3.6 Théorème d'inversion de Fourier

Leçons : 201, 234, 235, 236, 239, 250.

Référence : [Amr] p116.

Prérequis : propriétés de base transformation de Fourier, théorème de dérivation sous le signe intégral, théorème de Fubini, approximation de l'unité, Riesz-Fischer.

Lemme : On considère pour tout $s > 0$ le noyau de Gauss $\gamma_s : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi s}^d} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2s}\right)$. Alors $\hat{\gamma_s} = \left(\frac{2\pi}{s}\right)^{d/2} \gamma_{1/s}$.

Théorème (inversion de Fourier) : Soit $f \in L^1$ tel que $\hat{f} \in L^1$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\hat{\hat{f}}(x) = (2\pi)^d f(-x)$.

Application : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Cauchy de paramètre 1. Alors la fonction caractéristique de X est $\varphi_X : t \mapsto e^{-|t|}$.

Preuve du lemme. On commence par le cas $d = 1$ (le cas $d \geqslant 2$ se déduit grâce au théorème de Fubini). On applique le théorème de dérivation sous le signe intégral à $\hat{\gamma_s}$ et on trouve l'équation différentielle :
$\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{\gamma_s}'(\xi) = -s\xi\hat{\gamma_s}$, donc $\hat{\gamma_s}(\xi) = \hat{\gamma_s}(0)e^{-s\xi^2/2} = \sqrt{\frac{2\pi}{s}}\gamma_{1/s}(\xi)$.

□

Preuve du théorème d'inversion. Soit $f \in L^1$ tel que $\hat{f} \in L^1$. On notera également $\mathcal{F}(f)$ pour $\hat{f}$. On démontre la formule d'inversion par étapes :

1. Pour les noyaux de Gauss : d'après le lemme, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\hat{\hat{\gamma}}_s(\xi) = \left(\frac{2\pi}{s}\right)^{d/2} \widehat{\gamma_{1/s}}(\xi) = \left(\frac{2\pi}{s}\right)^{d/2} (2\pi s)^{d/2} \gamma_s(\xi) = (2\pi)^d \gamma_s(-\xi),$$

par parité de γ_s, d'où la formule d'inversion.

2. Pour les $f * \gamma_s$: on a, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{f * \gamma_s}}(-a) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f * \gamma_s}(x) e^{i\langle x,a\rangle} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)\hat{\gamma_s}(x) e^{i\langle x,a\rangle} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}(\hat{\gamma_s}(x) e^{i\langle x,a\rangle}) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{\hat{\gamma}}_s(x-a) \mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\gamma_s(a-x) \mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^d f * \gamma_s(a),
\end{aligned}$$

d'où la formule d'inversion.

3. Enfin, pour f, on utilise le fait que $(\gamma_s)_{s>0}$ est une approximation de l'unité : on a alors $\|f * \gamma_s - f\|_1 \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème de Riesz-Fischer, il existe une suite extraite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ tel que $(f * \gamma_{s_n})_n$ converge presque partout vers f. Montrons que $(\widehat{\widehat{f * \gamma_{s_n}}})_n$ converge presque partout vers $\hat{\hat{f}}$. On a :

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\widehat{f * \gamma_{s_n}}} - \hat{\hat{f}}\|_\infty &\leqslant \|\widehat{f * \gamma_{s_n}} - \hat{f}\|_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f * \gamma_{s_n}} - \hat{f}|,
\end{aligned}$$

or $|\widehat{f * \gamma_{s_n}} - \hat{f}| = |\hat{f}\hat{\gamma}_{s_n} - \hat{f}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et $|\widehat{f * \gamma_{s_n}} - \hat{f}| \leqslant 2|\hat{f}| \in L^1$, donc d'après le théorème de convergence dominée

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f * \gamma_{s_n}} - \hat{f}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

soit $\|\widehat{\widehat{f * \gamma_{s_n}}} - \hat{\hat{f}}\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $(\widehat{\widehat{f * \gamma_{s_n}}})_n$ converge presque partout vers $\hat{\hat{f}}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité

$$\widehat{\widehat{f * \gamma_{s_n}}} = (2\pi)^d f * \gamma_{s_n}(-.),$$

on obtient ainsi la formule d'inversion pour f.

□

Preuve de l'application. On note f la densité de X et on pose $g(x) = e^{-|x|}$. Alors $g \in L^1(\mathbb{R})$, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-ix\xi} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\xi)} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+i\xi)} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} \\ &= \frac{2}{1+\xi^2} = 2\pi f(\xi) \in L^1,\end{aligned}$$

donc d'après la formule d'inversion, on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{\hat{g}}(-x) = 2\pi g(x)$, soit $\varphi_X(x) = e^{-|x|}$.

□

Questions :

1. Connaissez-vous une autre démonstration du lemme ?

Réponses :

1. Par l'analyse complexe (voir [Amr] p156).