Fiche Statistique L3

Sacha Quayle

1 Rappels de Probabilités

Déf (fonction de répartition). La FDR d'une VA X est $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$. Propriétés :

- F_X est croissante.
- $F_X(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, $F_X(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- F_X est càdlàg et pour tout x_0, si $\mathbb{P}(X = x_0) > 0$, alors F_X est continue en x_0.
- La FDR caractérise la loi.

Déf (VA à densité). X est à densité s'il existe $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ mesurable tq $F_X(x) = \int_{u \leqslant x} f_X(u)\, du$. Si f_X est continue, alors F_X est dérivable et $F'_X = f_X$.

Déf (quantile). $q_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \leqslant x) \geqslant \alpha\}$ ($\alpha \in]0, 1[$). Si F_X est strict croissante, $q_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)$.

Déf (modes de convergence).

- $X_n \xrightarrow{ps} X$ si $\mathbb{P}(\{w \in \Omega,\, X_n(w) \to X(w)\}) = 1$.
- $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$.
- $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} X$ si $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \to 0$ ($p \geqslant 1$).
- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si pour toute fonction φ continue bornée, $\mathbb{E}[\varphi(X_n)] \to \mathbb{E}[\varphi(X)]$.

Thm (CV dominée). Si $X_n \xrightarrow{ps} X$ et pour tout n, $|X_n| \leqslant Y$ où $\mathbb{E}[Y] < \infty$, alors $\mathbb{E}[X_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X]$.

Prop (Borel-Cantelli). Si : $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Déf (fonction caractéristique). La FC d'une VA X est $\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}]$. Propriétés :

- ϕ_X est continue.
- $\phi_X(0) = 1$.
- $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\phi_X(u)| \leqslant 1$ et $\phi_X(-u) = \overline{\phi_X(u)}$.
- La FC caractérise la loi.

Thm (caractérisation CV en loi). $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi l'une des conditions suivantes équivalentes est vérifiée :

1. $\forall t$ tel que F_X continue en t, $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$.
2. *(Paul-Levy)* $(\phi_{X_n})_n$ CV simplement vers ϕ_X.

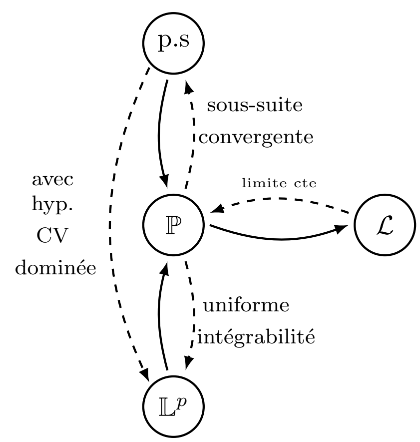
Thm (continuous mapping theorem). On suppose $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et f continue. Alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$.

Lemme (Slutsky). Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ constante, alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$.

Corollaire. Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ constante, alors $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c$ et $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Xc$.

Thm limites. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ VA i.i.d intégrables.

1. *LfGN.* $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$.
2. *LFGN.* $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{L}^1,\, p.s} \mathbb{E}(X_1)$.
3. *TCL.* On suppose que les VA admettent un moment d'ordre 2. Alors, en notant $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X_1)}$, $\sqrt{n}(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.



Inégalités. Si X admet un moment d'ordre $p > 0$ et $c \geqslant 0$ alors (inégalité de Markov): :

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant c) \leqslant \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{c^p}.$$

Si X admet moment d'ordre 2, (inégalité de Bienaymé-Tchebychev):

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant c) \leqslant \frac{\mathrm{Var}[X]}{c^2}.$$