

Couplages et développements

Sacha Quayle

Table des matières

1	Leçons d'algèbre et géométrie	2
2	Leçons d'analyse et probabilités	6
3	Développements	10
3.1	Densité des fonctions continues nulle part dérivables	10
3.2	Théorème de Banach-Steinhaus + série de Fourier divergente	11
3.3	Théorème du point fixe + Cauchy-Lipschitz	12
3.4	Théorème de convergence de Féjer L^p + application	13
3.5	Théorème de Weierstrass par la convolution	15
3.6	Théorème d'inversion de Fourier	16
3.7	Equivalent de Stirling par les intégrales de Wallis	18
3.8	Développement asymptotique de la série harmonique	19
3.9	Formule des compléments	20
3.10	Espace de Bergman du disque unité	21
3.11	Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible	22
3.12	Equation de Bessel	23
3.13	Paul-Lévy, théorème central limite et applications	24
3.14	Marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d	27
3.15	Théorème de Cochran et test du χ^2	29
3.16	Inégalité de Hoeffding et application	31
3.17	Lemme de Morse	32
3.18	Méthode du gradient à pas optimal	34
3.19	Théorème des extrémis liés	35
3.20	Surjectivité de l'exponentielle matricielle	37
3.21	Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$	38
3.22	Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$	39
3.23	Irréductibilité des polynômes cyclotomiques	40
3.24	Critère d'Eisenstein	41
3.25	Dénombrement des polynômes irréductibles unitaires sur un corps fini	42
3.26	Théorème des deux carrés	43
3.27	Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques	44
3.28	Structure des groupes abéliens finis	45
3.29	Caractérisation des matrices nilpotentes par la trace + Burnside	46
3.30	Simplicité de A_n	47
3.31	Isométries du cube	48
3.32	Déterminant de Gram	49
3.33	Suite de polygones	50
3.34	Décomposition polaire	51
3.35	Décomposition de Dunford	52
3.36	Réduction de Frobenius	53
3.37	Réduction des endomorphismes normaux	54
3.38	Décomposition de LU et de Cholesky	55
3.39	Etude de $O(p, q)$	56

1 Leçons d'algèbre et géométrie

101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

- Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques.
- Isométries du cube.

102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

- Structure des groupes abéliens finis.
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.

103 - Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

- Simplicité de A_n .
- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$.

104 - Groupes finis. Exemples et applications.

- Structure des groupes abéliens finis.
- Simplicité de A_n .

105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

- Isométries du cube.
- Simplicité de A_n .

106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

- Etude de $O(p, q)$.
- Théorème de Burnside.

108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$.
- Simplicité de A_n .

120 - Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

- Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques.
- Structure des groupes abéliens finis.

121 - Nombres premiers. Applications.

- Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques.
- Théorème des deux carrés.
- Critère d'Eisenstein.

122 - Anneaux principaux. Exemples et applications.

- Critère d'Eisenstein.
- Théorème des deux carrés.

123 - Corps finis. Applications.

- Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques.
- Dénombrement des polynômes irréductibles sur un corps fini.

125 - Extensions de corps. Exemples et applications.

- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
- Dénombrement des polynômes irréductibles sur un corps fini.

126 - Exemples d'équations en arithmétique.

- Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques.
- Théorème des deux carrés.

141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

- Critère d'Eisenstein.
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.

142 - PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

- Structure des groupes abéliens finis.
- Critère d'Eisenstein.

144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
- Dénombrement des polynômes irréductibles sur un corps fini.

148 - Exemples de décompositions de matrices. Applications.

- Réduction de Frobenius.
- Décomposition LU et Cholesky.

149 - Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

- Suite de polygones.
- Théorème de Burnside.
- Méthode du gradient à pas optimal.

151 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

- Réduction de Frobenius.
- Théorème des extrémis liés.

152 - Déterminant. Exemples et applications.

- Déterminant de Gram.
- Suite de polygones.

153 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

- Réduction de Frobenius.
- Décomposition de Dunford.

154 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

- Réduction de Frobenius.
- Réduction des endomorphismes normaux.

155 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

- Décomposition polaire.
- Décomposition de Dunford.
- Suite de polygones.

156 - Exponentielle de matrices. Applications.

- Etude de $O(p, q)$.
- Surjectivité de l'exponentielle matricielle.

157 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

- Décomposition de Dunford.
- Théorème de Burnside.

158 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitienne.

- Etude de $O(p, q)$.
- Méthode du gradient à pas optimal.

159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

- Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.
- Théorème des extrémums liés.

160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

- Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.
- Réduction des endomorphismes normaux.
- Décomposition polaire.

161 - Distances dans un espace affine euclidien. Isométries.

- Isométries du cube.
- Déterminant de Gram.

162 - Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

- Décomposition LU et Cholesky.
- Méthode du gradient à pas optimal.

170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

- Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques.
- Etude de $O(p, q)$.

171 - Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

- Etude de $O(p, q)$.
- Lemme de Morse.

181 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Impasse.

190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

- Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques.
- Dénombrement des polynômes irréductibles sur un corps fini.

191 - Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

- Isométries du cube.
- Déterminant de Gram.

2 Leçons d'analyse et probabilités

201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications.

- Densité des fonctions continues nulle part dérivables.
- Théorème d'inversion de Fourier.

203 - Utilisation de la notion de compacité.

- Théorème de Weierstrass par la convolution.
- Densité des fonctions continues nulle part dérivables.

204 - Connexité. Exemples et applications.

- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$.
- Surjectivité de l'exponentielle matricielle.

205 - Espaces complets. Exemples et applications.

- Espace de Bergman du disque unité.
- Théorème du point fixe + Cauchy-Lipschitz.
- Densité des fonctions continues nulle part dérivables.

206 - Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

- Théorème des extrémums liés.
- Lemme de Morse.

208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

- Théorème de Banach-Steinhaus + série de Fourier divergente.
- Théorème du point fixe + Cauchy-Lipschitz.

209 - Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

- Théorème de convergence de Féjer.
- Théorème de Weierstrass par la convolution.

213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

- Espace de Bergman du disque unité.
- Théorème de convergence de Féjer.

214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

- Surjectivité de l'exponentielle matricielle.
- Lemme de Morse.

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n .

- Lemme de Morse.
- Théorème des extrémums liés.

219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

- Méthode du gradient à pas optimal.
- Théorème des extrémums liés.

220 - Equations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

- Equation de Bessel.
- Théorème du point fixe + Cauchy-Lipschitz.

221 - Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et Applications.

- Equation de Bessel.
- Théorème du point fixe + Cauchy-Lipschitz.

223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

- Développement asymptotique de la série harmonique.
- Equivalent de Stirling par les intégrales de Wallis.

224 - Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

- Développement asymptotique de la série harmonique.
- Equivalent de Stirling par les intégrales de Wallis.

226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

- Méthode du gradient à pas optimal.
- Théorème du point fixe + Cauchy-Lipschitz.

228 - Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variables réelle. Exemples et applications.

- Densité des fonctions continues nulle part dérivables.
- Théorème de Weierstrass par la convolution.

229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

- Méthode du gradient à pas optimal.
- Inégalité de Hoeffding.

230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

- Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible.
- Développement asymptotique de la série harmonique.

234 - Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

- Espace de Bergman du disque unité.
- Théorème d'inversion de Fourier.

235 - Problèmes d'interversion en analyse.

- Théorème de Banach-Steinhaus + série de Fourier divergente.
- Théorème d'inversion de Fourier.

236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

- Formule des compléments.
- Théorème d'inversion de Fourier.

239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

- Formule des compléments.
- Théorème d'inversion de Fourier.

241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

- Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible.
- Théorème de convergence de Féjer.

243 - Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

- Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible.
- Equation de Bessel.

245 - Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

- Formule des compléments.
- Espace de Bergman du disque unité.

246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

- Théorème de Banach-Steinhaus + série de Fourier divergente.
- Théorème de convergence de Féjer.

250 - Transformation de Fourier. Applications.

- Théorème d'inversion de Fourier.
- Théorème central limite.

253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.

- Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.
- Méthode du gradient à pas optimal.

261 - Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

- Théorème central limite.
- Théorème de Cochran.

262 - Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

- Théorème central limite.
- Théorème de Cochran.

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

- Théorème de Cochran.
- Marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d .

265 - Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

- Formule des compléments.
- Théorème central limite.

266 - Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

- Marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d .
- Théorème central limite.

267 - Exemples d'utilisations de courbes en dimension 2 ou supérieure.

- Théorème des extrémums liés.
- Formule des compléments.

3 Développements

3.1 Densité des fonctions continues nulle part dérivables

Leçons : 201, 203, 205, 228.

Référence : [Goub] p401.

Prérequis : théorème de Baire.

Théorème : On note \mathcal{C} l'ensemble des fonctions $f : I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues muni de $\|\cdot\|_\infty$. Alors l'ensemble des fonctions de \mathcal{C} nulle part dérivables est dense dans \mathcal{C} .

Idée preuve. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_{\varepsilon,n} = \{f \in \mathcal{C}, \forall x \in I, \exists y \in I, 0 < |y - x| < \varepsilon \text{ et } |f(x) - f(y)| > n|x - y|\}$. On montre alors que :

1. $U_{\varepsilon,n}$ est dense.
2. $U_{\varepsilon,n}$ est ouvert.

On en déduit alors grâce au théorème de Baire que $R = \bigcap_{n \geq 1} U_{1/n,n}$ est dense dans \mathcal{C} , et on montre que toute fonction de R est nulle part dérivable. □

Questions :

1. Pouvez-vous donner un exemple de fonction continue nulle part dérivable ?
2. Comment retrouver le résultat de densité à l'aide de la question précédente ?

Réponses :

1. Voir [Roma] p198 ou [Hau] p163 pour un contre-exemple.
2. Si on se place sur $I = [0, 1]$ et qu'on dispose d'une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue nulle part dérivable : pour toute fonction f continue, il existe une suite de fonctions polynômes $(P_n)_n$ qui converge uniformément vers f (d'après Weierstrass). Alors en posant $g_n = P_n + \frac{g}{n+1}$, g_n est continue nulle part dérivable et $(g_n)_n$ converge uniformément vers f .

3.2 Théorème de Banach-Steinhaus + série de Fourier divergente

Leçons : 208, 235, 246.

Références : [Li] p112, [Goub] p405.

Prérequis : théorème de Baire, noyaux de Féjer et Dirichlet, applications linéaires continues.

Théorème (Banach-Steinhaus) : Soient E, F des EVN avec E un Banach. Soit $(T_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}_c(E, F)^I$. On suppose : $\forall x \in E, \sup_{i \in I} \|T_i x\|_F < \infty$. Alors : $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

Théorème : Il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ continue 2π -périodique telle que $\sup_{N \in \mathbb{N}} |S_N(f)(0)| = \infty$, i.e. la série de Fourier de f en 0 diverge.

Idée preuve. Voir [Li] pour le théorème de Banach-Steinhaus. Pour le théorème, on considère pour tout $N \in \mathbb{N}$ l'application linéaire $l_N : \mathcal{C}_{2\pi} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $l_N(f) = S_N(f)(0)$. On montre que l_N est une forme linéaire continue, puis que $\sup_{N \in \mathbb{N}} \|l_N\| = \infty$. On obtient alors le théorème par contraposée du théorème de Banach-Steinhaus. □

3.3 Théorème du point fixe + Cauchy-Lipschitz

Leçons : 205, 208, 220, 221, 226.

Référence : [Rou] p?.

Prérequis : normes équivalentes, espaces complets, notions de base EDO.

Théorème (point fixe) : Soit (E, d) un espace métrique complet non vide, $f : E \rightarrow E$ k -contractante. Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$. En outre, si $x_0 \in E$ et $(x_n)_n$ est la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$, alors $(x_n)_n$ converge vers a et $d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$.

Théorème (Cauchy-Lipschitz global) : Soient $n \geq 1$, I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et globalement lipschitzienne, c'est-à-dire : pour tout $K \subset I$ compact, il existe $k > 0$ tel que

$$\forall t \in K, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k \|y - z\|.$$

Alors, pour tout $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy $y' = f(t, y)$ avec la condition initiale $y(t_0) = x$ admet une unique solution définie sur I tout entier.

Idée preuve. Voir [Rou] pour le théorème du point fixe. Pour le théorème de Cauchy-Lipschitz global, on se ramène à un problème de point fixe, le problème de Cauchy étant équivalent à $F(y) = y$, où $F : E \rightarrow E$ (avec $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$) est définie par :

$$\forall y \in E, \forall t \in I, F(y)(t) = x + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Puisque $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace complet, pour montrer que F admet un unique point fixe il suffit de montrer qu'elle est contractante, mais elle ne l'est pas pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On va donc introduire une norme "à poids" sur E , équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ (l'espace sera donc toujours complet), et qui rend la fonction F contractante. □

Questions :

1. Donner des contre-exemples au théorème du point fixe.
2. En conservant les notations du théorème du point fixe, si une itérée de la fonction f est contractante, que peut-on dire ?
3. Connaissez-vous d'autres preuves du théorème de Cauchy-Lipschitz que celle avec la norme à poids ?

Réponses :

1. (Voir [Rou] p?)
 - Si E n'est pas complet : on considère $E =]0, 1[$ et $f(x) = x/2$, il n'y a pas existence.
 - Si la fonction n'est pas contractante : on considère $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, alors il n'y a pas existence. Autre contre-ex : si $f(x) = x$, il n'y a pas unicité.
2. Si une itérée f^p est contractante, alors f^p admet un unique point fixe a . On montre alors que $f(a)$ est aussi un point fixe de f^p , donc $f(a) = a$ et f admet un point fixe, et par unicité pour f^p on déduit l'unicité pour f : f admet donc un unique point fixe.
3. On utilise la question précédente, en montrant qu'il existe p assez grand tel que F^p est contractante pour la norme infinie.

3.4 Théorème de convergence de Féjer L^p + application

Leçons : 209, 213, 241, 246.

Référence : [Amr] p190.

Prérequis : noyaux de Féjer et Dirichlet, produit de convolution, théorèmes de densité dans les espaces L^p , théorème de Heine, espaces de Hilbert.

Notations : on note $(K_N)_N$ le noyau de Féjer, et pour toute fonction f 2π -périodique on note $\sigma_N(f) = f * K_N$.

Lemme : Si $f \in L^p_{2\pi}$, l'application $a \in \mathbb{R} \mapsto \tau_a f$ est uniformément continue.

Théorème (Féjer) :

1. Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ (admis).
2. Si $f \in L^p_{2\pi}$, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_p \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

Application :

1. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$, et pour tout $f \in L^2_{2\pi}$, $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$.
2. On a $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Preuve du lemme. Soit $f \in L^p_{2\pi}$. Soit $\varepsilon > 0$.

- On suppose que f est continue. D'après le théorème de Heine, la fonction f est alors uniformément continue sur $[0, 2\pi]$, donc il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall a, b \in [0, 2\pi], |a - b| \leq \delta \implies |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $a, b \in [0, 2\pi]$ tel que $|a - b| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} \|\tau_a f - \tau_b f\|_p^p &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x - a) - f(x - b)|^p dx \\ &\leq \varepsilon^p, \end{aligned}$$

donc $a \mapsto \tau_a f$ est uniformément continue sur $[0, 2\pi]$, donc sur \mathbb{R} par périodicité.

- Dans le cas général, par densité de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dans $L^p_{2\pi}$, il existe une fonction $h \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $\|f - h\|_p \leq \varepsilon$. Or d'après ce qui précède, la fonction $a \mapsto \tau_a h$ est uniformément continue, on note δ la constante associée à ε . Alors, pour tout $a, b \in [0, 2\pi]$ tel que $|a - b| \leq \delta$, on a

$$\|\tau_a f - \tau_b f\|_p \leq \|\tau_a f - \tau_a h\|_p + \|\tau_a h - \tau_b h\|_p + \|\tau_b h - \tau_b f\|_p \leq 3\varepsilon.$$

D'où le lemme. □

Preuve du point 2 du théorème. On a : pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|\sigma_N(f) - f\|_p^p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_N(f)(x) - f(x)|^p dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_N(t) dt \right|^p dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|^p K_N(t) dt dx, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder appliqué à la mesure de probabilité donnée par $\mu(dy) = \frac{K_N(y)dy}{2\pi}$. Ainsi, d'après le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \|\sigma_N(f) - f\|_p^p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|^p dx dt \\ &= \sigma_N(g)(0), \end{aligned}$$

où $g(t) = \|\tau_{-t} f - f\|_p^p$. D'après le lemme, la fonction g est continue, donc d'après le point 1 du théorème de Féjer, $\|\sigma_N(g) - g\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, donc en particulier $\sigma_N(g)(0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} g(0) = 0$. D'où $\|\sigma_N(f) - f\|_p \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. □

Preuve de l'application. Le premier point résulte du théorème de Féjer puisque pour tout $f \in L^p_{2\pi}$, $\sigma_N(f) \in \text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{Z}})$. Pour le deuxième point, on considère la fonction 2π -périodique f définie par :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = x^2.$$

La fonction f est continue sur \mathbb{R} , donc en particulier $f \in L^2_{2\pi}$, le premier point nous donne alors

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2,$$

avec :

$$- \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5}.$$

$$- c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

- Pour tout $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{x^2}{in} e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{2xe^{-inx}}{in} dx \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi in} \left[\frac{-2xe^{-inx}}{in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi in} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2e^{inx}}{in} dx \\ &= \frac{2i(-1)^n}{n^2} + 0 \end{aligned}$$

d'où $\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{4}{n^4}$, et donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

Complément (preuve du point 1 du théorème).

Soient $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $N \geq 1$. Alors, pour tout $x \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} |\sigma_N(f)(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) K_N(t) dt - f(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x-t) - f(x)) K_N(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-t) - f(x)| K_N(t) dt \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le segment $[0, 2\pi]$ donc d'après le théorème de Heine :

$$\exists \delta > 0, \forall x, y \in [0, 2\pi], |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, la suite $(K_N)_{N \geq 1}$ est une approximation de l'unité, donc

$$\int_{|x| \geq \delta} K_N(t) dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

donc il existe $N_0 \geq 1$ tel que, pour tout $N \geq N_0$, $\int_{|x| \geq \delta} K_N(t) dt \leq \frac{\varepsilon \pi}{2\|f\|_{\infty}}$. Alors, pour tout $N \geq N_0$:

$$\begin{aligned} |\sigma_N(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-t) - f(x)| K_N(t) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \geq \delta} |f(x-t) - f(x)| K_N(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|x| < \delta} |f(x-t) - f(x)| K_N(t) dt \\ &\leq \frac{\|f\|_{\infty}}{\pi} \int_{|x| \geq \delta} K_N(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{|x| < \delta} K_N(t) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall N \geq N_0, \|\sigma_N(f) - f\|_{\infty} \leq \varepsilon,$$

d'où le résultat voulu.

3.5 Théorème de Weierstrass par la convolution

Leçons : 203, 209, 228.

Référence : [Goub] p284.

Prérequis : produit de convolution, approximation de l'unité, théorème de Heine.

Lemme : Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue à support compact, et $(\chi_n)_n$ est une approximation de l'unité sur \mathbb{R} , alors $(f * \chi_n)_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers f .

Théorème (Weierstrass) : Soit J un segment de \mathbb{R} et $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ continue, alors f est limite uniforme sur J de fonctions polynômes.

Application : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t)t^n dt = 0$. Alors $f = 0$.

Idée preuve. On démontre le théorème de Weierstrass pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$, en utilisant l'approximation de l'unité définie par $p_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{a_n}$ si $|t| < 1$ et $p_n(t) = 0$ sinon, où $a_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$. On a alors convergence uniforme de $(f * p_n)_n$ vers f , et on montre que $f * p_n$ est une fonction polynôme. Si f est une fonction continue sur un segment quelconque $[a, b]$ de \mathbb{R} , on la prolonge en une fonction continue nulle en dehors de $[c, d]$ (avec $c < a < b < d$) puis on effectue un changement de variable pour se ramener à $[-1/2, 1/2]$. □

3.6 Théorème d'inversion de Fourier

Leçons : 201, 234, 235, 236, 239, 250.

Référence : [Amr] p116.

Prérequis : propriétés de base transformation de Fourier, théorème de dérivation sous le signe intégral, théorème de Fubini, approximation de l'unité, Riesz-Fischer.

Lemme : On considère pour tout $s > 0$ le noyau de Gauss $\gamma_s : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi s^d}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2s}\right)$. Alors $\hat{\gamma}_s = \left(\frac{2\pi}{s}\right)^{d/2} \gamma_{1/s}$.

Théorème (inversion de Fourier) : Soit $f \in L^1$ tel que $\hat{f} \in L^1$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\hat{\hat{f}}(x) = (2\pi)^d f(-x)$.

Application : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Cauchy de paramètre 1. Alors la fonction caractéristique de X est $\varphi_X : t \mapsto e^{-|t|}$.

Preuve du lemme. On commence par le cas $d = 1$ (le cas $d \geq 2$ se déduit grâce au théorème de Fubini). On applique le théorème de dérivation sous le signe intégral à $\hat{\gamma}_s$ et on trouve l'équation différentielle :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{\gamma}_s'(\xi) = -s\xi \hat{\gamma}_s, \text{ donc } \hat{\gamma}_s(\xi) = \hat{\gamma}_s(0)e^{-s\xi^2/2} = \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \gamma_{1/s}(\xi).$$

□

Preuve du théorème d'inversion. Soit $f \in L^1$ tel que $\hat{f} \in L^1$. On notera également $\mathcal{F}(f)$ pour \hat{f} . On démontre la formule d'inversion par étapes :

1. Pour les noyaux de Gauss : d'après le lemme, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\hat{\gamma}_s(\xi) = \left(\frac{2\pi}{s}\right)^{d/2} \widehat{\gamma_{1/s}}(\xi) = \left(\frac{2\pi}{s}\right)^{d/2} (2\pi s)^{d/2} \gamma_s(\xi) = (2\pi)^d \gamma_s(-\xi),$$

par parité de γ_s , d'où la formule d'inversion.

2. Pour les $f * \gamma_s$: on a, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \widehat{f * \gamma_s}(-a) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f * \gamma_s}(x) e^{i\langle x, a \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) \hat{\gamma}_s(x) e^{i\langle x, a \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathcal{F}(\hat{\gamma}_s(x) e^{i\langle x, a \rangle}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{\gamma}_s(x - a) dx \\ &= (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \gamma_s(a - x) dx \\ &= (2\pi)^d f * \gamma_s(a), \end{aligned}$$

d'où la formule d'inversion.

3. Enfin, pour f , on utilise le fait que $(\gamma_s)_{s>0}$ est une approximation de l'unité : on a alors $\|f * \gamma_s - f\|_1 \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$. D'après le théorème de Riesz-Fischer, il existe une suite extraite $(s_n)_{n \geq 1}$ tel que $(f * \gamma_{s_n})_n$ converge presque partout vers f . Montrons que $(\widehat{f * \gamma_{s_n}})_n$ converge presque partout vers \hat{f} . On a :

$$\begin{aligned} \|\widehat{f * \gamma_{s_n}} - \hat{f}\|_\infty &\leq \|\widehat{f * \gamma_{s_n}} - \hat{f}\|_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f * \gamma_{s_n}} - \hat{f}|, \end{aligned}$$

or $|\widehat{f * \gamma_{s_n}} - \hat{f}| = |\hat{f} \hat{\gamma}_{s_n} - \hat{f}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et $|\widehat{f * \gamma_{s_n}} - \hat{f}| \leq 2|\hat{f}| \in L^1$, donc d'après le théorème de convergence dominée

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f * \gamma_{s_n}} - \hat{f}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

soit $\|\widehat{f * \gamma_{s_n}} - \widehat{f}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et donc $(\widehat{f * \gamma_{s_n}})_n$ converge presque partout vers \widehat{f} . En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité

$$\widehat{f * \gamma_{s_n}} \stackrel{p.p.}{=} (2\pi)^d f * \gamma_{s_n}(-.),$$

on obtient ainsi la formule d'inversion pour f .

□

Preuve de l'application. On note f la densité de X et on pose $g(x) = e^{-|x|}$. Alors $g \in L^1(\mathbb{R})$, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^0 e^{x(1-i\xi)} dx + \int_0^{\infty} e^{-x(1+i\xi)} dx \\ &= \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} \\ &= \frac{2}{1+\xi^2} = 2\pi f(\xi), \end{aligned}$$

et $f \in L^1$, donc d'après la formule d'inversion, on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(-x) = 2\pi g(x)$, soit $\varphi_X(x) = e^{-|x|}$.

□

Questions :

1. Connaissez-vous une autre démonstration du lemme ?

Réponses :

1. Par l'analyse complexe (voir [Amr] p156).

3.7 Équivalent de Stirling par les intégrales de Wallis

Leçons : 223, 224.

Référence : [Goub] p126 et p211.

Prérequis : intégration par parties, équivalents de suites, théorème de comparaison.

Lemme : On a l'équivalent suivant : $\frac{1}{p} \left(\frac{4^p p!^2}{(2p)!} \right)^2 \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \pi$.

Théorème (Stirling) : On a l'équivalent suivant : $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$.

Preuve. Voir [Goub].

□

3.8 Développement asymptotique de la série harmonique

Leçons : 223, 224, 230.

Référence : [FGNc] p156.

Prérequis : sommation de la relation d'équivalence, séries télescopiques, comparaison série-intégrale.

Théorème : On note $(H_n)_n$ la suite des sommes partielles de la série harmonique. Alors on a le développement asymptotique : $H_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Corollaire : Si $k_n = \min \{k \in \mathbb{N}, H_k \geq n\}$, alors $k_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{n-\gamma}$.

Preuve. Voir [FGNc].

□

3.9 Formule des compléments

Leçons : 236, 239, 245, 265, 267.

Référence : [SS] p79 et p164.

Prérequis : théorème de prolongement analytique, théorème des résidus.

Lemme : On pose, pour $0 < \alpha < 1$, $I_\alpha = \int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{1+v} dv$. Alors $I_\alpha = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

Théorème : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \Re(z) < 1$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Idée preuve. Pour le théorème, il suffit de montrer le résultat pour $0 < \alpha < 1$ d'après le théorème du prolongement analytique. On montre alors par un changement de variable que, pour tout $0 < \alpha < 1$, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = I_{1-\alpha} = \frac{\pi}{\sin(\pi(1-z))} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, d'après le lemme. Pour la preuve du lemme, on effectue d'abord un changement de variable, puis on applique le théorème des résidus à la fonction $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$ au contour rectangulaire entre $-R$, R et 0 , 2π .

□

Questions :

1. Comment interpréter géométriquement l'indice ?
2. Applications ?

Réponses :

1. Nombre de tours (dans le sens direct).
2. On retrouve la valeur de l'intégrale de Gauss en évaluant en $1/2$, on peut aussi montrer que la fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} dont le seul pôle, 1 , est simple (voir [AM]).

3.10 Espace de Bergman du disque unité

Leçons : 201, 205, 208, 213, 234, 245.

Référence : [Berb].

Prérequis : formule de Cauchy, topologie de la convergence uniforme sur tout compact, coordonnées polaires, espaces de Hilbert.

On note D le disque ouvert unité de \mathbb{C} , et on définit $L^2(D)$, l'espace de Bergman des applications de D dans \mathbb{C} , holomorphes et de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue, muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de L^2 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $e_n \in L^2(D)$ défini par $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$.

Lemme : Pour tout $f \in L^2(D)$ et pour tout $K \subset D$ compact, on a

$$\max_{z \in K} |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K, \partial D)} \|f\|_2.$$

Théorème :

1. $(L^2(D), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.
2. La famille $(e_n)_n$ en est une base hilbertienne.

Preuve. Voir [Berb]. □

Questions :

1. Détailler la topologie sur $\mathcal{C}(\Omega)$ et $H(\Omega)$.
2. Donner une CNS sur les coefficients du développement en série entière d'une fonction pour qu'elle soit dans l'espace de Bergman.

Réponses :

1. Voir [AM] et [Berb].
2. La CNS est : la série $\sum \frac{|a_n|^2}{n+1}$ converge.

3.11 Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible

Leçons : 230, 241, 243.

Références : [Berb], [Goub] p252.

Prérequis : séries entières, transformation d'Abel, théorème de Cesaro.

Théorème (Abel angulaire) : Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que la série $\sum a_n$ converge. On fixe $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ et $A_{\theta_0} = \{1 - \rho e^{i\theta}, \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \rho > 0\} \cap D(0, 1)$. Alors $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1, z \in A_{\theta_0}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Théorème (Tauber faible) : Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} S$. Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors la série $\sum a_n$ converge et $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Preuve. Voir [Goub]. □

Remarque : Ici on démontre Tauber faible qui est une réciproque partielle du théorème d'Abel. Il existe une version forte sous l'hypothèse $a_n = O(1/n)$, c'est Tauber fort.

Questions :

1. Pourquoi se restreint-on à un domaine ?
2. Qu'en est-il de la réciproque du théorème d'Abel angulaire ?
3. Que se passe-t-il si le rayon de convergence est > 1 ? Si la série $\sum a_n$ est absolument convergente ?

Réponses :

1. On a besoin de fixer le domaine angulaire pour faire une majoration dans la preuve puisque $\cos(\theta_0) \neq 0$, mais on peut prendre $\theta_0 \neq \pi/2$ aussi proche de $\pi/2$ que l'on veut.
2. La réciproque du théorème d'Abel est généralement fautive : par exemple si $f(z) = \sum (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$, on a $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1} 1/2$, mais la série $\sum (-1)^n$ ne converge pas.
3. Si la série $\sum a_n$ est absolument convergente ou le rayon de convergence est > 1 , le théorème d'Abel angulaire est vrai.

3.12 Equation de Bessel

Leçons : 220, 221, 243.

Référence : [FGNd].

Prérequis : notions de base EDL, wronskien, dérivation séries entières, intégration relations d'équivalence, dérivation sous le signe intégral.

Théorème : On considère l'équation $(E) : xy'' + y' + xy = 0$.

1. Il existe une unique fonction développable en série entière autour de 0 et valant 1 en 0 solution de (E) , c'est $f_0 : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n n!^2} x^{2n}$.
2. Si f est une solution de (E) sur un intervalle $]0, a[$, bornée au voisinage de 0, alors (f, f_0) est liée sur $]0, a[$.
3. On a : $f_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta$.

Preuve. Voir [FGNd]. □

Questions :

1. Applications ?

Réponses :

1. En développant le cos en série entière et en intégrant terme à terme, on retrouve les intégrales de Wallis d'ordre pair.

3.13 Paul-Lévy, théorème central limite et applications

Leçons : 250, 261, 262, 265, 266.

Références : [GK].

Prérequis : transformation de Fourier, fonction caractéristique, formule de Taylor, lemme de Slutsky. Pour l'application 1 : loi Gamma. Pour l'application 2 : estimateurs, intervalles de confiance.

Définition : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ si : pour toute fonction f continue bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$.

Lemmes (admis) :

1. $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow$ pour toute fonction f continue à support compact, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$.
2. Si $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z$, alors $(1 + \frac{z_n}{n})^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^z$.

Théorème (Paul-Lévy) : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ si et seulement si la suite de fonctions $(\varphi_{X_n})_n$ converge simplement vers φ_X sur \mathbb{R} .

Théorème (TCL) : Soit $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires réelles i.i.d. admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance commune, σ^2 la variance commune et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Alors

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Application 1 : Formule de Stirling.

Application 2 : Intervalle de confiance pour le paramètre d'un n -échantillon d'une loi de Poisson.

Remarque : On ne peut pas présenter tous les résultats démontrés ici, il faut choisir les résultats que l'on démontre en fonction de la leçon. Voir le [ZQ] pour les résultats admis.

Preuve théorème de Paul-Lévy. On suppose $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f_t : x \mapsto e^{itx}$ est continue bornée, donc $\mathbb{E}[f_t(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f_t(X)]$, c'est-à-dire $\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_X(t)$.

Inversement, on suppose que $(\varphi_{X_n})_n$ converge simplement vers φ_X . Soit f une fonction continue à support compact.

- On suppose que f est de classe \mathcal{C}^∞ à support compact. Alors $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (l'espace de Schwartz), donc par bijectivité de la transformée de Fourier, il existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $f = \hat{g}$. Alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-itX_n} g(t) dt \right] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[e^{-itX_n}] g(t) dt,$$

d'après le théorème de Fubini. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{E}[e^{-itX_n}] = \varphi_{X_n}(-t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_X(-t) = \mathbb{E}[e^{-itX}]$, et $|\mathbb{E}[e^{-itX_n}] g(t)| \leq |g(t)|$ avec $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, donc par convergence dominée : $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$.

- Dans le cas général, si $\varepsilon > 0$, par densité il existe une fonction h de classe \mathcal{C}^∞ à support compact tel que $\|f - h\|_\infty \leq \varepsilon$, alors :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| &\leq |\mathbb{E}[f(X_n) - h(X_n)]| + |\mathbb{E}[h(X_n)] - \mathbb{E}[h(X)]| + |\mathbb{E}[h(X) - f(X)]| \\ &\leq 2\varepsilon + |\mathbb{E}[h(X_n)] - \mathbb{E}[h(X)]|, \end{aligned}$$

d'où $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$ d'après ce qui précède, puis $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ d'après le lemme 1. □

Preuve TCL. Quitte à centrer réduire, on peut supposer que $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$. D'après le théorème de Paul-Lévy, il suffit de montrer que la suite de fonctions $(\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}})_n$ converge simplement vers $\varphi_{\mathcal{N}(0,1)} : t \mapsto e^{-t^2/2}$. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, par indépendance on a :

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\sqrt{n}}}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\frac{X_i}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{X_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n.$$

La variable X_1 admet un moment d'ordre 2, donc la fonction φ_{X_1} est de classe \mathcal{C}^2 et d'après la formule de Taylor,

$$\varphi_{X_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n = \left(\varphi_{X_1}(0) + \frac{t}{\sqrt{n}} \varphi'_{X_1}(0) + \frac{t^2}{2n} \varphi''_{X_1}(0) + \frac{\varepsilon_n}{n} \right)^n,$$

où $\varepsilon_n \in \mathbb{C} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Or $\varphi_{X_1}(0) = 1$, $\varphi'_{X_1}(0) = \mathbb{E}[iX_1] = 0$ et $\varphi_{X_1}(0)''(0) = -\mathbb{E}[X_1^2] = -1$, d'où

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-t^2/2},$$

d'après le lemme 2. D'où $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$. □

Preuve application 1. On considère $(X_n)_n$ des variables i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n+1} X_k$. Alors d'après le théorème central limite,

$$\frac{S_n - (n+1)}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Or $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc d'après le lemme de Slutsky,

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{S_n - (n+1)}{\sqrt{n+1}} \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

On calcule alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt$, où f_n est la densité de $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$, de deux manières différentes :

1. On utilise ce qui précède, la convergence en loi étant équivalente à la convergence simple des fonctions de répartition au points de continuité de la fonction de répartition limite, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-t^2/2} dt.$$

2. On utilise la loi Gamma, puisque $\mathcal{E}(1) \sim \Gamma(1, 1)$, on a : $S_n \sim \Gamma(n+1, 1)$, donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(t) dt &= \int_0^1 \sqrt{n} f_{S_n}(\sqrt{nt} + n) dt \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 (\sqrt{nt} + n)^n e^{-(n+t\sqrt{n})} \mathbf{1}_{t \geq -\sqrt{n}} dt \\ &= \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n \int_0^1 \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n e^{-t\sqrt{n}} dt, \end{aligned}$$

avec $\int_0^1 \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n e^{-t\sqrt{n}} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 e^{-t^2/2} dt$ par convergence dominée, donc par unicité de la limite on déduit

$$\frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

d'où la formule de Stirling. □

Preuve application 2. On considère des VA $(X_n)_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$ est à estimer. On note $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. D'après le théorème central limite, on a

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda}} (\overline{X_n} - \lambda) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Or, d'après la loi des grands nombres, \overline{X}_n est un estimateur fortement consistant de λ et par stabilité de la convergence presque sûre par les fonctions continues, $\sqrt{\frac{\lambda}{\overline{X}_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{ps} 1$, donc en particulier $\sqrt{\frac{\lambda}{\overline{X}_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1$. Ainsi, d'après le lemme de Slutsky,

$$\sqrt{\frac{n}{\overline{X}_n}}(\overline{X}_n - \lambda) = \sqrt{\frac{n}{\lambda}}(\overline{X}_n - \lambda) \sqrt{\frac{\lambda}{\overline{X}_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Ainsi, si $\alpha \in]0, 1[$, et q est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors on a

$$\mathbb{P}\left(-q \leq \sqrt{\frac{n}{\overline{X}_n}}(\overline{X}_n - \lambda) \leq q\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 - \alpha,$$

ce qui donne l'intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$ pour λ :

$$\left[\overline{X}_n \pm q \sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}} \right]$$

□

Questions :

1. Est-ce que convergence en loi implique convergence en probabilité en général ?
2. Pourquoi a-t-on besoin du lemme 2 ?

Réponses :

1. Non, on a l'implication si la limite est constante.
2. Pour éviter le recours au log complexe.

3.14 Marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d

Leçons : 264, 266.

Référence : [Ben].

Prérequis : définition et propriétés de base chaînes de Markov, états récurrents/transients, formule de Stirling, théorèmes de Fubini.

La marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d est définie par récurrence par $X_0 = 0$, et $X_{n+1} = X_n + \theta_{n+1}$, où $(\theta_n)_n$ est une suite de VA i.i.d. de loi uniforme sur les vecteurs de la base canonique $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$. On admet les deux lemmes suivants :

Lemme 1 (admis) : L'état x est récurrent si et seulement si $\sum_{k \geq 0} P^k(x, x) = \infty$, où $P^k(x, y)$ est la probabilité d'arriver sur y en partant de x en k étapes.

Lemme 2 (admis) : Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^d . Alors la fonction $\phi \circ \|\cdot\|$ est intégrable si et seulement si la fonction d'une variable réelle positive $t \mapsto t^{d-1}\phi(t)$ est intégrable.

Théorème : Pour $d = 1$ et 2 , la marche aléatoire est récurrente. Pour $d \geq 3$, elle est transiente.

Preuve. La marche aléatoire est irréductible, donc tous les états sont de même nature. Il suffit ainsi de regarder la nature de l'état 0, c'est à dire la nature de la série $\sum_{k \geq 0} P^k(x, x) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_k = 0)$ d'après le lemme 1. Or, on peut montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $\|X_n\|_1 = \sum_{j=1}^d |X_n^{(j)}|$ est de même parité que n , donc pour tout k impair, $\mathbb{P}(X_k = 0) = 0$. On s'intéresse donc à la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$.

1. Pour $d = 1$: pour $n = 2k$ pair, pour revenir en 0 en n étapes il faut se déplacer autant de fois à gauche qu'à droite. Ainsi :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{(2k)!}{k!^2 4^k},$$

donc d'après la formule de Stirling,

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi k}},$$

donc la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$ est divergente et l'état 0 est récurrent.

2. Pour $d = 2$: on note pour tout $k \geq 0$, $X_k = (X_k^1, X_k^2)$ et $\theta_k = (\theta_k^1, \theta_k^2)$. On considère les variables aléatoires définies par

$$S_k = \theta_k^1 + \theta_k^2, \quad T_k = \theta_k^1 - \theta_k^2.$$

On peut montrer, en dressant le tableau des valeurs possibles pour θ_k , que S_k et T_k sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher, et ainsi $(\sum_{k=1}^n S_k)_n$ et $(\sum_{k=1}^n T_k)_n$ définissent des marches aléatoires sur \mathbb{Z} . On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{2k} = 0) &= \mathbb{P}(X_{2k}^1 = X_{2k}^2 = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_{2k}^1 + X_{2k}^2 = X_{2k}^1 - X_{2k}^2 = 0) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} S_i = \sum_{i=1}^{2k} T_i = 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} S_i = 0\right) \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} T_i = 0\right) \\ &\underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} = \frac{1}{\pi k}, \end{aligned}$$

donc la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$ est divergente et l'état 0 est récurrent.

3. On suppose maintenant $d \geq 3$. On note φ la fonction caractéristique de θ_1 . On va montrer dans un premier temps que

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - \varphi^2(t)} dt,$$

puis que cette intégrale est finie. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} I_d(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle x, t \rangle} dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i \sum_{j=1}^d x_j t_j} dt \\ &= \prod_{j=1}^d \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i x_j t_j} dt_j \\ &= 1_{\{x=0\}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit, d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0) &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}[1_{\{X_{2k}=0\}}] = \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}[I_d(X_{2k})] \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \mathbb{E} \left[\int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle X_{2k}, t \rangle} dt \right] \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi_{X_{2k}}(t) dt \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi(t)^{2k} dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{1 - \varphi^2(t)} dt, \end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini-Tonelli. Montrons à présent que l'intégrale est finie. On a :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) &= \mathbb{E}[e^{i\langle t, \theta_1 \rangle}] = \mathbb{E} \left[e^{i \sum_{j=1}^d t_j \theta_1^j} \right] \\ &= \sum_{j=1}^d \frac{1}{2d} (e^{it_j} + e^{-it_j}) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(t_j) \end{aligned}$$

donc la fonction $1 - \varphi^2$ s'annule en $(0, \dots, 0)$, (π, \dots, π) et $(-\pi, \dots, -\pi)$. On regarde par exemple en $(0, \dots, 0)$, les autres cas étant analogues :

$$\begin{aligned} \varphi^2(t) &= \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(t_j) \right)^2 \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{d^2} \left(\sum_{j=1}^d (1 - t_j^2/2) + o(\|t\|^2) \right)^2 \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \left(1 - \sum_{j=1}^d \frac{t_j^2}{2d} + o(\|t\|^2) \right)^2 \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \sum_{j=1}^d \frac{t_j^2}{d} + o(\|t\|^2), \end{aligned}$$

d'où $\frac{1}{1 - \varphi^2(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{d}{\|t\|^2}$. Or, d'après le lemme 2, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\|t\|^2}$ est intégrable en 0 si et seulement si la fonction $t \mapsto t^{d-1} t^{-2} = \frac{1}{t^{-d+3}}$ est intégrable en 0, soit si et seulement si $d > 2$. Donc, pour $d \geq 3$, la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$ est convergente et l'état 0 est transcient. □

Remarque. Voir [CR] pour la preuve du lemme 1, et [GK] pour la preuve du lemme 2. Vu le raisonnement du cas $d \geq 3$, on n'a pas forcément besoin de démontrer les cas $d = 1$ et $d = 2$ (puisque'on obtient une équivalence), mais les preuves restent intéressantes et montrent une application de la formule de Stirling.

3.15 Théorème de Cochran et test du χ^2

Leçons : 261, 262, 266.

Références : [GK], [RS].

Prérequis : matrice de projection orthogonale, vecteurs gaussiens, TCL multi-dimensionnel, loi du χ^2 .

Théorème (Cochran) : Soit $X \sim \mathcal{N}_n(0, I_n)$. Soit $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ une décomposition en somme directe orthogonale. On note $d_i = \dim(E_i)$. Soit π_i la matrice de projection orthogonale sur E_i , et $Y_i = \pi_i X$. Alors :

1. Les Y_i sont des vecteurs gaussiens indépendants et $Y_i \sim \mathcal{N}_{d_i}(0, \pi_i)$.
2. Les VA $\|Y_i\|^2$ sont indépendants, et $\|Y_i\|^2 \sim \chi^2(d_i)$.

Corollaire : Soit (X_1, \dots, X_n) des VA i.i.d. à valeurs dans $\{1, \dots, m\}$. On note pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$: $N_i(n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k=i\}}$ et $\pi_i = \mathbb{P}(X_1 = i)$. Alors :

$$D_n(\pi) = \sum_{i=1}^m \frac{(N_i(n) - n\pi_i)^2}{n\pi_i} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(m-1).$$

Preuve du théorème de Cochran. Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ on note $(e_{k,1}, \dots, e_{k,d_k})$ une base orthonormée de E_k , et P la matrice de passage de la base canonique à la base $(e_{1,1}, \dots, e_{p,d_p})$. On pose $Y = {}^t P X$. Alors d'après les propriétés des vecteurs gaussiens, $Y \sim \mathcal{N}_n(0, {}^t P I_n P) = \mathcal{N}_n(0, I_n)$, donc Y est diagonale et les composantes de Y , qui s'écrivent ${}^t e_{i,j} X$, sont des variables indépendantes. Or la matrice de projection sur E_i s'écrit : $\pi_i = (e_{i,1} \dots e_{i,d_i})^t (e_{i,1} \dots e_{i,d_i})$, donc $Y_i = \pi_i X = \sum_{j=1}^{d_i} ({}^t e_{i,j} X) e_{i,j}$, qui ne dépend que des ${}^t e_{i,j} X$. Ainsi, les (Y_i) sont indépendantes, donc les $\|Y_i\|^2$ aussi. En outre,

$$Y_i = \pi_i X \sim \mathcal{N}_{d_i}(0, \pi_i I_n {}^t \pi_i) = \mathcal{N}_{d_i}(0, \pi_i),$$

car π_i est une matrice de projection, et puisque les $(e_{i,j})$ forment une base orthonormale :

$$\|Y_i\|^2 = \sum_{j=1}^{d_i} ({}^t e_{i,j} X)^2,$$

et les variables ${}^t e_{i,j} X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sont indépendantes, donc $\|Y_i\|^2 \sim \chi^2(d_i)$. D'où le théorème de Cochran. \square

Preuve du corollaire. On pose $\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_m \end{pmatrix}$, et $N(n) = \begin{pmatrix} N_1(n) \\ \vdots \\ N_m(n) \end{pmatrix}$. On pose aussi, pour tout $k \geq 1$, $Y_k = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\{X_k=1\}} \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{\{X_k=m\}} \end{pmatrix}$, de sorte que $N(n) = \sum_{k=1}^n Y_k$. Les vecteurs aléatoires $(Y_k)_{k \geq 1}$ sont i.i.d., d'espérance commune π , et de matrice de covariance commune donnée par :

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i, j \leq m, \text{Cov}[Y_1]_{i,j} &= \text{Cov}(\mathbf{1}_{\{X_k=i\}}, \mathbf{1}_{\{X_k=j\}}) \\ &= \mathbb{E}[(\mathbf{1}_{\{X_k=i\}} - \pi_i)(\mathbf{1}_{\{X_k=j\}} - \pi_j)] \\ &= \mathbb{E}[\delta_{i,j} \mathbf{1}_{\{X_k=i\}}] - \pi_i \pi_j, \end{aligned}$$

soit $\text{Cov}[Y_1] = \Delta_\pi - \pi {}^t \pi =: \Gamma$, où $\Delta_\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pi_m \end{pmatrix}$. Ainsi, d'après le théorème central limite multi-dimensionnel, on a

$$\frac{N(n) - n\pi}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_m(0, \Gamma).$$

On pose $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{k=1}^m \frac{x_k^2}{\pi_k}$. La fonction f est continue, donc on en déduit

$$D_n(\pi) = f\left(\frac{N(n) - n\pi}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} f(Z),$$

où $Z \sim \mathcal{N}_m(0, \Gamma)$. Pour conclure, il reste donc à trouver la loi de $f(Z)$. On peut réécrire $f(Z) = \|U\|^2$ où $U \sim \mathcal{N}_m(0, I_m - \sqrt{\pi}^t \sqrt{\pi})$. Or, on a la décomposition en somme directe orthogonale $\mathbb{R}^m = E_1 \oplus E_2$, où $E_1 = \text{Vect}(\sqrt{\pi})$ et $E_2 = E_1^\perp$. Une matrice de projection orthogonale sur E_1 est $\sqrt{\pi}^t \sqrt{\pi}$ et une matrice de projection orthogonale sur E_2 est $I_m - \sqrt{\pi}^t \sqrt{\pi}$, donc d'après les notations du théorème de Cochran, U a la même loi que Y_2 , et donc $\|U\|^2$ a la même loi que $\|Y_2\|^2 \sim \chi^2(m-1)$. D'où finalement $D_n(\pi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(m-1)$. \square

Remarques :

1. Une autre application importante du théorème de Cochran est la construction d'un intervalle de confiance de l'espérance d'un n -échantillon de variables de loi normale, lorsque la variance est inconnue (voir Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation, Chabanol).
2. Une application importante du corollaire est le test du chi-deux, qui est un test asymptotique : on suppose que l'on dispose d'un n -échantillon X_1, \dots, X_n de variables à valeurs dans un ensemble discret et fini, que l'on note $\{1, \dots, m\}$ pour simplifier. On souhaite mettre en place un test d'adéquation de la loi à une loi donnée : plus précisément, en gardant les notations du corollaire, on souhaite tester

$$(H_0) : \pi = \pi^0 \text{ contre } (H_1) : \pi \neq \pi^0,$$

où π^0 est donné. Sous l'hypothèse (H_0) , on a

$$D_n(\pi^0) = \sum_{i=1}^m \frac{(N_i(n) - n\pi_i^0)^2}{n\pi_i^0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(m-1),$$

et sinon, $D_n(\pi^0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ presque sûrement (d'après la loi des grands nombres). On va donc prendre $D_n(\pi^0)$ comme statistique de test, et la zone de rejet sera de la forme $[s, +\infty[$. Pour trouver s , on utilise en pratique l'approximation de la loi de $D_n(\pi^0)$, lorsque $\pi = \pi^0$, par la loi $\chi^2(m-1)$, et pour un test de niveau α , on choisit s tel que $\mathbb{P}(K \geq s) = \alpha$, où $K \sim \chi^2(m-1)$.

Questions :

1. Détailler la formule pour la matrice de projection.
2. Pourquoi si la matrice de covariance d'un vecteur gaussien est diagonale, les variables sont indépendantes ?
3. En général, est-ce que des variables aléatoires non corrélées sont indépendantes ?
4. On sait que si des variables gaussiennes réelles sont indépendantes, le vecteur associé est gaussien. Donner un contre-exemple si les variables ne sont pas indépendantes.

Réponses :

1. On utilise la propriété : la matrice de projection orthogonale sur un espace engendré par une base orthogonale (e_1, \dots, e_d) est $P = A({}^tAA)^{-1} {}^tA$ où $A = (e_1 \dots e_d)$.
2. Dans le cas de deux variables aléatoires X et Y , si (X, Y) est un vecteur gaussien et $\text{Cov}(X, Y) = 0$, on montre :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \varphi_{(X,Y)}(x, y) = \varphi_X(x)\varphi_Y(y),$$

ce qui suffit à démontrer l'indépendance.

3. Non : si X est de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $Y = X^2$, alors on montre que les variables X et Y sont non corrélées (i.e. de covariance nulle), mais elles ne sont pas indépendantes.
4. On considère $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, ε une variable qui suit une loi de Rademacher (i.e. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$), et $Y = \varepsilon X$, alors on montre que X et Y sont gaussiens non indépendants, mais de somme non gaussienne (il y a un atome en 0, ce qui n'est pas possible pour une loi normale), donc le vecteur (X, Y) n'est pas gaussien.

3.16 Inégalité de Hoeffding et application

Leçons : 229.

Référence : [Berb].

Prérequis : inégalités de convexité, transformée de Laplace, inégalité de Markov, intervalles de confiance.

Lemme : Soit X une VA centrée bornée par 1. Alors : $\forall t \in \mathbb{R}, L_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] \leq e^{t^2/2}$.

Théorème (inégalité de Hoeffding) : Soit $(X_n)_n$ une suite de VA indépendantes centrées et bornées telles que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|X_n| \leq c_n$ p.s. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right)$.

Application : Un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ du paramètre d'un n -échantillon X_1, \dots, X_n d'une loi de Bernoulli est

$$\left[\bar{X}_n \pm \sqrt{\frac{2}{n} \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)} \right]$$

Preuve. Voir [Berb]. □

Questions :

1. La transformée de Laplace caractérise-t-elle la loi ?
2. Comparer l'inégalité de Hoeffding à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Connaissez-vous une autre application ?

Réponses :

1. Oui.
2. Un intervalle de confiance obtenu par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est

$$\left[\bar{X}_n \pm \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} \right].$$

Pour $\alpha = 0.05$, Bienaymé-Tchebychev donne un intervalle de confiance plus précis, mais pour $\alpha = 0.02$ et $n = 100$, on obtient une précision de 0,35 par Bienaymé-Tchebychev et 0,3 par Hoeffding : la dernière est meilleure pour des petites valeurs de α .

3. Voir [Berb].

3.17 Lemme de Morse

Leçons : 171, 206, 214, 215.

Référence : [Rou].

Prérequis : matrices symétriques/antisymétriques, théorème d'inversion locale, formules de Taylor, réduction des formes quadratiques réelles, signature.

Lemme : Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tel que : $\forall A \in V, A = {}^t\rho(A)A_0\rho(A)$.

Théorème : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^3 . On suppose que 0 est un point critique non dégénéré de f , et que la forme quadratique $d^2f(0)$ est de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme φ entre deux voisinages V_0 et W_0 de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\varphi(0) = 0$, et :

$$\forall x \in V_0, f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2.$$

Preuve du lemme. On considère la fonction $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = {}^tMA_0M$. On voudrait appliquer le théorème d'inversion locale (TIL) à la fonction φ en I_n : pour cela il faut d'abord calculer sa différentielle. Pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\varphi(I_n + H) = A_0 + {}^t(A_0H) + A_0H + {}^tHA_0H,$$

avec ${}^tHA_0H \underset{H \rightarrow 0}{=} o(\|H\|)$, donc on en déduit que φ est différentiable en I_n et $d\varphi(I_n) : H \mapsto {}^t(A_0H) + A_0H$. Ainsi, $\ker(d\varphi(I_n)) = \{H \in M_n(\mathbb{R}), A_0H \in A_n(\mathbb{R})\}$, donc $d\varphi(I_n)$ n'est pas injective. Pour pouvoir appliquer le TIL, on va donc considérer une restriction. Puisque $M_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R})$, on a $M_n(\mathbb{R}) = \ker d\varphi(I_n) \oplus F$, où $F = \{H \in M_n(\mathbb{R}), A_0H \in S_n(\mathbb{R})\}$. Soit ψ la restriction de φ à F , qui est un SEV de $M_n(\mathbb{R})$. On a $I_n \in F$ car $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$, donc ψ est différentiable en I_n et $d\psi(I_n) = d\varphi(I_n)|_F$. Ainsi, $\ker d\psi(I_n) = \ker d\varphi(I_n) \cap F = \{0\}$ et $d\psi(I_n)$ est injective, donc bijective par égalité des dimensions de F et $S_n(\mathbb{R})$. Ainsi, d'après le TIL, il existe U voisinage de I_n dans F et V voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ tels que ψ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $U \rightarrow V$. Quitte à considérer $U \cap GL_n(\mathbb{R})$ qui reste encore ouvert, on peut supposer que $U \subset GL_n(\mathbb{R})$. En posant ainsi $\rho = \psi|_U^{-1} : V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$, on obtient le lemme. □

Preuve du théorème. Quitte à restreindre U , on peut supposer U convexe. Alors, d'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 :

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = xdf(0) + \int_0^1 (1-t)d^2f(tx)(x,x)dt,$$

avec $df(0) = 0$ par hypothèse et $d^2f(tx)(x,x) = {}^tx\text{Hess}f(tx)x$, donc on peut écrire $f(x) - f(0) = {}^txQ(x)x$ où

$$\forall x \in U, Q(x) = \int_0^1 \text{Hess}f(tx)dt \in S_n(\mathbb{R}),$$

et on peut déjà remarquer que d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, la fonction Q est de classe \mathcal{C}^1 sur U (car la fonction f est de classe \mathcal{C}^3). On a $Q(0) = \frac{1}{2}\text{Hess}f(0) \in S_n(\mathbb{R})$ et $Q(0) \in GL_n(\mathbb{R})$ par hypothèse, donc d'après le lemme il existe un voisinage V de $Q(0)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\rho \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tel que :

$$\forall A \in V, A = {}^t\rho(A)Q(0)\rho(A).$$

Or Q est continue et à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$, donc il existe un voisinage W de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $Q(W) \subset V$. Ainsi :

$$\forall x \in W, f(x) - f(0) = {}^txQ(x)x = {}^t\rho(Q(x))Q(0)\rho(Q(x)).$$

Or par hypothèse, la forme quadratique $d^2f(0)$ est de signature $(p, n-p)$, donc il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $Q(0) = {}^tP \begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & -I_{n-p} \end{pmatrix} P$, et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in W, f(x) - f(0) &= {}^t\varphi(x) \begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & -I_{n-p} \end{pmatrix} \varphi(x) \\ &= \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2, \end{aligned}$$

où : $\forall x \in W$, $\varphi(x) = P\rho(Q(x))x$. On a donc l'égalité souhaitée, mais φ n'est pas forcément un C^1 -difféomorphisme : on va donc appliquer le TIL en 0 pour conclure. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= P\rho(Q(h))h \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} P(\rho(Q(0)) + o(1))h \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \varphi(0) + P\rho(Q(0))h + o(\|h\|),\end{aligned}$$

car ρ et Q sont de classe C^1 . Ainsi, on en déduit que φ est différentiable en 0 et $d\varphi(0) : h \mapsto P\rho(Q(0))h$, avec $P\rho(Q(0))$ inversible, donc on en déduit que $d\varphi(0)$ est inversible et donc d'après le TIL, il existe deux voisinages V_0 et W_0 de 0 tels que $\varphi : V_0 \rightarrow W_0$ est un C^1 -difféomorphisme. On a donc le résultat voulu. \square

Questions :

1. Quelles sont les conditions sur la fonction f pour que la hessienne soit symétrique ?
2. Applications ?

Réponses :

1. Il faut que f soit de classe C^2 .
2. Voir [Berb].

3.18 Méthode du gradient à pas optimal

Leçons : 149, 158, 162, 219, 226, 229, 253.

Référence : [Berb].

Prérequis : gradient, extrémis, théorème spectral.

On considère $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ non nul. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n et $\|\cdot\|_A$ la norme associée au produit scalaire défini par $(x, y) = \langle x, Ay \rangle$. On note $\lambda_1 = \lambda_{\min}, \dots, \lambda_{\max} = \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

Proposition 1 (admise) : La fonction $\phi : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$ est différentiable, et atteint son unique minimum en $\bar{x} = A^{-1}b$. En outre, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla\phi(x) = Ax - b = A(x - \bar{x})$.

Lemme (Kantorovitch) : Pour tout $x \neq 0$, $\frac{\|x\|^4}{\|x\|_A^2 \|x\|_{A^{-1}}^2} \geq 4 \frac{\lambda_{\min} \lambda_{\max}}{(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})^2}$.

Définition (gradient à pas optimal) : Soit $x_0 \neq \bar{x}$. La méthode du gradient à pas optimal consiste à considérer $(x_k)_k$ la suite définie par récurrence par $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla\phi(x_k)$, où

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}_{t \geq 0} \phi(x_k - t \nabla\phi(x_k)).$$

Proposition 2 (admise) : On a $\alpha_k = \frac{\|\nabla\phi(x_k)\|_A^2}{\|\nabla\phi(x_k)\|_A^2}$, et $\langle \nabla\phi(x_k), \nabla\phi(x_{k+1}) \rangle = 0$.

Théorème : La suite $(x_k)_k$ converge vers \bar{x} , et il existe une constante C telle que pour tout $k \geq 0$,

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq C \left(\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \right)^{k+1} \|x_0 - \bar{x}\|.$$

Remarques : J'admets ici la proposition 2, car elle est calculatoire et à mon avis il est mieux de prendre le temps d'expliquer le principe et de faire un dessin au tout début.

Preuve : Voir [Berb].

Questions :

- Détailler la proposition 1.
- L'inégalité de Kantorovitch est-elle optimale ?
- Quel avantage par rapport au pivot de Gauss ou la méthode de Cholesky ?

Réponses :

- La fonction ϕ est coercive et strictement convexe donc elle admet un unique minimum. Elle est aussi différentiable et on peut montrer qu'elle admet un unique point critique, donc c'est forcément le point qui réalise son minimum.
- Oui, si on prend $A = I_n$, l'inégalité est une égalité.
-

3.19 Théorème des extrémas liés

Leçons : 151, 159, 206, 215, 219, 267.

Références : [Laf], [Rou].

Prérequis : formes linéaires, base duale/antéduale, sous-variétés, espace tangent.

Définition : Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d si pour tout $m \in M$, il existe un voisinage U de m dans M et $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ un C^1 -difféomorphisme tel que

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}].$$

Définition équivalente (admise) : Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d si pour tout $m \in M$, il existe un voisinage U de m dans M et une application différentiable $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ telle que $F^{-1}(\{0\}) = M \cap U$ et $dF(m)$ est surjective.

Lemme : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, b_1, \dots, b_k des formes linéaires indépendantes sur E et $a \in E^*$ tel que $\bigcap_{i=1}^k \ker(b_i) \subset \ker(a)$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $a = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i$.

Théorème : Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f, g_1, \dots, g_k \in C^1(U)$ et $M = \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$. Si $f|_M$ admet un extremum local en $m \in M$ et les formes $dg_i(x)$ sont linéairement indépendantes pour tout $x \in U$, alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que

$$df(m) = \sum_{i=1}^k \lambda_i dg_i(m).$$

Preuve du lemme. La famille (b_1, \dots, b_k) est une famille libre d'éléments de E^* , on la complète donc en une base (b_1, \dots, b_n) de E^* . Soit (e_1, \dots, e_n) la base antéduale associée. Alors

$$\bigcap_{i=1}^k \ker b_i = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n).$$

On a $a \in E^*$, donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tel que $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$, et donc d'après l'hypothèse,

$$\forall i \in \{k+1, \dots, n\}, 0 = a(e_i) = \lambda_i,$$

donc $a \in \text{Vect}(b_1, \dots, b_k)$. □

Preuve du théorème. Les étapes de la preuve sont :

1. On montre que M est une sous-variété de \mathbb{R}^n .
2. On montre que $T_m M = T := \bigcap_{i=1}^k \ker(dg_i(m))$ en montrant une inclusion puis l'égalité des dimensions.
3. On montre que $T_m M \subset \ker(df(m))$, puis on conclut avec le lemme.

Etape 1. On considère la fonction $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ définie par $F(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$. Alors $F^{-1}(\{0\}) = M$, F est bien de classe C^1 car les g_i le sont, et pour tout $x \in U$, $dF(x) = (dg_1(x), \dots, dg_k(x))$ est surjective car les formes linéaires $(dg_i(x))$ sont linéairement indépendantes par hypothèse. Ainsi, d'après la caractérisation équivalente des sous-variétés, M est une sous variété.

Etape 2. Montrons d'abord $T_m M \subset T$. Soit $v \in T_m M$, il existe alors un segment $I \subset \mathbb{R}$ centré en 0 et $\gamma : I \rightarrow M$ un chemin de classe C^1 tel que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$. Par définition de M , pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $g_i \circ \gamma = 0$, donc en dérivant et en évaluant en 0 : $dg_i(\gamma(0))(\gamma'(0)) = 0$, soit $dg_i(m)(v) = 0$, donc $v \in \ker dg_i(m)$.

Montrons à présent l'égalité des dimensions. Par définition d'une sous-variété, il existe V un voisinage ouvert de m et $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ un C^1 -difféomorphisme tel que $\varphi(V \cap M) = \varphi(V) \cap [\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}]$. On peut supposer que $\varphi(m) = 0$. Montrons que $T_m M = d\varphi(m)^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\})$, ce qui suffira pour conclure que $\dim(T_m M) = n - k = \dim T$. On procède par double inclusion.

- Soit $v \in T_m M$: il existe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ un chemin de classe C^1 tel que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$. On a $\gamma(0) = m \in M \cap V$ donc par continuité on peut supposer que ε est assez petit pour que γ soit à valeurs dans $M \cap V$. Alors $\varphi \circ \gamma$ est un chemin de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}$, donc puisque $\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}$ est fermé, sa dérivée est aussi à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}$, or $(\varphi \circ \gamma)'(0) = d\varphi(\gamma(0))(\gamma'(0)) = d\varphi(m)(v)$, donc $v \in d\varphi(m)^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\})$.
- Soit $v \in d\varphi(m)^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\})$. On note $w = d\varphi(m)(v)$. L'application $\phi : t \mapsto tw$ est continue, et $\phi(0) = 0 = \varphi(m) \in \varphi(V)$, donc on peut considérer ε assez petit tel que $\phi(] - \varepsilon, \varepsilon[) \subset \varphi(V)$. On a alors $\phi(] - \varepsilon, \varepsilon[) \subset \varphi(V) \cap [\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}] = \varphi(V \cap M)$, donc en posant $\gamma = \varphi^{-1} \circ \phi$, γ est un chemin de classe C^1 , à valeurs dans M , avec $\gamma(0) = \varphi^{-1}(0) = m$, et $\gamma'(0) = d\varphi^{-1}(\phi(0))(\phi'(0)) = d\varphi(\varphi^{-1}(0))^{-1}(w) = v$, donc $v \in T_m M$.

Etape 3. Si $v \in T_m M$ et $\gamma : I \rightarrow M$ est un chemin de classe C^1 tel que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$, alors puisque m est un extremum local de f , 0 est un extremum local de $f \circ \gamma$ et $0 = (f \circ \gamma)'(0) = d\varphi(m)(v)$. Donc $v \in \ker(df(m))$.

On en déduit ainsi le théorème d'après le lemme. □

Questions :

1. Applications ?

Réponses :

1. On retrouve le théorème spectral. On peut aussi montrer l'inégalité arithmético-géométrique (voir [Goub] p319) et une caractérisation de $SO_n(\mathbb{R})$ (voir [BMP]).

3.20 Surjectivité de l'exponentielle matricielle

Leçons : 156, 204, 214.

Référence : [Zav].

Prérequis : connexité, théorème d'inversion locale.

Lemme : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{C}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{C}[X]\}$. Alors $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}[A]$.

Théorème : L'application $\exp : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Preuve. Voir [Zav]. □

Questions :

1. Qu'en est-il de l'exponentielle matricielle réelle ?
2. Donner des exemples de matrices A, B telles que $\exp(A + B) \neq \exp(A)\exp(B)$.

Réponses :

1. On peut montrer que $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$: l'inclusion directe est vraie et si $P = A^2$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors en particulier $A \in GL_n(\mathbb{C})$ donc $A = \exp(B)$ avec $B \in M_n(\mathbb{C})$. Or A est réelle donc on a aussi $A = \overline{A} = \exp(\overline{B})$, ainsi

$$P = A^2 = \exp(B)\exp(\overline{B}) = \exp(B + \overline{B}) = \exp(C),$$

où $C = B + \overline{B} \in M_n(\mathbb{R})$.

- 2.

3.21 Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

Leçons : 103, 108, 204.

Référence : [FGNb] p67.

Prérequis : propriétés de $SO_3(\mathbb{R})$ (engendré par les retournements, agit transitivement sur les droites).

Théorème : Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Preuve. Soit G un sous-groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$.

1. On suppose d'abord que G est connexe par arcs et $G \neq \{id\}$. On veut montrer que $G = SO_3(\mathbb{R})$, pour cela on va montrer que G contient tous les retournements. Puisque $SO_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur les droites, il suffit de montrer que G contient un retournement, c'est-à-dire une rotation d'angle π (puisque on est en dimension 3).

Pour cela, il suffit de montrer que G contient une rotation r d'angle $\pm\pi/2$, puisque dans ce cas $R = r^2$ sera une rotation d'angle π . On considère pour cela l'application continue φ qui à un élément $g \in G$ d'angle θ associe $\cos(\theta) = \frac{\text{Tr}(g)-1}{2}$: il s'agit alors de trouver r tel que $\varphi(r) = 0$.

Pour cela, on montre qu'il existe $s \in G$ tel que $\varphi(s) \leq 0$, car dans ce cas : puisque G est connexe par arcs et $id \in G$, il existe un chemin continu γ dans G de s à id . La fonction $\psi : t \mapsto \frac{\text{Tr}(\gamma(t))-1}{2}$ est donc continue, avec $\psi(0) = 1 > 0$ et $\psi(1) \leq 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\psi(t_0) = 0$. Ainsi, $r := \gamma(t_0)$ est une rotation d'angle $\pm\pi/2$. Montrons ainsi qu'il existe $s \in G$ tel que $\varphi(s) \leq 0$: puisque par hypothèse $G \neq \{id\}$, il existe $g \in G$ avec $g \neq id$. Soit θ son angle. Quitte à considérer g^{-1} , on peut supposer que $\theta \in]0, \pi]$.

– Si $\theta \in [\pi/2, \pi]$, alors $s = g$ convient.

– Sinon, $0 < \theta < \pi/2$, donc en posant $N = \lfloor \frac{\pi}{2\theta} \rfloor$, on a $\frac{\pi}{2} < (N+1)\theta < \frac{\pi}{2} + \theta < \pi$, donc $s = g^{N+1}$ convient.

Ainsi, il existe r rotation d'angle $\pm\pi/2$, et $R = r^2$ est une rotation d'angle π , i.e. un retournement. On note Δ son axe.

Montrons alors pour finir que G contient tous les retournements : soit u un retournement et D son axe. Puisque $SO_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur les droites, il existe $g \in SO_3(\mathbb{R})$ tel que $g\Delta g^{-1} = D$. Or gRg^{-1} est un retournement (car semblable à R qui est un retournement), et $gRg^{-1}(D) = D$, donc son axe est D . Ainsi, par unicité, $gRg^{-1} = u$ et donc $u \in G$. Ainsi, G contient tous les retournements, donc $G = SO_3(\mathbb{R})$.

2. Dans le cas général, on considère G_0 la composante connexe par arcs de id dans G . On peut alors montrer alors que G_0 est également un sous-groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$. Si $G_0 \neq \{id\}$, alors $G_0 = SO_3(\mathbb{R})$ d'après le premier point, donc $G = SO_3(\mathbb{R})$. Si $G_0 = \{id\}$, on montre que $G = \{id\}$ par l'absurde : on suppose que $G \neq \{id\}$, il existe alors $g \in G$ avec $g \neq G$. Soit $h \in SO_3(\mathbb{R})$ d'angle θ . Pour tout $t \in [0, 1]$, on note h_t la rotation de même axe que h et d'angle θt . L'application $t \mapsto h_t$ est continue (raisonner matriciellement), donc $t \mapsto h_t g h_t^{-1}$ est un chemin continu entre g et $h g h^{-1}$, d'où $h g h^{-1}$ est dans la composante connexe par arcs de g . Or, puisque $G_0 = \{id\}$, toutes les composantes connexes de G sont des singletons, donc $h g h^{-1} = g$, i.e. $gh = hg$. Donc $g \in Z(SO_3(\mathbb{R})) = \{id\}$, d'où la contradiction. Donc $G = \{id\}$.

D'où finalement la simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$. □

Questions :

1. Montrer que $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements.
2. Pourquoi $Z(SO_3(\mathbb{R})) = \{id\}$?

Réponses :

1. On montre que pour tout $u \in O_n(\mathbb{R})$, en notant $k = \text{rg}(u - id)$, alors u peut s'écrire comme produit de k réflexions. Ainsi, si $u \in SO_3(\mathbb{R})$ avec $u \neq id$, alors $\text{rg}(u - id) = 2$ donc u peut s'écrire comme produit de 2 réflexions $u = u_1 u_2$. Si u_1 et u_2 sont des retournements, c'est bon, sinon on a $u = (-u_1)(-u_2)$ avec $-u_1$ et $-u_2$ qui sont des retournements.
2. Si $g \in SO_3(\mathbb{R})$ commute avec tous les éléments de $SO_3(\mathbb{R})$, alors g stabilise toutes les droites (en effet, si $D = \text{Vect}(e_1)$ est une droite, en considérant h le retournement d'axe D , g et h commutent donc les sous-espaces stables de h sont stables par g , donc en particulier D est stable par g), donc $g = id$.

3.22 Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

Leçons : 159, 160, 253.

Références : [BMP] p97, [ZQ] p205.

Prérequis : projection sur un convexe fermé, décomposition polaire, dual de $M_n(K)$, théorème de Carathéodory.

Lemme (Hahn-Banach faible) : Soit H un espace de Hilbert réel.

1. Si C est un convexe fermé non vide de H et $x \in H \setminus C$, alors il existe $f \in H'$ tel que $f(x) > \sup_{y \in C} f(y)$.
2. Si $A \subset H$, alors $x \in \overline{\text{Conv}(A)} \Leftrightarrow \forall f \in H', f(x) \leq \sup_{y \in A} f(y)$

Théorème : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$ associée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$.

Preuve. Voir les références. □

3.23 Irréductibilité des polynômes cyclotomiques

Leçons : 102, 125, 141, 144.

Référence : [Per] p83.

Prérequis : morphisme de Frobenius, corps de rupture/de décomposition, polynôme minimal d'un élément algébrique, propriétés polynômes cyclotomiques, factorialité de $\mathbb{Z}[X]$.

Théorème : Pour tout $n \geq 1$, le polynôme cyclotomique ϕ_n est irréductible sur \mathbb{Q} et sur \mathbb{Z} .

Idée preuve. On considère un corps de décomposition K de ϕ_n sur \mathbb{Q} et $\xi \in \mathbb{U}_n^\times \cap K$ une racine primitive n -ème de l'unité. On note $f \in \mathbb{Q}[X]$ son polynôme minimal. On va montrer que f est le polynôme minimal de toutes les racines primitives n -èmes de l'unité, auquel cas puisqu'un polynôme ne peut pas avoir plus de racines que son degré, on aura $\deg(f) \geq \varphi(n)$, or $f|\phi_n$ et ce sont des polynômes unitaires, donc $\phi_n = f$ est irréductible. \square

Questions :

1. Expliquer pourquoi $\mathbb{Z}[X]$ est factoriel.
2. Dans quels cas peut-on faire la division euclidienne sur \mathbb{Z} ?
3. Donner un autre argument pour montrer l'irréductibilité lorsque $n = p$ est premier.
4. Est-ce que ϕ_n est irréductible sur les \mathbb{F}_p ?

Réponses :

1. Voir [Per].
2. Si le polynôme par lequel on divise est de coefficient dominant inversible, i.e $\{\pm 1\}$.
3. On utilise le critère d'Eisenstein.
4. Non, on peut montrer que $\phi_8 = X^4 + 1$ n'est irréductible sur aucun \mathbb{F}_p .

3.24 Critère d'Eisenstein

Leçons : 121, 122, 141, 142.

Référence : [Goz] p10.

Prérequis : anneaux factoriels, irréductibilité de polynômes.

Soit A un anneau factoriel et K son corps des fractions. Le contenu d'un polynôme $P \in A[X]$, noté $C(P)$, est défini par le pgcd des coefficients de P .

Lemme (Gauss) : Pour tout $P, Q \in A[X]$, $C(PQ) = C(P)C(Q)$.

Théorème : Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$. On suppose qu'il existe $p \in A$ irréductible tel que :

1. $\forall 0 \leq i \leq n-1, p|a_i$.
2. $p \nmid a_n$.
3. $p^2 \nmid a_0$.

Alors P est irréductible sur K .

Application : Pour tout p premier, le polynôme cyclotomique ϕ_p est irréductible sur \mathbb{Q} .

Remarque : Pour la leçon 121, on prend $A = \mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{Q}$, puis on adapte la preuve.

Idée preuve. Pour le lemme de Gauss, voir [Goz]. Pour le théorème, on suppose par l'absurde que P est réductible sur K : puisque K est un corps, P s'écrit $P = UV$ avec $U, V \in K[X]$ de degrés ≥ 1 . En utilisant le contenu, on montre que l'on peut écrire $P = RS$ avec $R, S \in A[X]$ de degrés ≥ 1 . On projette alors l'égalité $P = RS$ dans l'anneau intègre $A/pA[X]$ et on trouve une contradiction. \square

Questions :

1. Est-ce que P réductible sur A implique que l'on peut écrire $P = QR$ avec $Q, R \in A[X]$ de degrés ≥ 1 ?
2. Quel est le lien entre un élément irréductible et premier?
3. Quel est le lien entre l'irréductibilité sur A et sur K ?

Réponses :

1. Pas si A n'est pas un corps : considérer par exemple $2X$ sur \mathbb{Z} .
2. Un élément premier est irréductible, la réciproque est fautive en général, mais vraie sur un anneau factoriel.
3. Si $P \in A[X]$ est non constant, alors P est irréductible sur A si et seulement si P est irréductible sur K et primitif.

3.25 Dénombrement des polynômes irréductibles unitaires sur un corps fini

Leçons : 123, 125, 144, 190.

Référence : [Romb] p485.

Prérequis : corps de rupture/de décomposition, formule d'inversion de Möbius, morphisme de Frobenius, théorème de Lagrange.

Soient p un nombre premier et $n \geq 1$. On note $U_n(p)$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{F}_p[X]$ unitaires irréductibles de degré n , et $I_n(p) = |U_n(p)|$. Alors

$$I_n(p) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) p^d \geq 1.$$

Preuve. Voir [Romb]. □

Questions :

1. Est-ce que le corps de rupture d'un polynôme irréductible et son corps de décomposition sont les mêmes ?
2. Rappeler pourquoi un corps fini est de cardinal la puissance d'un nombre premier.

Réponses :

1. Dans le cas général, non : si $P = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$, son corps de rupture est $\mathbb{Q}[j]$ qui ne contient pas les autres racines, et son corps de décomposition est $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, j]$. Sur un corps fini, les notions coïncident.
2. Voir [Per] p72.

3.26 Théorème des deux carrés

Leçons : 121, 122, 126.

Référence : [Per] p56.

Prérequis : anneaux factoriels/principaux/euclidiens, éléments irréductibles/premiers.

On pose $\Sigma = \{a^2 + b^2, a, b \in \mathbb{N}\}$, et $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'anneau des entiers de Gauss.

Lemme (propriétés de $\mathbb{Z}[i]$) :

1. $\mathbb{Z}[i]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$.
2. $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.

Lemme : Si p est premier, $p \in \Sigma \Leftrightarrow p$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

Proposition : Si p est premier, $p \in \Sigma \Leftrightarrow p = 2$ ou $p = 1[4]$.

Théorème : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ que l'on écrit $n = \prod_p p^{\nu_p(n)}$. Alors : $n \in \Sigma \Leftrightarrow \nu_p(n)$ est pair pour $p = 3[4]$.

Remarque : On utilise à un moment le résultat : si A est un anneau intègre et $a, b \in A$, alors $A/(a, b) \simeq (A/(a))/(b)$. Ce résultat se démontre en utilisant le 1er théorème d'isomorphisme et les surjections canoniques.

Preuve. Pour les deux lemmes et la proposition, voir [Per]. Pour le théorème :

1. On suppose $\nu_p(n)$ pair pour $p = 3[4]$. Soit p un diviseur premier de n . Si $p = 2$ ou $p = 1[4]$, alors d'après la proposition $p \in \Sigma$. Si $p = 3[4]$, alors $\nu_p(n)$ est pair, donc $p^{\nu_p(n)} \in \Sigma$. D'où, puisque Σ est stable par multiplication, on en déduit que $n \in \Sigma$.
2. Pour l'implication réciproque, on démontre par récurrence sur $n \geq 0$ la propriété $\mathcal{P}(n) :=$ "si $n \in \Sigma$ et $p = 3[4]$, alors $\nu_p(n)$ est pair".
 - Si $n = 0$, alors pour tout $p = 3[4]$, $\nu_p(0) = 0$ est pair, d'où $\mathcal{P}(0)$.
 - On suppose $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(n-1)$. Soit $n \in \Sigma$ et $p = 3[4]$.
 - Si $\nu_p(n) = 0$, ok.
 - Sinon, $p|n$. En écrivant $n = a^2 + b^2$, on a donc $p|(a+ib)(a-ib)$, or d'après la proposition, $p \notin \Sigma$, donc d'après le lemme, p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$. Ainsi, on a par exemple $p|a+ib$. Ainsi, $p|a$ et $p|b$, donc $p^2|n$, et $\frac{n}{p^2} = \left(\frac{a}{p}\right)^2 + \left(\frac{b}{p}\right)^2 \in \Sigma$, et $\frac{n}{p^2} < n$, donc par hypothèse de récurrence, $\nu_p(n/p^2) = \nu_p(n) - 2$ est pair, d'où $\nu_p(n)$ est pair et on a $\mathcal{P}(n)$.

□

3.27 Loi de réciprocité quadratique par les formes quadratiques

Leçons : 101, 120, 121, 123, 126, 170, 190.

Référence : [Cala].

Prérequis : action de groupe, équation aux classes, classification des formes quadratiques sur un corps fini, hyperplan, symbole de Legendre.

Lemme : Soit q premier impair. Pour tout $a \in \mathbb{F}_q^*$, $|\{x \in \mathbb{F}_q^*, ax^2 = 1\}| = 1 + \left(\frac{a}{q}\right)$.

Théorème : Pour tout p, q nombres premiers impairs distincts, $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$.

Preuve. Voir [Cala]. □

Remarque : il faut retenir que $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ si p ou q est congru à 1 modulo 4, et $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$ sinon.

Questions :

1. Redémontrer la formule d'équation aux classes.
2. Redémontrer la classification des formes quadratiques sur les corps finis.
3. Est-ce que 15 est un carré modulo 37?

Réponses :

1. Voir [Romb].
2. Voir [Romb].
3. On calcule :

$$\left(\frac{15}{37}\right) = \left(\frac{5}{37}\right)\left(\frac{3}{37}\right) = \left(\frac{37}{3}\right)\left(\frac{37}{5}\right),$$

d'après la loi de réciprocité quadratique car 37 est congru à 1 modulo 4. Or $37 = 1[3]$ et $37 = 2[5]$, donc

$$\left(\frac{37}{3}\right)\left(\frac{37}{5}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = -1,$$

car 1 est un carré modulo 3 mais 2 n'est pas un carré modulo 5.

3.28 Structure des groupes abéliens finis

Leçons : 102, 104, 120, 142.

Référence : [Romb] p28.

Prérequis : racines de l'unité, ordre d'un élément, théorème de Lagrange, exposant d'un groupe fini.

Lemme (admis) : Soit G un groupe abélien fini. Alors il existe un élément de G d'ordre l'exposant de G .

Lemme 1 : Soit G un groupe abélien fini et $H < G$. Alors tout caractère $\varphi : H \rightarrow \mathbb{C}^*$ se prolonge en un caractère sur G .

Lemme 2 : Soient $n_1 | \dots | n_r$ et $m_1 | \dots | m_s$ des entiers. Alors $(n_1, \dots, n_r) = (m_1, \dots, m_s)$ si et seulement si pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=1}^r m \wedge n_k = \prod_{j=1}^s m \wedge m_j$.

Théorème : Soit G un groupe abélien fini. Alors il existe une unique suite d'entiers (n_1, \dots, n_r) (appelés facteurs invariants) telle que $n_1 | \dots | n_r$ et $G \simeq (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z})$.

Remarque : Pour les leçons 102, 104 et 120, on démontre le lemme 1 et seulement l'existence du théorème. Pour la leçon 142, on démontre le lemme 2 et le théorème, en admettant le lemme 1.

Preuve. Voir [Romb]. □

Questions :

1. Expliquer comment démontrer le lemme admis.
2. Donner la classification des groupes abéliens finis d'ordre ≤ 8 .
3. Donner les facteurs invariants de $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
4. Donner à un isomorphisme près tous les groupes abéliens finis d'ordre 180.

Réponses :

1. Voir [Romb].
2. Voir [Bera].
3. La liste des facteurs invariants est (2,6,180).
4. Si G est d'ordre $180 = 2^2 3^2 5$, une décomposition primaire de G est $G \simeq G_1 \times G_2 \times G_3$, où
 - G_1 est d'ordre 4, isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
 - G_2 est d'ordre 9, isomorphe à $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.
 - G_3 est d'ordre 5, isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

On obtient donc 4 possibilités, à chaque fois on calcule les facteurs invariants, on trouve (180), (3,60), (6,30) et (2,90). Voir https://khalid-koufany.perso.math.cnrs.fr/Algebre2/04_exo_decop_cyc-solution.pdf pour plus de détails.

3.29 Caractérisation des matrices nilpotentes par la trace + Burnside

Leçons : 106, 149, 157.

Référence : [FGNa] p185.

Prérequis : valeurs propres, trigonalisation, diagonalisation, matrices nilpotentes.

Lemme : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall k \geq 1, \text{Tr}(A^k) = 0$. Alors A est nilpotente.

Théorème : Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini. Alors G est un groupe fini.

Preuve. Voir [FGNa]. □

Questions :

1. Dans la preuve, on considère une base de $\text{Vect}(G)$. Pourquoi peut-on prendre des éléments de G ?
2. Le lemme est-il encore vrai sur un autre corps ?
3. Pourquoi une matrice diagonalisable et nilpotente est-elle nulle ?
4. Peut-on injecter tout sous-groupe fini dans $GL_n(\mathbb{C})$?

Réponses :

1. On considère une base $G_1, \dots, G_m \in M_n(\mathbb{R})$ de $\text{Vect}(G)$: on écrit alors chaque G_i comme combinaison linéaire d'éléments de G , la famille constituée de tous ces éléments de G est alors génératrice, on en extrait donc une base et on obtient une base d'éléments de G .
2. Non, sur $M_2(\mathbb{F}_2)$ la matrice I_2 n'est pas nilpotente mais pour tout $k \geq 1, \text{Tr}(I_2^k) = 0$.
3. Si la matrice est nilpotente, sa seule valeur propre est 0, donc si elle est de plus diagonalisable elle est forcément nulle.
4. Oui d'après le théorème de Cayley.

3.30 Simplicité de A_n

Leçons : 103, 104, 105, 108.

Référence : [Romb] p54.

Lemme 1 : Pour $n \geq 5$, A_n est engendré par les 3-cycles, et les 3-cycles sont conjugués dans A_n .

Lemme 2 : Pour $n \geq 4$, le centre de A_n est trivial.

Théorème : Pour $n \geq 5$, A_n est simple.

Preuve. Voir [Romb]. □

Questions :

1. Redémontrer les générateurs de S_n .
2. Redémontrer que deux cycles de même longueur sont conjugués dans S_n .
3. Que se passe-t-il pour $n = 3$ et $n = 4$?
4. Quels sont les sous-groupes distingués de S_n ?
5. Montrer que A_n est le seul sous-groupe d'indice 2 de S_n .

Réponses :

1. Voir [Romb].
2. Voir [Romb].
3. Si $n = 3$, A_3 est cyclique d'ordre 3 premier, donc n'admet pas de sous-groupe non trivial, donc est simple.
Si $n = 4$, on montre que le sous-groupe $H = \{id, \text{doubles transpositions}\}$ est non trivial distingué, donc A_4 n'est pas simple.
4. Pour $n \geq 5$, ce sont $\{id\}$, A_n et S_n .
5. Voir [Bera].

3.31 Isométries du cube

Leçons : 101, 105, 161, 191.

Références : [Romb] p92, [Calb].

Prérequis : actions de groupe, permutations.

On note C le cube, et $S = \{A_1, \dots, A_8\}$ l'ensemble de ses sommets. Pour toute partie P de \mathbb{R}^3 , on note $Is(P)$ (resp. $Is^+(P)$) l'ensemble des isométries (resp. isométries positives) de \mathbb{R}^3 préservant la partie P .

Lemme 1 (admis) : On a $Is(C) = Is(S)$.

Lemme 2 : $Is(C) \simeq Is^+(C) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Théorème : On a $Is^+(C) \simeq S_4$ et $Is(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Idée preuve. Pour le lemme 2, on établit une bijection entre $Is(C)$ et $Is^+(C) \times \langle -id \rangle$. Pour le théorème, on montre que toute isométrie $\varphi \in Is^+(C)$ conserve l'ensemble D des grandes diagonales du cube : on dispose alors d'un morphisme d'action $\Phi : Is^+(C) \rightarrow \mathfrak{S}(D)$. On montre alors que Φ est injective, puis surjective en montrant que Φ réalise toutes les permutations. \square

Questions :

1. Donner les isométries du tétraèdre.

Réponses :

1. On a $Is(T) \simeq S_4$ et $Is^+(T) \simeq A_4$.

3.32 Déterminant de Gram

Leçons : 152, 161, 191.

Référence : [Goua] p263.

Prérequis : matrices hermitiennes, théorème de projection, calculs de déterminant, déterminant de Cauchy.

Soit E un espace préhilbertien. Pour $x_1, \dots, x_n \in E$, on définit la matrice de Gram : $G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Proposition : La matrice $G(x_1, \dots, x_n)$ est hermitienne, et elle est inversible si et seulement si la famille (x_1, \dots, x_n) est libre.

Théorème : Soit (x_1, \dots, x_n) une famille libre d'éléments de E , et $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Alors, pour tout $x \in E$:

$$d(x, F)^2 = \frac{\det G(x_1, \dots, x_n, x)}{\det G(x_1, \dots, x_n)}.$$

Application : Soit $n \geq 1$ et $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(a_1, \dots, a_n) = \int_0^1 (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 dx$. Alors φ admet un unique minimum atteint qui vaut $\frac{1}{(n+1)^2}$.

Preuve. Voir [Goua]. □

Questions :

- Démontrer la preuve de formule du déterminant de Cauchy.

Réponses :

- Voir [Goua] p143.

3.33 Suite de polygones

Leçons : 149, 152, 155.

Référence : [Goua] p180.

Prérequis : diagonalisation, trigonalisation, racines de l'unité.

Lemme : Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, et A la matrice circulante $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\det(A) = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}.$$

Théorème : Soit P un polygone du plan complexe dont les sommets sont $\{z_1, \dots, z_n\}$. On définit par récurrence une suite de polygones $(P_k)_k$ par $P_0 = P$, et pour tout $k \geq 0$, P_{k+1} est le polygone dont les sommets sont les milieux des arêtes de P_k . Alors $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de P .

Preuve. Pour le déterminant circulant, voir [Goua]. Pour le théorème : □

3.34 Décomposition polaire

Leçons : 155, 160.

Référence : [Romb] p824.

Prérequis : diagonalisation, polynômes d'interpolation, valeurs d'adhérence.

Lemme : Pour tout $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe un unique $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$.

Théorème : L'application $\Phi : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi(O, S) = OS$ est un homéomorphisme.

Application : $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.

Preuve. Voir [Romb] pour le lemme et le théorème. Pour l'application : soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $O_n(\mathbb{R}) \subset G$. On veut montrer que $G = O_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in G$: d'après la décomposition polaire, on peut écrire $A = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors $S = O^{-1}A \in G$, puis : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $S^k \in G$. Ainsi, pour toute valeur propre λ de S , la suite $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est bornée : d'où $\lambda = 1$, et puisque S est symétrique donc diagonalisable, on en déduit $S = I_n$ puis $A = O \in O_n(\mathbb{R})$. \square

Questions :

1. Les résultats sont-ils encore vrais sur \mathbb{C} ?
2. La décomposition polaire est-elle encore valable sur $M_n(\mathbb{R})$?

Réponses :

1. Oui en remplaçant les matrices symétriques par les matrices hermitiennes, et les matrices orthogonales par les matrices unitaires.
2. L'existence est encore vraie mais on n'a plus l'unicité.

3.35 Décomposition de Dunford

Leçons : 153, 155, 157.

Référence : [Romb] p688.

Prérequis : sous-espaces caractéristiques, lemme des noyaux, projecteurs, diagonalisation, nilpotence, exponentielle de matrice.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose χ_u scindé, on a alors la décomposition en sous-espaces caractéristiques $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda(u)$. On note p_λ le projecteur sur $F_\lambda(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{\mu \neq \lambda} F_\mu(u)$.

Lemme : Les projecteurs p_λ sont des polynômes en u .

Théorème (Dunford) : Il existe un unique couple (d, ν) d'endomorphismes tel que d est diagonalisable, ν est nilpotent, d et ν commutent et $u = d + \nu$. En outre, d et ν sont des polynômes en u .

Application : Si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford matricielle de A , alors $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$ est la décomposition de Dunford matricielle de e^A : ainsi, A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable.

Preuve. Voir [Romb]. □

Questions :

1. Que peut-on dire de la décomposition de Dunford d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$?
2. Donner la décomposition de Dunford de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Comment déduit-on la décomposition de Jordan ?

Réponses :

1. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a une décomposition de Dunford sur \mathbb{C} : $A = D + N$ avec $D, N \in M_n(\mathbb{C})$ avec D diagonalisable sur \mathbb{C} et N nilpotente. Puisque A est réelle, on a $A = \overline{A} = \overline{D} + \overline{N}$, donc par unicité de la décomposition de Dunford sur \mathbb{C} , on en déduit que D et N sont à coefficients réels.
- 2.
3. On applique la décomposition de Jordan nilpotent sur chaque sous-espace caractéristique à l'endomorphisme nilpotent induit.

3.36 Réduction de Frobénus

Leçons : 148, 151, 153, 154.

Référence : [MM] p41, p61 et p125.

Prérequis : lemme des noyaux, dualité.

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Lemme 1 : Il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

Lemme 2 : Soit $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$. Alors $E_{u,x} = \text{Vect}(u^k(x))_k$ admet un supplémentaire stable par u .

Théorème (Frobénus) : Il existe des sous-espaces E_1, \dots, E_r de E tels que

1. $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$.
2. Pour tout i , E_i est stable par u et $u|_{E_i}$ est cyclique.
3. En notant P_i le polynôme minimal de $u|_{E_i}$, $P_r | \dots | P_1 = \pi_u$.

La suite (P_1, \dots, P_r) est appelée la suite des invariants de similitude de u et elle est unique.

Preuve. □

Questions :

1. Montrer que $K[u]$ est de dimension $\deg(\pi_u)$.
2. Quelle est la dimension d'un sous-espace propre d'une matrice compagnon ?
3. Montrer qu'une matrice est semblable à sa transposée.
4. Quel est le lien avec la réduction de Jordan ?

Réponses :

1. Si $d = \deg(\pi_u)$, on montre que $(id_E, u, \dots, u^{d-1})$ est une famille libre et génératrice de $K[u]$:
 - Libre : si $\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k u^k = 0$, alors le polynôme $\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k X^k$, qui est de degré strictement inférieur à π_u , annule u , donc $P = 0$, i.e. les λ_k sont nuls.
 - Génératrice : si $v = P(u) \in K[u]$, on effectue la division euclidienne de P par π_u : $P = Q\pi_u + R$, donc en évaluant en u on obtient : $v = R(u) \in \text{Vect}(id_E, u, \dots, u^{d-1})$.
2. La dimension est 1 (par exemple en raisonnant avec la caractérisation du rang par les matrices extraites).
3. On montre que les matrices compagnon sont semblables à leur transposée.
4. Voir [MM].

3.37 Réduction des endomorphismes normaux

Leçons : 154, 160.

Référence : [Romb] p827.

Soit E un espace euclidien.

Lemme 1 : Si u est un endomorphisme normal et F un SEV de E de stable par u , alors F^\perp est stable par u .

Lemme 2 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe un SEV F de E de dimension 1 ou 2 stable par u .

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice u est

de la forme $\begin{pmatrix} D_p & & & \\ & R_1 & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & R_r \end{pmatrix}$, où D_p est diagonale et R_k est de la forme $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$.

Preuve. Voir [Romb]. □

Questions :

1. Que se passe-t-il si l'espace E est hermitien ?
2. Applications ?

Réponses :

1. Dans ce cas, tout endomorphisme normal est diagonalisable.
2. On retrouve le théorème spectral et le théorème de réduction des endomorphismes antisymétriques et orthogonaux.

3.38 Décomposition de LU et de Cholesky

Leçons : 148, 162.

Référence : [All].

Prérequis : algorithme du pivot de Gauss, matrices triangulaires.

Théorème 1 : Décomposition LU.

Théorème 2 : Décomposition Cholesky.

Preuve.

□

Questions :

1. Quelles sont les complexités ?
2. Pourquoi l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure est encore triangulaire inférieure ?

Réponses :

1. Voir [All].
2. Il y a plusieurs arguments : soit on utilise le fait que l'inverse d'une matrice A est un polynôme en A , et la puissance d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire inférieure. Ou alors, si $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ est triangulaire inférieure inversible, on considère l'application $T_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow T_n^+(\mathbb{R})$, $M \mapsto TM$, qui est bien définie, linéaire et injective, donc par égalité des dimensions elle est bijective et il existe $M \in T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $TM = I_n$, donc $T^{-1} = M \in T_n^+(\mathbb{R})$.

3.39 Etude de $O(p, q)$

Leçons : 106, 156, 158, 170, 171.

Référence : [Cala].

Prérequis : décomposition polaire, formes quadratiques réelles, signature.

On note $O(p, q)$ le groupe des isométries associé à la forme quadratique réelle de signature (p, q) dont la matrice dans la base canonique est $\text{diag}(I_p, -I_q)$.

Théorème (admis) : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Théorème : On a un homéomorphisme $O(p, q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.

Preuve. Les étapes sont :

1. On montre que $O(p, q) \simeq (O(n) \cap O(p, q)) \times (S_n^{++}(\mathbb{R}) \cap O(p, q))$, où $n = p + q$.
2. On montre $O(n) \cap O(p, q) \simeq O(p) \times O(q)$ et $S_n^{++}(\mathbb{R}) \cap O(p, q) \simeq \mathbb{R}^{pq}$.

□

Questions :

1. Applications ?

Réponses :

1. On a ainsi que $O(p, q)$ est compact si et seulement si $p = 0$ ou $q = 0$. Et si p et q sont non nuls, alors $O(p, q)$ admet 4 composantes connexes.

Références

- [All] Allaire. *Algèbre linéaire numérique*.
- [AM] Amar-Matheron. *Analyse complexe*.
- [Amr] El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.
- [Ben] Benaïm. *Promenade aléatoire*.
- [Bera] Berhuy. *Algèbre : le grand combat*.
- [Berb] Bernis. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*.
- [BMP] Beck-Malick-Peyré. *Objectif Agrégation*.
- [Cala] Caldero. *Nouvelles histoires hédonistes en groupes et géométrie, tome 1*.
- [Calb] Caldero. *Nouvelles histoires hédonistes en groupes et géométrie, tome 2*.
- [CR] Chabanol-Ruch. *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*.
- [FGNa] Francinou-Gianella-Nicolas. *Oraux X-ENS : Algèbre 2*.
- [FGNb] Francinou-Gianella-Nicolas. *Oraux X-ENS : Algèbre 3*.
- [FGNc] Francinou-Gianella-Nicolas. *Oraux X-ENS : Analyse 1*.
- [FGNd] Francinou-Gianella-Nicolas. *Oraux X-ENS : Analyse 4*.
- [GK] Garet-Kurtzmann. *De l'intégration aux probabilités*.
- [Goua] Gourdon. *Algèbre*.
- [Goub] Gourdon. *Analyse*.
- [Goz] Gozard. *Théorie de Galois*.
- [Hau] Hauchecorne. *Contre-exemples en mathématiques*.
- [Laf] Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*.
- [Li] Li. *Cours d'analyse fonctionnelle*.
- [MM] Mensuy-Mneimné. *Algèbre linéaire, réduction des endomorphismes*.
- [Per] Perrin. *Cours d'algèbre*.
- [Roma] Rombaldi. *Elements d'analyse réelle*.
- [Romb] Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation : algèbre et géométrie*.
- [Rou] Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel*.
- [RS] Rivoirard-Stoltz. *Statistique en action*.
- [SS] Stein-Shakarchi. *Complex analysis*.
- [Zav] Zavidovique. *Un max de maths*.
- [ZQ] Zuily-Queffelec. *Éléments d'analyse pour l'agrégation*.