(x) = 0$. Ainsi, $u^2(y) = 0$, donc $y \in \text{Ker}(u^2)$, donc $y \in \text{Ker}(u)$, d'où $x = 0$. Donc $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$.

   Réciproquement, on suppose que $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$. Si $x \in \text{Ker}(u)$, alors $u^2(x) = u(0) = 0$, donc $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$. Inversement, soit $x \in \text{Ker}(u^2)$: $u(u(x)) = 0$, donc $u(x) \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$, donc on en déduit que $x \in \text{Ker}(u)$.

2. D'après le théorème du rang, Ker(u)$\cap$ Im(u) = $\{0\}$ si et seulement si $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$, donc on obtient la première équivalence d'après la question 1. Ensuite, si $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$, alors $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2)$ donc d'après le théorème du rang, Ker(u) et Ker(u^2) ont la même dimension, or on a $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$, donc on a égalité, et réciproquement par les mêmes argments, si $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$ alors $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$, d'où l'équivalence des trois assertions.

Exercice.
Soient E un K-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.

Solution. Par hypothèse, pour tout $x \in E$ il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. Il suffit donc de montrer que pour tout $x, y \in E$ non nuls, $\lambda_x = \lambda_y$. Soient $x, y \in E$ non nuls.

1. Si x, y sont liés : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$. Ainsi : $\lambda_x x = u(x) = \lambda u(y) = \lambda\lambda_y y = \lambda_y x$. Or $x \neq 0$, donc on en déduit $\lambda_x = \lambda_y$.

2. Si x, y sont libres : on a $\lambda_{x+y}(x + y) = u(x + y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$, d'où l'on déduit puisque la famille (x, y) est libre : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$.

Exercice.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$ si et seulement si n est pair.

Solution. On suppose qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$. Alors par le théorème du rang, on a $n = \text{dimKer}(u) + \text{dimIm}(u) = 2\text{dimKer}(u)$, donc n est pair. Réciproquement, on suppose que $n = 2p$ est pair. Soit $(e_1, ..., e_{2p})$ une base de E. On définit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $i \in \{0, ..., p-1\}$, $u(e_{2i+1}) = e_{2i+2}$ et $u(e_{2i+2}) = 0$. Alors on voit que $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(e_2, e_4, ..., e_{2p})$: l'inclusion réciproque est évidente et si $x \in \text{Ker}(u)$, alors en écrivant $x = \sum_{k=1}^{2p} x_k e_k$, on obtient $0 = \sum_{k=0}^{p-1} x_{2k+1} e_{2k+1}$ donc puisque la famille $(e_1, e_3, ..., e_{2p-1})$ est libre, on en déduit que $x_{2k+1} = 0$ et donc $x \in \text{Vect}(e_2, e_4, ..., e_{2p})$. En outre, $\text{Im}(u) \subset \text{Vect}(e_2, e_4, ..., e_{2p})$ donc par un argument de dimension en en déduit que $\text{Im}(u) = \text{Vect}(e_2, e_4, ..., e_{2p}) = \text{Ker}(u)$.

Exercice.
Soient $E_0, ..., E_n$ des espaces vectoriels de dimensions finies respectives $a_0, ..., a_n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe des applications $f_0, ..., f_{n-1}$ telles que :

1. Pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$, $f_k \in \mathcal{L}(E_k, E_{k+1})$.
2. f_0 est injective et f_{n-1} est surjective.
3. Pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$, $\mathrm{Ker}(f_k) = \mathrm{Im}(f_{k-1})$.

Calculer $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

Solution. D'après le théorème du rang, on a : pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$, $a_k = \mathrm{rg}(f_k) + \mathrm{dimKer}(f_k) = \mathrm{rg}(f_k) + \mathrm{rg}(f_{k-1})$ d'après l'hypothèse 3. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k &= a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\mathrm{rg}(f_k) + \mathrm{rg}(f_{k-1})) + (-1)^n a_n \\ &= a_0 - \mathrm{rg}(f_1) - \mathrm{rg}(f_0) + \mathrm{rg}(f_2) + \mathrm{rg}(f_1) + ... + (-1)^{n-1}(\mathrm{rg}(f_{n-1}) - \mathrm{rg}(f_{n-2})) + a_n \\ &= a_0 - \mathrm{rg}(f_0) + (-1)^{n-1}\mathrm{rg}(f_{n-1}) + (-1)^n a_n\end{aligned}$$

Or d'après l'hypothèse 2, f_0 est injective donc $\mathrm{rg}(f_0) = a_0$ et f_{n-1} est surjective, donc $\mathrm{rg}(f_{n-1}) = a_n$, d'où $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = 0$.

Exercice.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n, c'est à dire que $u^n = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que $\beta = (x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base de E.
2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u. En écrivant $v(x)$ dans la base β, montrer que $v \in \mathrm{Vect}(id_E, u, ..., u^{n-1})$.
3. En déduire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u.

Solution.

1. Montrons que la famille est libre : soit $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Alors en appliquant u^{n-1}, on obtient (puisque $u^n = 0$), $\lambda_0 u^{n-1}(x) = 0$, or $u^{n-1}(x) \neq 0$, donc $\lambda_0 = 0$. En réitérant, on obtient $\lambda_k = 0$ pour tout k, donc la famille est libre. Puisque c'est une famille de $n = \mathrm{dim}E$ éléments, on en déduit que c'est une base.
2. On a $v(x) \in E = \mathrm{Vect}(x, ..., u^{n-1}(x))$, donc il existe $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que $v(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x)$. Montrons que $v = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k$. Pour montrer que deux endomorphismes sont égaux, il suffit de montrer qu'ils sont égaux sur une base de E : on regarde la base β. En effet, pour tout $l \in \{0, ..., n-1\}$, on a, puisque u et v commutent,
$$v(u^l(x)) = u^l(v(x)) = u^l(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(u^l(x)),$$
donc en en déduit bien $v = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k$, d'où le résultat voulu.
3. Il suffit de montrer la réciproque de la question précédente qui est immédiate.

Exercice.
Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E. Montrer que u et p commutent si et seulement si $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par u.

Solution. On suppose que u et p commutent. Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$ et montrons que $u(y) \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$, ainsi $u(y) = u(p(x)) = p(u(y)) \in \mathrm{Im}(p)$. D'autre part, si $y \in \mathrm{Ker}(p)$, alors $p(u(y)) = u(p(y)) = 0$, donc $u(y) \in \mathrm{Ker}(p)$. Donc $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont bien stables par u.

Réciproquement, on suppose que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par u. Soit $x \in E$ et montrons que $u(p(x)) = p(u(x))$. Si $x \in E$, on peut écrire $x = x - p(x) + p(x)$, avec $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$. Ainsi, on obtient $u(x) = u(x - p(x)) + u(p(x))$ avec $u(x - p(x)) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $u(p(x)) \in \mathrm{Im}(p)$ car on a supposé $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ stables par u. Or on a aussi $u(x) = u(x) - p(u(x)) + p(u(x))$ une autre décomposition sur $E = \mathrm{Im}(p) \bigoplus \mathrm{Ker}(p)$, et p est une projection donc par unicité on en déduit $p(u(x)) = u(p(x))$.

8.2 Matrices

Exercice.
Soit $n \geqslant 1$. Déterminer le centre de $M_n(\mathbb{R})$ (i.e. l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $AM = MA$).

Solution. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ qui commute avec tous les éléments de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $i, j \in \{1, ..., n\}$. Alors, en particulier, en notant $E_{i,j}$ l'élément de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 0 sauf en position (i, j) où il y a un 1, on a $AE_{i,j} = E_{i,j}A$, donc en identifiant les coefficients on obtient $a_{k,i} = 0$ pour $k \neq i$ et $a_{j,k} = 0$ pour $k \neq j$, et $a_{i,i} = a_{j,j}$. Ainsi, $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Réciproquement, toute matrice de cette forme est dans le centre de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice.

1. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \geqslant 2$.

Solution.

1. Par division euclidienne, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + R(X)$. R étant de degré au plus 1, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R(X) = aX + b$. On remarque que les racines du polynôme $X^2 - 3X + 2$ sont 1 et 2. En évaluant l'égalité $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + R(X)$ en 1, on obtient $1 = a + b$ et en évaluant en 2, on obtient $2^n = 2a + b$. On en déduit alors $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$. D'où $R(X) = (2^n - 1)X - 2^n$.
2. On remarque que $A^2 - 2A + 2 = 0$, donc on obtient $A^n = R(A) = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$.

Exercice (lemme de Hadamard). Soit $n \geqslant 1$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que la matrice A est inversible.

Solution. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Montrons que $X = 0$. On a : $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $0 = (AX)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$, où $x_1, ..., x_n$ sont les coordonnées de X,. Supposons par l'absurde $X \neq 0$, et posons $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que $\forall j \in \{1, ..., n\}$, $|x_j| \leqslant |x_{i_0}|$. Puisque $X \neq 0$, on a $|x_{i_0}| \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}|a_{i_0,i_0}x_{i_0}| = \left|\sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} a_{i_0,j}x_j\right| &\leqslant \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} |a_{i_0,j}||x_j| \\ &\leqslant |x_{i_0}| \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} |a_{i_0,j}| < |a_{i_0,i_0}||x_{i_0}|,\end{aligned}$$

d'où la contradiction. Donc $X = 0$, et A est inversible.

Exercice. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et $\dim(\mathrm{Ker} f)$.
2. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution.

1. D'après le théorème du rang, on a $3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - \mathrm{rg}(f)$. On a $f \neq 0$, donc $\mathrm{rg}(f) \neq 0$, et $f^2 = 0$, donc $\mathrm{rg}(f) \neq 3$, on a donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \in \{1, 2\}$. En outre, puisque $f^2 = 0$, on a $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et il n'y a pas égalité (car 3 est impair), donc $\mathrm{rg}(f) < \dim(\mathrm{Ker}(f))$, donc on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ et $\mathrm{rg}(f) = 1$.
2. Puisque $\mathrm{rg}(f) = 1 > 0$, il existe $x \in \mathrm{Im}(f)$ avec $x \neq 0$: il existe $z \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(z) = x$. On a aussi $x \in \mathrm{Ker}(f)$, donc on peut compléter (x) en une base (x, y) de $\mathrm{Ker}(f)$. Montrons que (x, y, z) est une base de $\mathbb{R}^3$: soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ax + by + cz = 0$. Alors, en appliquant f, on a $cu(z) = 0$, avec $u(z) = x \neq 0$, donc $c = 0$. Puisque (x, y) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, on obtient alors $a = b = 0$. Donc (x, y, z) est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de f dans cette base est de la forme voulue.

Exercice.

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.
2. Soit $n \geqslant 1$ et $M \in M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice ayant des 0 sur la diagonale.

Solution.

1. Voir l'exercice dans la section 8.1.
2. On montre la propriété par récurrence sur $n \geqslant 1$. Pour $n = 1$ c'est évident. On suppose la propriété établie aux rang $n - 1$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. On note $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire associée.
   - Si u est une homothétie (i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$), alors on obtient $A = 0$ donc la propriété est vraie.
   - On suppose que u n'est pas une homothétie. Par contraposée de la question précédente, il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que la famille $(x, u(x))$ est libre. On peut donc la compléter en une base $(x, u(x), e_3, ..., e_n)$ de $\mathbb{K}^n$, et la matrice de u dans cette base est de la forme $A' = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \end{array}\right)$, donc A est semblable à A'. Puisque $\mathrm{Tr}(A) = 0$, on en déduit $\mathrm{Tr}(B) = 0$, donc par hypothèse de récurrence il existe

$Q \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que $Q^{-1}BQ$ a des 0 sur la diagonale. Alors, en notant $P = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & Q & \\ \vdots & & & \end{array}\right)$, on vérifie que $PA'P^{-1}$ a des 0 sur la diagonale, d'où la propriété au rang n.

Exercice.
Soit $n \geqslant 1$.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ définie par : $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} (on pourra reconnaître la matrice dans la base canonique d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$).
2. On dit qu'une permutation $\sigma \in S_n$ est un dérangement si elle n'a pas de point fixe. On note d_n le nombre de dérangements de S_n. Montrer que $n! = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} d_k$. En déduire une expression de d_n.

Solution.

1. On vérifie que A est la matrice dans la base canonique de l'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $u(P) = P(X+1)$. L'application u est inversible, d'inverse $P \mapsto P(X-1)$, donc A l'est, et A^{-1} est la matrice dans la base canonique de $P \mapsto P(X-1)$.
2. On a $S_n = \coprod_{k=0}^{n-1} A_k$ où A_k est l'ensemble des permutations ayant exactement k points fixes, donc $n! = \sum_{k=0}^{n-1} |A_k|$, avec $|A_k| = \binom{n}{k} d_{n-k}$ (en effet, on choisit les k points fixes, et ensuite on effectue une permutation sans points fixes des $n-k$ éléments restants), d'où la formule demandée. On en déduit que $A.(d_1, ..., d_n) = (1, ..., n!)$, et donc $(d_1, ..., d_n) = A^{-1}.(1, ..., n!)$, soit $d_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Exercice.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice M est inversible ou nulle si et seulement si pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\text{rg}(AM) = \text{rg}(MA)$.

Solution. Indication : soit $r \in [\![0, n]\!]$ tel que : $\forall B \in M_n(\mathbb{R})$, $\text{rg}(BJ_r) = \text{rg}(J_rB)$. Montrer que $1 \leqslant r \leqslant n-1$.

Exercice.
Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ et $D = \text{diag}(a_1, ..., a_n)$. On pose $\varphi : M_n(K) \to M_n(K)$ définie par $\varphi(M) = DM - MD$.

1. Déterminer le noyau et l'image de φ.
2. Préciser ces espaces lorsque les a_i sont deux à deux distincts.

Solution.

Exercice.
Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^p = I_n$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $B = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

1. Calculer AB.
2. Vérifier que $B^2 = B$.
3. Montrer que $\text{Im}(B) = \text{Ker}(A - I_n)$ et en déduire que $\text{dimKer}(A - I_n) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \text{Tr}(A^k)$.

Solution.

1. On a $AB = B$.
2. On montre par récurrence que $A^k B = B$, puis on a alors $B^2 = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k B = B$.
3. Si $Y \in \mathrm{Im}(B)$, $Y = BX$ donc $AY - Y = ABX - BX = 0$. Si $Y \in \mathrm{Ker}(A - I_n)$, alors on a $BY = Y$ donc $Y \in \mathrm{Im}(B)$, donc $\dim\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{rg}(B) = \mathrm{Tr}B$ car B est un projecteur.

9 Polynômes, fractions rationnelles

9.1 Polynômes

Exercice.
Soit $n \geqslant 1$ et $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. Les racines de P_n sont-elles simples ?
2. Déterminer le nombre de racines réelles de P_n.

Solution.

1. On remarque que $P_n' = P_{n-1}$. Soit a une racine de P_n, on suppose par l'absurde que a est aussi racine de P_n', alors a est racine de P_{n-1}, donc on en déduit $\frac{a^n}{n!} = 0$, donc $a = 0$, or $P_n(0) = 1$, d'où la contradiction. Donc les racines sont simples.
2. On montre par récurrence que si n est pair, alors P_n n'a pas de racines réelles, et si n est impair, P_n a une unique racine.

Exercice.

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n. Soit $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p \wedge q = 1$. Montrer que α est racine de P si et seulement si $p|a_0$ et $q|a_n$.
2. Le polynôme $X^5 - X^2 + 1$ admet-il des racines dans $\mathbb{Q}$?

Solution.

Exercice.
Soient $n \geqslant 1$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n, que l'on note $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On pose $R = \max(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$.

1. Montrer que toutes les racines complexes de P sont de module inférieur ou égal à R.
2. Soient $P = nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ et z une racine de P différente de 1. Montrer que $|z| < 1$.

Solution.

1. Soit z une racine complexe de P. Si $|z| \leqslant 1$, c'est gagné. Sinon, montrons que $|z| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. On a $P(z) = 0$, donc $z^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, donc $|z|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k \leqslant |z|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$ car $|z| \geqslant 1$. D'où $|z| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$ et donc $|z| \leqslant R$.
2. On applique la question 1.

Exercice.
Soit $n \geqslant 1$. On note A_n l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaires de degré n tel que toutes les racines complexes de P sont de module inférieur ou égal à 1. Montrer que A_n est fini.

Solution. Soit $P \in A_n$ que l'on note $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On note $z_1, ..., z_n$ les racines de P. Alors, d'après les relations coefficients-racines, on a : $\forall k \in \{0, ..., n-1\}$, $a_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n} z_{i_1} ... z_{i_k}$, d'où :

$$|a_k| \leqslant \binom{n}{k}.$$

Or P est à coefficients entiers, donc a_k ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Donc A_n est fini.

Exercice.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geqslant 1$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|Im(z)|^n \leqslant |P(z)|$.

Solution. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$: $P = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$ où $x_k \in \mathbb{R}$. Ainsi : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| = \prod_{k=1}^{n}|z - x_k|$, avec $|z - x_k| = \sqrt{Re(z - x_k)^2 + Im(z - x_k)^2} = \sqrt{Re(z - x_k)^2 + Im(z)^2} \geqslant |Im(z)|$, d'où $|P(z)| \geqslant |Im(z)|^n$.
Réciproquement, on suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|Im(z)|^n \leqslant |P(z)|$. $P \in \mathbb{C}[X]$, donc P est scindé sur $\mathbb{C}$. Pour montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de montrer que ses racines complexes sont réels. Or, si z est une racine de P, alors l'inégalité donne $Im(z) = 0$, donc z est réel, et P est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice.
Soit $n \geqslant 1$. Factoriser le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ sur $\mathbb{C}$. En déduire une formule de $\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Solution. On sait que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n})$ et $X^n - 1 = (X - 1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n}).$$

En évaluant en 1, on obtient :

$$\begin{aligned} n = P(1) &= \prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{2ik\pi/n}) = \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n}(e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n}) \\ &= e^{\frac{i\pi(n-1)n}{2n}}(-2i)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

donc on en déduit $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Solution. On écrit P en produit de facteurs irréductibles : $P = \lambda \prod_{k=1}^{r}(X - x_k)^{\alpha_k} \prod_{j=1}^{s}(X^2 + a_j X + b_j)^{\beta_j}$, où $x_k \in \mathbb{R}$ et $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ tels que $X^2 + a_j X + b_j$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. Puisque $P \geqslant 0$, on a $\lambda \geqslant 0$ et les α_k sont pairs (en effet, on a $P \sim C(X - x_i)^{\alpha_i}$ au voisinage de x_i) : on peut écrire $\alpha_k = 2\gamma_k$. Puisque $X^2 + a_j X + b_j$ est irréductible sur $\mathbb{R}$, on peut écrire $X^2 + a_j X + b_j = (X - z_j)(X - \overline{z_j})$ où $z_j \in \mathbb{C}$. Alors, en posant $Q = \sqrt{\lambda}\prod_{k=1}^{r}(X - x_k)^{\gamma_k}\prod_{j=1}^{s}(X - z_j)^{\beta_j}$, on a $P = Q\overline{Q} = Re(Q)^2 + Im(Q)^2$, donc $A = Re(Q)$ et $B = Im(Q)$ conviennent.

Exercice.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples.
3. Que se passe-t-il si l'on suppose seulement P scindé sur $\mathbb{R}$?

Solution.

1. On note $x_1 < ... < x_n$ les racines distinctes de P, on applique Rolle entre chaque $]x_i, x_{i+1}[$ et on obtient que P' admet $n-1$ racines distinctes $y_1, ..., y_{n-1}$ avec $x_i < y_i < x_{i+1}$. Puisque P' est de degré $n-1$, on en déduit que P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

2. On note $Q = P^2 + 1$. Puisque $Q > 0$, Q n'a pas de racines réelles. On a : $Q' = 2PP'$, donc une racine de Q' est une racine de P ou P', donc est réelle d'après la question 1. Donc Q et Q' n'ont pas de racine commune, donc Q n'a que des racines simples.

3. On montre que P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ en montrant que P' possède n racines réelles comptées avec multiplicité. On note $x_1, ..., x_k$ les k racines réelles distinctes de P et on note $m_1, ..., m_k$ leurs multiplicités respectives. Alors $x_1, ..., x_k$ sont racines de P de multiplicités respectives $m_1 - 1, ..., m_k - 1$, ce qui fait $n-k$ racines. Pour les $k-1$ restantes, on applique Rolle entre chaque $]x_i, x_{i+1}[$. Le reste de la démonstration de la question 2 est alors la même.

Exercice.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$ si et seulement si P est constant.
2. A quelle condition a-t-on $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$?
3. A quelle condition a-t-on $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$? (*on pourra penser aux polynômes interpolateurs de Lagrange*)

Solution.

1. Si P est constant, on a bien $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$. Pour la réciproque, si par l'absurde P n'est pas constant, alors par exemple $Q = P - i$ est non nul, donc possède une racine $z \in \mathbb{C}$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss. Ainsi $P(z) = i \notin \mathbb{R}$, d'où la contradiction.

2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a bien $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Réciproquement, supposons $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et montrons que $P \in \mathbb{R}[X]$. Il suffit de montrer que $P + \bar{P} = 0$. Or $P - \bar{P}$ est un polynôme réel admettant un nombre infini de racines, donc c'est le polynôme nul. En notant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a donc $\sum_{k=0}^{n} (a_k - \overline{a_k}) X^k = 0$, donc $a_k \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.

3. On montre que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ si et seulement si $P \in \mathbb{Q}[X]$: le sens inverse est évident, et pour l'autre implication, on note n le degré de P et on fixe $x_0, ..., x_n \in \mathbb{Q}$ deux à deux distincts, et $L_0, ..., L_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $P(x_0), ..., P(x_n)$. Alors, par unicité, on a $P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k$, et la formule donnant L_k nous dit que L_k est à coefficients rationnels. Donc $P \in \mathbb{Q}[X]$.

9.2 Fractions rationnelles

Exercice.
Décomposer les fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $\frac{X^2+3X+1}{(X-1)^2(X-2)}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\frac{1}{X^4-1}$ sur $\mathbb{C}$.

Solution.

1. On commence par la partie entière : $X^2 + 2X + 5 = (X^2 - 3X + 2) + (5X + 3)$ et par factoriser le dénominateur : $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, on a donc $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-1}$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Pour a, on multiplie par $(X-1)$ et on fait tendre X vers 1 : $a = -8$ et pour b, on multiplie par $(X-2)$ et on fait tendre X vers 2 : $b = 13$. D'où $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}$.

2. Il n'y a pas de partie entière, on a $\frac{X^2+3X+1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-2}$. Pour b, on multiplie par $(X-1)^2$ et on fait tendre X vers 1, et pour c on multiplie par $(X-2)$ et on fait tendre X vers 2. Enfin, pour a, on multiplie par X et on fait tendre X vers l'infini : on trouve $\frac{X^2+3X+1}{(X-1)^2(X-2)} = -\frac{10}{X-1} - \frac{5}{(X-1)^2} + \frac{11}{X-2}$.

3. $\frac{1}{X^4-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} + \frac{i}{X-i} - \frac{i}{X+i}\right)$.

Exercice.
En effectuant une décomposition en éléments simples, déterminer pour tout $n \geqslant 1$ la dérivée n-ème de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$ (là où elle est bien définie).

Solution. On trouve $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$ donc par une récurrence on en déduit que $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$.

Exercice.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples de degré $n \geqslant 2$ que l'on note $P = \prod_{k=1}^n (X - x_k)$.

1. Si 0 n'est pas racine de P, calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)}$.
2. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(x_k)}$.

Solution. On a la décomposition en éléments simples : $\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(a_k)(X-a_k)}$. On trouve donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}$. En multipliant par X et en faisant tendre X vers l'infini, puisque le degré de P est $\geqslant 2$ on trouve que la somme demandée vaut 0.

Exercice.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Décomposer en éléments simples P'/P.
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'|P$.

Solution.

1. En notant $a_1, ..., a_p$ les racines distinctes de P de multiplicités $m_1, .., m_p$, on obtient $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^p \frac{m_i}{X-a_i}$.
2. Soit P tel que $P'|P$: il existe $\lambda, a \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda P'(X-a) = P$. Alors $\frac{P'}{P} = \frac{1}{\lambda(X-a)}$, donc d'après la question précédente on en déduit par unicité de la DES que a est l'unique racine de P, donc P est de la forme $P = c(X-a)^m$.

Exercice.
Soit $f =]1, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$. En effectuant une décomposition en éléments simples, déterminer la primitive de f sur $]1, \infty[$ qui s'annule en 2.

Solution. Par des méthodes déjà vues, on trouve $f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-3} - \frac{2}{(x-3)^2}$ pour $x > 1$. Les primitives de f sur $]1, \infty[$ sont donc de la forme $F(x) = 3\ln(x-1) + 2\ln(x-3) + \frac{1}{x-3} + C$, donc pour que f s'annule en 2 il faut prendre $C = -2\ln(5) - \frac{1}{5}$.

Exercice.
Soit $f =]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^4+x^3+4x^2+2x+2}{x^3+x}$. En effectuant une décomposition en éléments simples, déterminer $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Solution. On effectue la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$: $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{2}\frac{1-i}{x-i} + \frac{1}{2}\frac{1+i}{x+i}$, donc sur $\mathbb{R}$ on obtient $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x} + \frac{x+1}{x^2+1}$. On a donc $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + x + 2\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x)\right]_1^2$.

10 Développements limités

Exercice (quelques développements limités).
Donner le développement limité de :

1. $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ à l'ordre 4 en 0.
2. $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0.
3. $\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ à l'ordre 2 en 0.
4. $\ln(\sin(x)/x)$ à l'ordre 4 en 0.
5. $\exp(\sin(x))$ à l'ordre 4 en 0.
6. $\cos(x)^{\sin(x)}$ à l'ordre 5 en 0.
7. $\ln(x)$ à l'ordre 3 en 2.
8. $\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$.
9. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln(x)$ à l'ordre 4 en $+\infty$.

Exercice.
En effectuant un développement limité, calculer les limites de :

1. $\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ lorsque $x\to 0$.
2. $\frac{\exp(\sin(x))-\exp(\tan(x))}{\sin(x)-\tan(x)}$ lorsque $x\to 0$.

Exercice.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^2. Calculer la limite de $\frac{f'(x)-\frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}$ lorsque $x\to 0$.

Solution. On utilise la formule de Taylor pour en déduire un développement limité à l'ordre 2 de f et à l'ordre 1 de f', et on trouve que la limite est $f''(0)/2$.

Exercice.
Pour tout $n\geqslant 1$, on pose $H_n=\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $\forall k\geqslant 2$, $\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{k}\leqslant\int_{k-1}^k\frac{1}{t}\mathrm{d}t$. En déduire un équivalent de H_n lorsque $n\to\infty$.
2. On pose $u_n=H_n-\ln(n)$ et $v_n=u_{n+1}-u_n$. Donner un développement limité à l'ordre 2 de v_n lorsque $n\to\infty$. En déduire la nature de la suite $(H_n-\ln(n))_n$.

Solution.

1. On a l'inégalité car la fonction $t\mapsto\frac{1}{t}$ est décroissante (faire un dessin). En sommant, on en déduit : $1+\int_2^{n+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\leqslant H_n\leqslant\int_1^n\frac{1}{t}\mathrm{d}t$, soit $1+\ln(n+1)-\ln(2)\leqslant H_n\leqslant\ln(n)$, donc on en déduit que $H_n\sim\ln(n)$.
2. On a :

$$v_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)-\ln(n)=\frac{1}{n+1}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}-\ln(1+\frac{1}{n})\underset{n\to\infty}{=}$$
$$\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}+o(\frac{1}{n+1})\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)\underset{n\to\infty}{=}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}),$$

donc on en déduit que la série $\sum v_n$ converge, donc la suite $(u_n)_n$ converge.

11 Intégration

11.1 Intégration sur un segment

Exercice.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Solution. On considère la fonction $g(t) = f(t) - t$, alors g est continue sur $[0,1]$ et $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0$, donc g s'annule sur $[0,1]$.

Exercice (lemme de Riemann-Lebesgue).
Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. On pose pour $n \geqslant 1$, $u_n = \int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$.

1. Si φ est de classe C^1, montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Si φ est en escalier, montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Que se passe-t-il si φ est une fonction continue par morceaux ?

Solution.

1. On effectue une IPP : $u_n = \left[\frac{-\cos(nt)}{n}\varphi(t)\right] + \int_a^b \varphi'(t)\frac{\cos(nt)}{n}\mathrm{d}t$, donc $|u_n| \leqslant \frac{\|\varphi\|_\infty}{n} + (b-a)\frac{\|\varphi'\|_\infty}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. On note $a = a_1 < ... < a_N = b$ une subdivision adaptée à φ et c_i la valeur de φ sur $[a_i, a_{i+1}[$. Alors on a $u_n = \sum_{i=1}^{N-1} c_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} \sin(nt)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{N-1} c_i \frac{\cos(a_{i+1}) - \cos(a_i)}{n}$, d'où $|u_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N-1}|c_i| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si φ est continue par morceaux, on peut l'approcher par des fonctions en escalier et montrer que l'on a également $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice.
Déterminer la limite de $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ lorsque $n \to \infty$.

Solution. On passe au log :

$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\ln(k) - n\ln(n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}(\ln(k) - \ln(n)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1 + \frac{k}{n}),
\end{aligned}$$

donc d'après les sommes de Riemann, $\ln(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+t)\mathrm{d}t = 2\ln(2) - 1$, d'où $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{e}$.

Exercice (inégalité de Jensen pour les fonctions).
Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue convexe. Montrer que :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))\mathrm{d}t.$$

Solution. On utilise les sommes de Riemann, la continuité de g pour passer à la limite, et l'inégalité de Jensen usuelle par convexité de g.

Exercice (intégrales de Wallis).
On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\mathrm{d}x$.

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par $(I_n)_n$.
2. Montrer que $(I_n)_n$ est décroissante et que $I_{n+1} \sim I_n$.
3. Donner une expression explicite de I_n pour tout $n \geqslant 0$ et en déduire un équivalent de I_n lorsque $n \to \infty$.

Solution.

1. Pour $n \geqslant 2$, en effectuant une intégration par parties, on trouve
$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\cos(x)\sin^{n-1}(x)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x)(n-1)\cos(x)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(x))\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n), \end{aligned}$$
d'où $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$
2. $(I_n)_n$ est décroissante car pour $x \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $\sin^{n+1}(x) \leqslant \sin^n(x)$. On a ainsi $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, donc $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$, avec $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $I_n \sim I_{n+1}$.
3. Par récurrence en utilisant la question 1 on en déduit, en sachant que $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$: $I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)...3.1}{2p(2p-2)...4.2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)...2}{(2p+1)(2p-1)...3.1}$. On veut faire apparaître des termes en factorielle pour simplifier les expressions, alors en complétant les trous on obtient $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$. On a $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ donc on en déduit $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice.
Soient $n \geqslant 0$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall k \in \{0, ..., n\}$, $\int_0^1 f(t)t^k\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]0,1[$.

Solution. D'après l'hypothèse, par linéarité, on en déduit que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 f(t)P(t)\mathrm{d}t = 0$. On suppose par l'absurde que f s'annule moins de n fois. On note $a_1, ..., a_k$ avec $k \leqslant n$ les zéros distincts de f où f change strictement de signe. On considère alors $P = \prod_{i=1}^k (X - a_i)$: $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\int_0^1 f(t)P(t)\mathrm{d}t = 0$. Or P et f changent de signe en même temps (les racines de P sont simples par construction, donc on n'a pas de racine double), donc la fonction fP est de signe constant et d'intégrale nulle, donc on en déduit que $fP = 0$. Ainsi, pour $t \notin \{a_1, ..., a_k\}$, on a $f(t) = 0$ puisque $P(t) \neq 0$. Donc $f = 0$, d'où la contradiction.

Exercice (théorème de Césaro fonctionnel).
Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \underset{x\to\infty}{\to} a \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to\infty}{\to} a.$$

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe A tel que pour tout $x > A$, $|f(x) - a| \leqslant \varepsilon$. Alors, pour $x > A$:
$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - a\right| &= \left|\frac{1}{x}\int_0^A f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_A^x f(t)\mathrm{d}t - a\right| \\ &\leqslant \frac{1}{x}\left|\int_0^A f(t)\mathrm{d}t\right| + \frac{1}{x}\int_A^x |f(t) - a|\mathrm{d}t + a\left|\frac{x-A}{x} - 1\right| \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{x}\left|\int_0^A f(t)\mathrm{d}t\right| \underset{x\to\infty}{\to} 0$ et $a\left|\frac{x-A}{x}-1\right| \underset{x\to\infty}{\to} 0$, et $\frac{1}{x}\int_A^x |f(t)-a|\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon\frac{x-A}{x} \leqslant \varepsilon$, donc pour x assez grand on a $\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - a\right| \leqslant 3\varepsilon$. D'où $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to\infty}{\to} a$.

Exercice.
Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Montrer que

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M.$$

Solution. On a $\left(\int_a^b |f(x)|^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M$. Soit $\varepsilon > 0$. f est continue sur un compact donc est bornée et atteint ses bornes : il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M$. Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [c-\delta, c+\delta]$, $|f(c) - M| \leqslant \varepsilon$ (si c est égal à l'une des bornes a ou b, il faut remplacer $c-\delta$ ou $c+\delta$ par a ou b). Alors :

$$\int_a^b |f(x)|^n \mathrm{d}x \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} |f(x)|^n \mathrm{d}x \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} (M-\varepsilon)^n \mathrm{d}x = 2\delta(M-\varepsilon)^n,$$

donc $\left(\int_a^b |f(x)|^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant (2\delta)^{1/n}(M-\varepsilon)$, avec $(2\delta)^{1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant M-\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant M$.

Exercice.

1. Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^\pi f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[0,\pi]$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, 2π-périodique et de moyenne nulle. Montrer que $f + f''$ s'annule au moins 4 fois sur $[0, 2\pi[$.

Exercice.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f = 0$. On note m et M le minimum et le maximum de f sur $[0,1]$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leqslant -mM$.

Solution. Par définition de m et M, $f-m$ et $M-f$ sont deux fonctions positives, donc $\int_0^1 (f-m)(M-f) \geqslant 0$, soit $(M+m)\int_0^1 f - mM - \int_0^1 f^2 \geqslant 0$. Or $\int_0^1 f = 0$, donc on obtient l'inégalité souhaitée.

11.2 Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice.
Discuter suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence des intégrales :

1. $\int_0^\infty \frac{(t^4+1)\sin(t^2)}{t^\alpha(e^t-1)}\mathrm{d}t$.
2. $\int_0^\infty \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^\alpha}\mathrm{d}t$.
3. $\int_1^\infty \frac{t-1}{t^2\ln(t)^\alpha}\mathrm{d}t$.
4. $\int_2^\infty (\sqrt{x^4+x^2+1} - x(x^3+\alpha x)^{1/3})\mathrm{d}x$.

Solution. À chaque fois, on note f la fonction sous l'intégrale.

1. En $+\infty$, on a $f(t) = O(t^{4-\alpha}e^{-t})$, donc f est intégrable sur $[1,\infty[$ (comparaison avec intégrales de Riemann), donc l'intégrale $\int_1^\infty f$ est convergente. D'autre part, $f(t) \sim \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ en 0, donc f est signe constant au voisinage de 0, donc l'intégrale $\int_0^1 f$ est convergente ssi f est intégrable sur $]0,1[$ ssi $\alpha-1<1$ i.e. $\alpha < 2$. Donc l'intégrale $\int_0^\infty f$ est convergente ssi $\alpha < 2$.
2. La fonction f se prolonge par continuité en 0, donc l'intégrale $\int_0^1 f$ est convergente. D'autre part, $f(t) \sim \frac{\ln(t)}{t^{2\alpha-1}}$ en $+\infty$. Si $\alpha \leqslant 1$, alors $\frac{\ln(t)}{t^{2\alpha-1}} \geqslant \frac{1}{t}$ pour t assez grand, donc par le théorème de comparaison, l'intégrale $\int_1^\infty f$ est divergente. Si $\alpha > 1$, alors il existe γ tel que $1 < \gamma < 2\alpha-1$, et $\frac{\ln(t)}{t^{2\alpha-1}} = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$, donc par le théorème de comparaison, l'intégrale $\int_1^\infty f$ est convergente. Donc l'intégrale $\int_0^\infty f$ est convergente ssi $\alpha > 1$.
3. En 1, on a $f(1+h) \sim \frac{1}{h^{\alpha-1}}$, donc f est intégrable sur $]1,2[$ ssi $h \mapsto \frac{1}{h^{\alpha-1}}$ est intégrable sur $]0,1[$ ssi $\alpha-1<1$ ssi $\alpha<2$. Donc $\int_1^2 f$ est convergente ssi $\alpha < 2$. On remarque que si $\alpha \leqslant 0$, alors l'intégrale est divergente. On se place donc dans le cas $\alpha > 0$. On a $f(t) \sim \frac{1}{t\ln(t)^\alpha}$ en $+\infty$, donc f est de signe constant au voisinage de $+\infty$, et d'après le théorème de comparaison, $\int_2^\infty f$ est convergente ssi f est intégrable sur $[2,\infty[$ ssi $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^\alpha}$ est intégrable sur $[2,\infty[$. On calcule alors $\int_2^A \frac{1}{t\ln(t)^\alpha}\mathrm{d}t$, et on trouve une limite finie lorsque $A \to \infty$ ssi $\alpha > 1$. Ainsi, l'intégrale $\int_1^\infty \frac{t-1}{t^2\ln(t)^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente ssi $\alpha \in]1,2[$.
4. La fonction f est continue sur $[2,\infty[$. On effectue un développement limité en $+\infty$ et on trouve que $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{a}{3} + \left(\frac{3}{8} + \frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ainsi l'intégrale est convergente ssi $a = \frac{3}{2}$.

Exercice (fonction Gamma d'Euler).

1. Déterminer pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ converge. Dans les cas où l'intégrale converge, on pose alors $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Donner une expression de $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. En déduire une expression simple de $\Gamma(n+1)$.

Solution.

1. Par croissances comparées, $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to\infty}{=} o(1/t^2)$, donc par comparaison l'intégrale $\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ est convergente. En 0, on a $e^{-t}t^{x-1} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$, donc par le théorème de comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ est convergente ssi $1-x<1$, i.e. $x>0$. Donc l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ est convergente ssi $x > 0$.
2. On effectue une intégration par parties et on trouve $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. On en déduit $\Gamma(n+1) = n!$.

Exercice (intégrale de Dirichlet).

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.
2. Pour $t \in [1, \infty[$, comparer $|\sin(t)|$ et $\sin(t)^2$. En déduire la nature de l'intégrale $\int_1^\infty \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi |\sin(t)|\mathrm{d}t.$$

Retrouver ainsi la nature de l'intégrale $\int_1^\infty \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t$.

Solution.

1. On calcule l'intégrale $\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ avec $A > 0$ en effectuant une intégration par parties : $\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = -\frac{\cos(A)}{A} + \cos(1) - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$, qui admet une limite finie lorsque $A \to \infty$, donc $\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.
2. On a $|\sin(t)| \geqslant \sin(t)^2$, donc on a $\int_1^A \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t \geqslant \int_1^A \frac{\sin(t)^2}{t}\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{1-\cos(2t)}{t}\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \int_1^A \frac{\cos(2t)}{t}\mathrm{d}t$. Or $\int_1^A \frac{1}{t}\mathrm{d}t \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et $\int_1^A \frac{\cos(2t)}{t}\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $A \to \infty$ (on utilise le même raisonnement qu'à la question 1), donc on en déduit que $\int_1^A \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$.
3. On majore t par $(k+1)\pi$, puis on utilise la périodicité de sin. On en déduit alors que $\int_\pi^{N\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi |\sin(t)|\mathrm{d}t$, or la série $\sum \frac{1}{k}$ est divergente, donc on trouve de même que l'intégrale est divergente.

Exercice.
On souhaite démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

1. Justifier la convergence de l'intégrale et de la série.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $I_k = \int_0^1 t^k \ln(t)\mathrm{d}t$, et en déduire une expression de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2n+1)^2}$ comme une intégrale.
3. En déduire l'égalité voulue.

Solution.

1. La série converge : OK d'après les séries de Riemann. On note f la fonction $t \mapsto \frac{ln(t)}{t^2-1}$: f est de signe constant sur $]0,1[$. En effectuant un développement limité, on trouve que f se prolonge par continuité en 1 par la valeur $1/2$, et $f(t) \sim -\ln(t)$ en 0, or ln est intégrable en 0 ($\ln(t) = o(\frac{1}{\sqrt{t}})$), donc l'intégrale est bien convergente.
2. On trouve $I_k = -\frac{1}{(k+1)^2}$. On en déduit $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2n+1)^2} = -\sum_{k=0}^n I_{2k} = -\int_0^1 \sum_{k=0}^n t^{2k} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t + \int_0^1 t^{2n+2}\frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t$.
3. Il faut montrer que $\int_0^1 t^{2n+2}\frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. La fonction $t \mapsto \frac{t^2\ln(t)}{t^2-1}$ se prolonge par continuité en 0 et 1 par les valeurs respectives 0 et $1/2$. La fonction est donc bornée sur $]0,1[$, disons par $M \geqslant 0$. On a alors $\left|\int_0^1 t^{2n+2}\frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t\right| \leqslant M\int_0^1 t^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit l'égalité voulue.

Exercice.

1. Justifier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
2. Calculer l'intégrale I.
3. En déduire un équivalent simple de la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{\arctan(x)}{x}\mathrm{d}x$ en $+\infty$.

Solution.

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue positive sur $]0,\infty[$, on a $f(t) \sim \ln(t)$ en 0, donc $f(t) = O(1/\sqrt{t})$, donc par comparaison f est intégrable sur $]0,1]$. D'autre part, $f(t) \sim \ln(t)/t^2$ en $+\infty$, donc $f(t) = o(1/t^{3/2})$ et par comparaison f est intégrable sur $[1,\infty[$. Donc I est bien définie.
2. On effectue le changement de variable $t = 1/u$, on trouve $I = -I$, donc $I = 0$.
3. On effectue une intégration par parties (ce qui est licite car la fonction entre crochets tend vers une limite finie aux bornes), et on trouve $\int_0^x \frac{\arctan(x)}{x}\mathrm{d}x = \ln(x)\arctan(x) - I$, avec $I = 0$ d'après la question précédente, donc $f(x) \sim \frac{\pi}{2}\ln(x)$ en $+\infty$.

Exercice.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier l'intégrabilité sur $]0,\pi/2[$ de la fonction $f : t \mapsto |\ln(\sin(t))|^\alpha$.
2. Justifier l'existence des intégrales $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$.
3. Calculer $I + J$, et en déduire les valeurs de I et J.

Solution.

1. La fonction f est continue sur $]0,\pi/2[$. En 0, on a $f(t) \sim |\ln(t)|^\alpha$, donc $f(t) = O(1/\sqrt{t})$, donc par comparaison f est intégrable sur $]0,\pi/4[$. En $\pi/2$, on effectue un développement limité de $f(\pi/2 - h)$ lorsque $h \to 0^+$: on trouve $f(\pi/2 - h) \sim \frac{h^{2\alpha}}{2^\alpha}$, donc f est intégrable sur $[\pi/4,\pi/2[$ ssi $-2\alpha < 1$ ssi $\alpha > -1/2$. Donc f est intégrable sur $]0,\pi/2[$ ssi $\alpha > -1/2$.
2. On est dans le cas $\alpha = 1 > -1/2$: d'après la question 1 l'intégrale I est donc bien définie. On observe que $\sin(\pi/2 - t) = \cos(t)$ donc par un changement de variable affine on en déduit que $I = J$ et donc J est bien définie aussi.
3. On a $I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)\sin(t))\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2}\ln(2)$. On effectue alors le changement de variable affine $t = \frac{u}{2}$ et on a alors $I + J = \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(\sin(t))\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^\pi \ln(\sin(t))\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2}\ln(2) = \frac{I}{2} + \frac{I}{2} - \frac{\pi}{2}\ln(2)$, d'om $I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

Exercice.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence de l'intégrale $I_\alpha = \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\mathrm{d}t$.
2. Lorsqu'elle existe, calculer l'intégrale I_α.
3. Etudier l'existence et, lorsqu'elle existe, calculer l'intégrale $J_\alpha = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(\tan(x))^\alpha}\mathrm{d}t$.

Solution.

1. Si $\alpha \geqslant 0$, alors la fonction f se prolonge par continuité en 0, donc f est intégrable sur $]0,1]$. En $+\infty$, on a $f(t) \sim \frac{1}{t^{\alpha+2}}$, donc par comparaison f est intégrable sur $[1,\infty[$. Si $\alpha < 0$, alors en $+\infty$, $f(t) \sim \frac{1}{t^2}$, donc par comparaison f est intégrable sur $[1,\infty[$, et en 0 on a $f(t) \sim t^\alpha$, donc f est intégrable sur $]0,1]$ ssi $\alpha > -1$. Donc I_α existe ssi $\alpha > -1$.

2. On effectue le changement de variable $t = \frac{1}{u}$, et on trouve $I_\alpha = \int_0^\infty \frac{u^\alpha}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}\mathrm{d}u = -I_\alpha + \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$, donc $I_\alpha = \frac{\pi}{4}$.
3. On effectue le changement de variable $u = \tan(x)$, et on trouve que $J_\alpha = I_\alpha$, donc J_α existe ssi $\alpha > -1$ et dans ce cas, $J_\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Exercice (étude théorique des fonctions intégrables).
Soient $a \in \mathbb{R}$, et $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue intégrable.

1. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, alors cette limite est nécessairement nulle.
2. Montrer que si f est de classe C^2, avec f et f'^2 intégrables, alors f' tend vers 0 en $+\infty$. En déduire que f tend vers 0 en $+\infty$.
3. Montrer que si f est uniformément continue, alors elle tend vers 0 en $+\infty$.
4. Le dernier résultat reste-t-il vrai si l'on suppose seulement f continue ?

Solution.

1.

12 Systèmes linéaires, déterminants

Exercice.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.

Solution. On résoud $AX = Y$ d'inconnue X où $Y \in \mathbb{R}^n$ en utilisant la méthode du pivot de Gauss. On trouve
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 & = y_1 \\ -4x_2 + 4x_4 & = y_3 - y_1 \\ -4x_3 + 4x_4 & = y_2 - y_1 \\ 0 & = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \end{cases}$$
Ainsi : si $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \neq 0$, alors il n'y a pas de solution et donc $y \notin \mathrm{Im}(A)$. Et si $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$, alors $X \in X_0 + \mathrm{Vect}(1\,1\,1\,1)$, où $X_0 = \begin{pmatrix} y_1/2 + y_2/4 + y_3/3 \\ y_1/2 - y_3/4 \\ y_1/4 - y_2/4 \\ 0 \end{pmatrix}$. On en déduit ainsi que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(1\,1\,1\,1)$ et $\mathrm{Im}(A)$ est l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ d'équation $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$.

Exercice (matrice tridiagonale).
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 4 & & (0) \\ 1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 4 \\ (0) & & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\Delta_n = \det(A_n)$.

Solution. En développant selon la première ligne, on trouve $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - 4\det(B_{n-1})$, où l'on calcule $\det(B_{n-1})$ en développant selon la première colonne et on trouve $\det(B_{n-1}) = \Delta_{n-2}$. On a donc une relation de récurrence du 2nd ordre, l'étude de l'équation caractéristique associée nous donne $\Delta_n = \lambda 2^n \cos(\frac{\pi}{3}n) + \mu 2^n \sin(\frac{\pi}{3}n)$ et on trouve $\lambda = 1$, $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall 1 \leqslant i,j \leqslant n$, $a_{i,i} \in \{-1,1\}$ et pour $i \neq j$, $a_{i,j} \in 2\mathbb{Z}$. Montrer que A est inversible.

Solution. On a $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = \prod_{i=1}^n a_{i,i} + \sum_{\sigma \in S_n, \sigma \neq id} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$. Le premier terme est impair (car il vaut 1 ou -1), mais le deuxième est pair par hypothèse. Ainsi, $\det(A)$ ne peut pas être nul et A est inversible.

Exercice.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_n$ des réels et $b \neq c \in \mathbb{R}$. On considère les matrices
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} a_1 & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(A)$ en considérant les colonnes $B = {}^t(b \dots b)$ et $C_i = {}^t(0 \dots a_i - b \dots 0)$.
2. Soit $P = \det(XJ + B)$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Déterminer le degré de P puis calculer $\det(B)$.

Solution.

1. On a $\det(A) = \det(B + C_1, ..., B + C_n) = \det(C_1, ..., C_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(C_1, ..., B, ..., C_n)$ par caractère n-linéaire alterné du déterminant (où la colonne B est en i-ème position), avec $\det(C_1, ..., B, ..., C_n) = b \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (a_j - b)$.

2. Pour calculer P, on soustrait la première colonne à toutes les autres (ce qui élimine les X sur les autres colonnes), puis on développe selon la première colonne : P est de degré au plus 1. Il existe donc α, β tels que $P = \alpha X + \beta$. En évaluant en $-b$ puis en $-c$, on trouve $P = (X + b)\frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i - c)(b - a_i)}{b - c} + \prod_{i=1}^{n}(a_i - b)$, puis $\det(B) = P(0)$.

Exercice.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & (0) & b & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & b & (0) & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$ et $\Delta_n = \det(A_n)$ (où le coefficient du milieu vaut $a+b$ si n est impair). On se propose de calculer Δ_n par deux méthodes différentes.

1. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par $(\Delta_n)_n$. En déduire Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Écrire la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A_n dans une autre base de $\mathbb{R}^n$ bien choisie. Retrouver Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution.

1. En effectuant des développements par rapport aux lignes et aux colonnes, on trouve $\Delta_n = (a^2 - b^2)\Delta_{n-2}$, donc on en déduit $\Delta_{2k} = (a^2 - b^2)^k$ et $\Delta_{2k+1} = (a^2 - b^2)^k (a + b)$.

2. On note $e_1, ..., e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on considère la base $e' = (e_1, e_n, e_2, e_{n-1}, ...,)$. C'est encore une base de $\mathbb{R}^n$, et la matrice de A_n dans cette base est diagonale par blocs, on en déduit alors le même résultat pour Δ_n.

Exercice (matrice compagnon).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme $P = \det(XI_n - A)$.

Solution. On cherche à calculer $P = \begin{pmatrix} X & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{pmatrix}$. On développe selon la dernière colonne et on trouve $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ (on aurait aussi pu effectuer des opérations sur les lignes et les colonnes).

Exercice.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant de la matrice $A = (i^j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Solution. On met i en facteur dans chaque ligne de la matrice, puis on reconnaît une matrice de Vandermonde : on trouve $\det(A) = n! \prod_{1 \leqslant i<j \leqslant n}(j-i) = n! \prod_{j=2}^{n}(j-1)! = 1!2!...n!$.

Exercice.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont $\mathbb{C}$-semblables (i.e. il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$). On note $P = P_1 + iP_2$. En considérant le polynôme $\Delta = \det(P_1 + xP_2)$, montrer que A et B sont $\mathbb{R}$-semblables.

Solution. On a, en identifiant parties réelles et imaginaires : $\Delta B = A\Delta$. Pour montrer que A et B sont $\mathbb{R}$-semblables, il suffit donc de montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta(x) \neq 0$: en effet, le polynôme $\Delta \in \mathbb{R}[X]$ est non nul car $\Delta(i) = \det(P) \neq 0$, donc Δ admet un nombre fini de racines réelles.

Exercice.
Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(K)$.

1. Rappeler la définition de la comatrice de A et la formule de la comatrice.
2. Calculer le rang de la comatrice de A en fonction de $\mathrm{rg}(A)$ (on distinguera les cas selon la valeur de $\mathrm{rg}(A)$)
3. Calculer le déterminant de la comatrice de A en fonction de $\det(A)$.

1. Cours.
2. Si $\mathrm{rg}(A) = n$, alors A est inversible et ${}^t\mathrm{Com}(A) = .\det(A)A^{-1}$ est aussi inversible, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n$. Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$, alors les cofacteurs sont nuls (toute matrice extraite de taille $n-1$ est de déterminant nul), donc $\mathrm{Com}(A) = 0$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0$. Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, alors puisque $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = 0$, on a $\mathrm{Im}({}^t\mathrm{Com}(A)) \subset \mathrm{Ker}(A)$, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) \in \{0, 1\}$, or $\mathrm{rg}(A) = n-1$, donc au moins l'un des cofacteurs est non nul, donc $\mathrm{Com}(A)$ n'est pas la matrice nulle et $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1$.
3. Si A n'est pas inversible, alors $\mathrm{Com}(A)$ non plus et $\det(\mathrm{Com}(A)) = 0$. Sinon, puisque ${}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)A^{-1}$, alors $\det(\mathrm{Com}(A)) = \det(A)^{n-1}$.

Exercice.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

Solution. On utilise la formule de la comatrice.

Exercice.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que le polynôme $P_n = X^n - X + 1$ admet n racines complexes distinctes $z_1, ..., z_n$.
2. Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}$

Solution.

1. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P admet n racines complexes comptées avec multiplicité. Si z est une racine de P, alors $z^n - z + 1 = 0$. Montrons que $P'(z) \neq 0$: si par l'absurde $P'(z) = 0$, alors $z^{n-1} = \frac{1}{n}$, donc $z\frac{1}{n} - z + 1 = 0$, donc $z = \frac{n}{n-1}$, donc $n^n = (n-1)^{n-1}$, d'où la contradiction par strict croissance de la fonction $t \mapsto t^t$.

2. On pose $B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, alors par caractère n-linéaire alterné du déterminant, on a $\det(A) = \prod_{i=1}^n z_i + \sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j\neq i}^n z_j$ et en utilisant les relations coefficients-racines on trouve $\det(A) = 2(-1)^n$.

Exercice.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_n$ des réels tels que pour tout i, $a_i + b_i \neq 0$, et les a_i sont deux à deux distincts. On se propose de calculer $\Delta_n := \det(A_n)$ où $A_n = \left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. On considère la fraction rationnelle $R = \dfrac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i - X)}{\prod_{i=1}^{n}(X + a_i)}$. Décomposer R en éléments simples.
2. Effectuer des opérations sur les lignes de A_n pour faire apparaître $R(b_1), ..., R(b_n)$.
3. En déduire Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution.

1. R n'a que des pôles simples (car les a_i sont deux à deux distincts), et le degré du dénominateur est plus grand que le numérateur, donc la partie entière est nulle, donc la décomposition en éléments simples donne $R = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{X+a_k}$, avec $\lambda_k = \frac{\prod_{i=1}^n (b_i+a_k)}{\prod_{i=1, i\neq k}^n (a_i - a_k)}$.

2. On effectue l'opération $L_n \leftarrow L_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_n} L_k$, de sorte que $\Delta_n = \frac{1}{\lambda_n} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \cdots & \cdots & R(b_n) \end{pmatrix}$.

   Or $R(b_i) = 0$ pour $i < n$, donc en développant selon la dernière ligne, on obtient $\Delta_n = \frac{R(b_n)}{\lambda_n}\Delta_{n-1}$. Par récurrence, on en déduit ainsi que

$$\Delta_n = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i,j}(a_i + b_j)}.$$

13 Réduction des endomorphismes

Exercice.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$, et $A, J \in M_n(\mathbb{C})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^k pour $k \leqslant n$.
2. Montrer que J est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
3. En déduire le déterminant de A.

Solution.

1. Faire le calcul (à chaque fois, ça décale les 1 d'une diagonale).
2. On remarque que $J^n = I_n$, donc le polynôme $X^n - 1$, scindé à racines simples, annule J, donc J est diagonalisable. On peut également montrer que $X^n - 1$ est le polynôme caractéristique de J, donc ses valeurs propres sont exactement les racines de $X^n - 1$, i.e. les racines n-èmes de l'unité.
3. On en déduit qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $J = PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines n-èmes de l'unité. D'après la question 1, on a $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = P(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k)P^{-1}$, donc on en déduit facilement le déterminant de A.

Exercice.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $p \geqslant 1$ et $a_1, ..., a_{2p} \in \mathbb{R}$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2p}$ tel que $a_{i,2p+1-i} = \alpha_i$ si $1 \leqslant i \leqslant 2p$, et $a_{i,j} = 0$ sinon. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^2 - ab$.
   - Si $ab > 0$, alors χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
   - Supposons $ab = 0$. Si a et b sont nuls, alors A est évidemment diagonalisable. Supposons ainsi a et b non tous nuls : alors 0 est la seule valeur propre de A, donc A n'est pas diagonalisable (sinon A serait nulle).
   - Supposons $ab < 0$, alors A n'a pas de valeurs propres réelles donc ne peut pas être diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

   Ainsi, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ssi $ab > 0$ ou $a = b = 0$.
2. On note $(e_1, ...e_{2p})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2p}$, et on considère la base $\beta = (e_1, e_{2p}, e_2, e_{2p-1}, ..., e_p, e_{p+1})$. Alors dans cette base, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonale par blocs, avec des blocs $A_1, ..., A_p$ de taille 2, où $A_i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_i \\ \alpha_{2p+1-i} & 0 \end{pmatrix}$. A est donc diagonalisable si et seulement si chaque A_i est diagonalisable. D'après la question 1, on en déduit donc que A est diagonalisable si et seulement si pour tout $i \in \{1, ..., 2p\}$, $\alpha_i = \alpha_{2p+1-i} = 0$ ou $\alpha_i\alpha_{2p+1-i} > 0$.

Exercice.

Soient $n \geqslant 3$ et $a, b, c \in \mathbb{C}$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c \\ \vdots & \ddots & \vdots & c \\ 0 & \dots & 0 & c \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.

1. À quelle condition la matrice M est-elle de rang 2 ? On suppose dans la suite cette condition remplie.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Solution.

1. La matrice M est de rang 2 si et seulement si $c \neq 0$ et $b \neq 0$.
2. On calcule le polynôme caractéristique de M : à la fin, on trouve $\chi_M = X^{n-2}(X^2 - aX - (n-1)bc)$. Donc les valeurs propres de M sont 0 et les racines de $X^2 - aX - (n-1)bc$. On note $\Delta = a^2 + 4(n-1)bc$.
   - Si $\Delta \neq 0$, alors le polynôme $X^2 - aX - (n-1)bc$ admet 2 racines complexes distinctes, qui sont donc valeurs propres de M de multiplicité 1. Puisque 0 est valeur propre de multiplicité $n-2$ (car on est dans le cas où M est de rang 2), on en déduit que M est diagonalisable.
   - Si $\Delta = 0$, alors M a une valeur propre double égale à $a/2$. Puisque l'on a supposé M de rang 2 on $a \neq 0$, et M est diagonalisable si et seulement si $\dim\mathrm{Ker}(M - \frac{a}{2}I_n) = 2$. Or $M - \frac{a}{2}I_n$ possède une matrice extraite inversible de taille $n-1$, donc $\dim\mathrm{Ker}(M - \frac{a}{2}I_n) = 2 \leqslant 1$, et donc M n'est pas diagonalisable.

Exercice.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Solution. f est de rang 1, donc 0 est valeur propre de f d'ordre au moins $n-1$, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\chi_f = X^{n-1}(X - \alpha)$. Puisque la somme des valeurs propres est égal à la trace de f, on a $\mathrm{Tr}(f) = \alpha$. Si $\alpha = 0$, alors 0 est la seule valeur propre de f, donc si f est diagonalisable alors $f = 0$, ce qui est exclu car f est de rang 1. Si $\alpha \neq 0$, alors f a deux valeurs propres, 0 et α, et $\dim E_0 + \dim E_\alpha = n$, donc f est diaonalisable.

14 Équations différentielles

Exercice (équations différentielles du second ordre).
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = 3e^{-x} + (6x+5)e^{2x}$.
2. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$.
3. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$.

Exercice.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y^{(3)} = y$.

Solution. On pose $g = y + y' + y''$, on trouve une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par g, on trouve g puis on en déduit une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par f que l'on sait résoudre.

Exercice.
Déterminer les réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que toute solution de $y'' + ay' + b = 0$ soit bornée.

Solution. On détermine la forme des solutions en fonction du discriminant de l'équation caractéristique. Au final, on trouve que les solutions sont bornées ssi $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

Exercice.
Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec a impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle $y' + a(t)y = b$ admet une unique solution impaire.

Solution. Par le théorème de Cauchy, il existe une unique solution, notée f, telle que $f(0) = 0$. Alors on montre que la fonction $x \mapsto -f(-x)$ est également solution de l'équation différentielle avec la même condition initiale, donc par unicité $f(x) = -f(-x)$, donc f est impaire.

Exercice.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f'' + f > 0$. Montrer que $f(0) + f(\pi) \geqslant 0$.

Solution. On pose $g = f'' + f$, alors on a une équation du 2nd ordre vérifiée par f, donc en résolvant on en déduit la forme de f en fonction de g, puis en utilisant l'hypothèse $g \geqslant 0$ on en déduit le résultat.

Exercice.
Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue T-périodique. On s'intéresse à l'équation différentielle (1) : $y' - ay = f$.

1. Montrer qu'une solution y de (1) est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.
2. Déterminer en fonction de a le nombre de solutions T-périodiques de (1).

Solution.

1. On utilise l'unicité du problème de Cauchy associé à l'équation (1) : l'implication directe est évidente et réciproquement, si y est une solution telle que $y(T) = y(0)$, alors on montre que $g : x \mapsto y(T + x)$ est solution avec la même condition initiale, donc $y = g$ et y est T-périodique.
2. On résoud l'équation pour trouver la forme de y : $y(x) = (\lambda + \int_0^x f(t)e^{-at}\mathrm{d}t)e^{ax}$, puis on résoud $y(0) = y(T)$. En fonction de a, on trouve soit 0 solutions périodiques, soit 1 solution, soit toutes les solutions sont périodiques.

Exercice.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue intégrable. On considère l'équation (1) : $y'' + f(t)y = 0$.

1. Montrer que si y est une solution bornée de (1), alors $y'(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$.
2. Si y_1, y_2 sont deux solutions de (1), calculer leur wronskien : $W : t \mapsto \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$.
3. Montrer que (1) admet une solution non bornée.

Solution.

1. Si y est une solution bornée de (1), on a $y'(t) - y'(0) = -\int_0^t f(u)y(u)\mathrm{d}u$, avec f intégrable et y bornée, donc la fonction fy est intégrable et y' admet une limite finie en $+\infty$. La limite ne peut pas être nulle car sinon on peut montrer que y n'est pas bornée.
2. On montre que $W'(t) = 0$, donc W est constante.
3. Par l'absurde, si (1) n'admet que des solutions bornées, alors on peut considérer y_1, y_2 deux solutions bornées linéairement indépendantes. Alors leur wronskien est non nul, égal à une constante $C \neq 0$ d'après la question précédente. Ainsi : $\forall t,\ y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) = C$. Or, d'après la question 1, y_2' et y_1' sont de limite nulle à l'infini, donc puisque y_1 et y_2 sont bornées, on en déduit que $C = 0$, d'où la contradiction.

15 Espaces préhilbertiens et espaces euclidiens

Exercice.
Montrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires :

1. $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)$ sur $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
2. $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, ...a_n$ sont des réels deux à deux distincts.

Exercice.
Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $a = (a_n)_n$ une suite de réels de $[0,1]$. On pose, pour tout $f, g \in E$,

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} f(a_n)g(a_n).$$

Montrer que $\langle ., .\rangle$ est bien définie, puis donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $\langle ., .\rangle$ définisse un produit scalaire sur E.

Solution. $\langle ., .\rangle$ est bien définie car pour tout $f \in E$, f est bornée, et la série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge. On vérifie facilement que $\langle ., .\rangle$ est bilinéaire symétrique et positif. Il reste à vérifier que $\langle ., .\rangle$ est définie positive. Si $\langle f, f\rangle = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) = 0$. Puisque f est continue, il suffit que la suite a soit dense dans $\mathbb{R}$. Vérifions la réciproque : si a n'est pas dense, alors il existe $x < y \in [0,1]$ tel que $]x, y[$ ne contienne aucun des a_n. On construit alors une fonction nulle en dehors de $]x, y[$ et non nulle sur $]x, y[$: alors $f \neq 0$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) = 0$ donc $\langle f, f\rangle = 0$. Donc $\langle ., .\rangle$ n'est pas définie positive.

Exercice.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$. On définit :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X]^2,\ \phi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_k pour que ϕ définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer alors la distance euclidienne de X^n à

$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}.$$

Solution.

1. ϕ est bilinéaire symétrique positive. Si $\phi(P) = 0$, alors (on a une somme de termes positifs) pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $P^2(a_k) = 0$, donc $P(a_k) = 0$. Si les a_k sont deux à deux distincts, cela implique que $P = 0$ car P est de degré au plus n, et donc ϕ est définie positive. Sinon, on note $b_1, ..., b_p$ les valeurs distinctes de $\{a_0, ..., a_n\}$ et on pose $P = \prod_{i=1}^p (X - b_i) \in \mathbb{R}_n[X]$: on a $\phi(P) = 0$ mais $P \neq 0$, donc ϕ n'est pas définie positive.
2. F est un hyperplan ($F = \mathrm{Ker}(\varphi)$ où $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est définie par $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n P(a_k)$), donc il suffit de trouver un vecteur dans $\mathcal{F}^\perp$ et on remarque par définition de ϕ que $1 \in F^\perp$. Ainsi, d'après le cours, $\mathrm{d}(X^n, F) = \frac{|\phi(X^n,1)|}{\|1\|} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k^n}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in O_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme canonique notée $\|.\|$, et on note $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. On note $C_1, ...C_n$ les colonnes de A. Calculer $\sum_{j=1}^n \|C_j\|^2$. En déduire que $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n^{3/2}$. Montrer que si n est impair et $n \geqslant 1$, alors l'inégalité est stricte.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, calculer $\langle x, u_A(x) \rangle$, où u_A est l'endomorphisme canoniquement associé à A. En déduire que $\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n$. Étudier le cas d'égalité.

Solution.

1. Puisque A est orthogonale, $\|C_j\|^2 = 1$ pour tout j, donc la somme demandée vaut n. On a $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \langle |C_i|, \mathbf{1} \rangle$, en notant $|C_i|$ le vecteur colonne dont les coefficients sont les $|a_{i,j}|$. Ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$. On a égalité si et seulement si pour tout i, C_i est colinéaire à $\mathbf{1}$, ce qui n'est pas possible.
2. Si $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$, alors $\langle x, u_A(x) \rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j \langle e_i, u_A(e_j) \rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j a_{i,j}$. On en déduit que pour $x = \sum_{j=1}^n e_j$, $\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| = |\langle x, u_A(x) \rangle \leqslant \|x\| \|u_A(x)\| = \|x\|^2 = n$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et car $u_A \in O(\mathbb{R}^n)$ donc u_A conserve la norme. On a égalité si et seulement si $u_A(x)$ est colinéaire à x, i.e. x est vecteur propre de A.

Exercice.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel $\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}({}^t AB)$, et on note $\|.\|$ la norme associée. Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$.

Solution. Il s'agit de calculer $\mathrm{d}(M, \operatorname{Vect}(I_n, J)) = \|M - p(M)\|$, où $p(M)$ est la projection de M sur $\operatorname{Vect}(I_n, J)$. On peut écrire $p(M) = aI_n + bJ$, et en utilisant le fait que $M - p(M) \in \operatorname{Vect}(I_n, J)^\perp$ on trouve a et b.

Exercice.
Calculer $\inf\limits_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - at^2 - bt - c \right)^2 \mathrm{d}t.$

Solution. On note $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. On note $e_0 : t \mapsto 1$, $e_1 : t \mapsto t$, $e_2 : t \mapsto t^2$, et $F = \operatorname{Vect}(e_0, e_1, e_2)$. On cherche donc à calculer $\inf\limits_{g \in F} \|f - g\|^2$, où $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$, c'est à dire $\mathrm{d}(f, F)^2$. Or $\mathrm{d}(f, F) = \|f - p_F(f)\|$, où $p_F \in F$: on a donc $p_F(f) = \alpha e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2$. Il y a ensuite plusieurs manières de procéder : soit on utilise le fait que $f - p_F(f) \in F^\perp$ pour trouver des équations satisfaites par α, β et γ. Soit on applique l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille (e_0, e_1, e_2) pour trouver une base orthonormale (e_0', e_1', e_2') de F, et on utilise la forme $p_F(f) = \langle e_0', f \rangle e_0' + \langle e_1', f \rangle e_1' + \langle e_2', f \rangle e_2'$.

Exercice.
Calculer $\inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t - a\cos(t) - b\sin(t))^2 \,\mathrm{d}t.$

Solution. Analogue à l'exercice précédent.

Exercice.
Soient E un espace préhilbertien réel et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|.$$

Solution. L'implication directe est évidente d'après le théorème de Pythagore. Réciproquement, on suppose que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|x+\lambda y\| \geqslant \|x\|$. En passant au carré et en développant, on a alors $2\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geqslant 0$, donc on a un polynôme du 2nd degré positif, son discriminant doit donc être négatif, c'est-à-dire $4\langle x, y\rangle^2 \geqslant 0$, donc $\langle x, y\rangle = 0$ et x et y sont orthogonaux.

Exercice.
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire : $\forall P = \sum_{k=0}^3 a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^3 b_k X^k$, $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^3 a_k b_k$. On pose $H = \{\, P \in E,\ P(1) = 0 \,\}$.

1. Déterminer la dimension et une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.
3. En déduire la distance de X à H.

Solution.

1. H est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$, donc est de dimension 3. On montre que $(X-1, X^2-1, X^3-1)$ forme une base de H : c'est une famille libre (car ce sont des polynômes échelonnés)
2. On applique le procédé de Gram-Schmidt à la famille de la question 1 pour trouver une base orthonormale (P_1, P_2, P_3).
3. La distance vaut $\|X - p(X)\|^2$ où $p(X)$ est la projection orthogonale de X sur H : $p(X) = \sum_{j=1}^3 \langle P_i, X\rangle P_i$.

Exercice.
On considère $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$. On pose $F = \{\, f \in E,\ f(0) = 0 \,\}$.

1. Calculer $F^\perp$.
2. En déduire que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

Solution.

1. Si $g \in F^\perp$, on considère la fonction $x \mapsto xg(x)$ qui appartient à F : on a donc $\int_0^1 xg(x)^2 = 0$, or la fonction $x \mapsto xg(x)^2$ est positive, donc la fonction est nulle, et $g(x) = 0$ pour $x \in]0,1]$, puis par continuité de g on a aussi $g(0) = 0$, donc $g = 0$ et $F^\perp = \{0\}$.
2. On a $F \neq E$, donc F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice.
Soient E un espace préhilbertien et $(e_1, ...e_n) \in E$ des vecteurs de norme 1 de E tels que :

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle^2.$$

Montrer que E est de dimension finie n et que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E.

Solution. Commençons par montrer que la famille est orthogonale (ceci montrera en particulier qu'elle est libre) : pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a $1 = \|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle e_i, e_k\rangle^2 = \|e_i\|^2 + \sum_{k\neq i} \langle e_i, e_k\rangle^2 = 1 + \sum_{k\neq i} \langle e_i, e_k\rangle^2$, donc pour $k \neq i$, $\langle e_i, e_k\rangle = 0$, donc la famille est orthogonale, donc libre. Il reste ainsi à montrer que la famille est génératrice. Si la famille est une base orthonormale, alors pour tout $x \in E$, $x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$. Pour montrer que la famille est génératrice, il suffit ainsi de montrer que $x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$: en effet, en notant $y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$, on a $\|x-y\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x-y, e_k\rangle^2 = \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k\rangle - \langle y, e_k\rangle)^2 = 0$, donc $x = y$.

Exercice.
Soient E un espace vectoriel euclidien non nul et p un projecteur de E.

1. On suppose : $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Si $x \in (\mathrm{Ker}(p))^\perp$. Montrer que $(\mathrm{Ker}(p))^\perp \subset \mathrm{Im}(p)$.
2. Montrer que p est un projecteur orthogonal de E si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Solution.

1. Si $x \in (\mathrm{Ker}(p))^\perp$, alors $\|x\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2 = \|p(x) - x + x\|^2 = \|p(x) - x\|^2 + \|x\|^2$ d'après le théorème de Pythagore car $p(x) - x \in \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi, $\|p(x) - x\| = 0$, donc $p(x) = x$ et $x \in \mathrm{Im}(p)$.
2. Si p est un projecteur orthogonal de E, alors on a l'inégalité d'après le théorème de Pythagore. Réciproquement, il faut montrer que $\mathrm{Ker}(p)^\perp = \mathrm{Im}(p)$. Or on a une inclusion, et d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(E) - \dim\mathrm{Ker}(p) = \dim\mathrm{Ker}(p)^\perp$, donc on a égalité et p est un projecteur orthogonal.

Exercice.
Soient E un espace préhilbertien et $(x_1, ..., x_p) \in E$. On appelle matrice de Gram de la famille $(x_1, ..., x_p)$ la matrice $M(x_1, ..., x_p) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et on appelle déterminant de Gram la quantité $G(x_1, ..., x_p) = \det M(x_1, ..., x_p)$.

1. Montrer que la famille $(x_1, ..., x_p)$ est libre si et seulement si $G(x_1, ..., x_p) \neq 0$.
2. On suppose que la famille $(x_1, ..., x_p)$ est libre. On note $F = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_p)$. Soit $x \in E$. En utilisant la projection de x sur F, montrer que $G(x, x_1, ..., x_p) = \mathrm{d}(x, F)^2 G(x_1, ..., x_p)$.

Solution.

1.

Exercice.
Soient $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.
2. On suppose que : $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in E$, $\|f^*(x)\| \leqslant \|x\|$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - id_E) = \mathrm{Ker}(f^* - id_E)$.