3.4 Théorème de convergence de Féjer L^p + application

Leçons : 209, 213, 241, 246.

Référence : [Amr] p190.

Prérequis : noyaux de Féjer et Dirichlet, produit de convolution, théorèmes de densité dans les espaces L^p, théorème de Heine, espaces de Hilbert.

Notations : on note $(K_N)_N$ le noyau de Féjer, et pour toute fonction f 2π-périodique on note $\sigma_N(f) = f * K_N$.

Lemme : Si $f \in L^p_{2\pi}$, l'application $a \in \mathbb{R} \mapsto \tau_a f$ est uniformément continue.

Théorème (Féjer) :

1. Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (admis).
2. Si $f \in L^p_{2\pi}$, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_p \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Application :

1. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$, et pour tout $f \in L^2_{2\pi}$, $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$.
2. On a $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Preuve du lemme. Soit $f \in L^p_{2\pi}$. Soit $\varepsilon > 0$.

- On suppose que f est continue. D'après le théorème de Heine, la fonction f est alors uniformément continue sur $[0, 2\pi]$, donc il existe $\delta > 0$ tel que :
$$\forall a, b \in [0, 2\pi],\ |a - b| \leqslant \delta \implies |f(a) - f(b)| \leqslant \varepsilon.$$
Ainsi, pour tout $a, b \in [0, 2\pi]$ tel que $|a - b| \leqslant \delta$,
$$\begin{aligned}\|\tau_a f - \tau_b f\|_p^p &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x-a) - f(x-b)|^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant \varepsilon^p,\end{aligned}$$
donc $a \mapsto \tau_a f$ est uniformément continue sur $[0, 2\pi]$, donc sur $\mathbb{R}$ par périodicité.
- Dans le cas général, par densité de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dans $L^p_{2\pi}$, il existe une fonction $h \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $\|f - h\|_p \leqslant \varepsilon$. Or d'après ce qui précède, la fonction $a \mapsto \tau_a h$ est uniformément continue, on note δ la constante associée à ε. Alors, pour tout $a, b \in [0, 2\pi]$ tel que $|a - b| \leqslant \delta$, on a
$$\|\tau_a f - \tau_b f\|_p \leqslant \|\tau_a f - \tau_a h\|_p + \|\tau_a h - \tau_b h\|_p + \|\tau_b h - \tau_b f\|_p \leqslant 3\varepsilon.$$
D'où le lemme.

□

Preuve du point 2 du théorème. On a : pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\|\sigma_N(f) - f\|_p^p &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_N(f)(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_N(t)\mathrm{d}t\right|^p \mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|^p K_N(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x,\end{aligned}$$
d'après l'inégalité de Hölder appliqué à la mesure de probabilité donnée par $\mu(dy) = \frac{K_N(y)\mathrm{d}y}{2\pi}$. Ainsi, d'après le théorème de Fubini-Tonelli :
$$\begin{aligned}\|\sigma_N(f) - f\|_p^p &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \sigma_N(g)(0),\end{aligned}$$
où $g(t) = \|\tau_{-t} f - f\|_p^p$. D'après le lemme, la fonction g est continue, donc d'après le point 1 du théorème de Féjer, $\|\sigma_N(g) - g\|_\infty \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc en particulier $\sigma_N(g)(0) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} g(0) = 0$. D'où $\|\sigma_N(f) - f\|_p \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

□

Preuve de l'application. Le premier point résulte du théorème de Féjer puisque pour tout $f \in L^p_{2\pi}$, $\sigma_N(f) \in \mathrm{Vect}((e_n)_{n\in\mathbb{Z}})$. Pour le deuxième point, on considère la fonction 2π-périodique f définie par :

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ f(x) = x^2.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier $f \in L^2_{2\pi}$, le premier point nous donne alors

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2,$$

avec :

- $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{5}$.
- $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}$.
- Pour tout $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{x^2}{in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\frac{2xe^{-inx}}{in}\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi in}\left[\frac{-2xe^{-inx}}{in}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2e^{inx}}{in}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2i(-1)^n}{n^2} + 0 \end{aligned}$$

d'où $\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 2\sum_{n\geqslant 1}\frac{4}{n^4}$, et donc

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

Complément (preuve du point 1 du théorème).

Soient $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $N \geqslant 1$. Alors, pour tout $x \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} |\sigma_N(f)(x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)K_N(t)\mathrm{d}t - f(x)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(x-t) - f(x))K_N(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x-t) - f(x)|K_N(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le segment $[0, 2\pi]$ donc d'après le théorème de Heine :

$$\exists \delta > 0,\ \forall x, y \in [0, 2\pi],\ |x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, la suite $(K_N)_{N\geqslant 1}$ est une approximation de l'unité, donc

$$\int_{|x|\geqslant\delta} K_N(t)\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc il existe $N_0 \geqslant 1$ tel que, pour tout $N \geqslant N_0$, $\int_{|x|\geqslant\delta} K_N(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon\pi}{2\|f\|_\infty}$. Alors, pour tout $N \geqslant N_0$:

$$\begin{aligned} |\sigma_N(f)(x) - f(x)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x-t) - f(x)|K_N(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|x|\geqslant\delta}|f(x-t) - f(x)|K_N(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{|x|<\delta}|f(x-t) - f(x)|K_N(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{|x|\geqslant\delta}K_N(t)\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{|x|<\delta}K_N(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall N \geqslant N_0,\ \|\sigma_N(f) - f\|_\infty \leqslant \varepsilon,$$

d'où le résultat voulu.