Université de Rennes 1
École Normale Supérieure de Rennes

Mémoire de master

246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Sacha QUAYLE
Encadré par Bachir Bekka

9 juillet 2023

Table des matières

Introduction

Les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude de fonctions périodiques. L'intuition de Fourier est la suivante : *on peut exprimer toute fonction périodique comme somme de fonctions sinusoïdales*. Il énonce que le résultat est vrai, et qu'il est facile de prouver la convergence de celle-ci. Il juge même toute hypothèse de continuité inutile... Mais il a fallu un siècle pour que les analystes dégagent les outils d'étude adaptés : une théorie de l'intégrale satisfaisante et les premiers concepts de l'analyse fonctionnelle. On sait aujourd'hui que la convergence d'une série de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$ vers f n'est pas toujours garantie, et elle dépend du mode de convergence et de la régularité de la fonction considérée. C'est donc une question délicate, et on rencontre deux problèmes célèbres : le premier est le contre-exemple de Dubois-Raymond qui nous assure qu'il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que la série de Fourier diverge en 0. Le deuxième est le phénomène de Gibbs qui illustre un problème de convergence des séries de Fourier aux points de discontinuité d'une fonction. En plus de la convergence en moyenne quadratique dans $L^2_{2\pi}$, on va s'intéresser à la convergence en moyenne de Cesàro, avec le théorème de Féjer, ainsi que normale et ponctuelle, avec le théorème de Dirichlet.

Dans la première partie, on introduit les notations, et on définit les coefficients de Fourier pour une fonction $f \in L^1_{2\pi}$, ainsi que les sommes partielles. On établit les premières propriétés, avec en particulier le lemme de Riemann-Lebesgue qui assure que la suite des coefficients de Fourier converge vers 0 lorsque $|n| \to +\infty$. Dans la deuxième partie, on s'intéresse à la convergence de la série de Fourier d'une fonction. On introduit les noyaux de Dirichlet et de Féjer, qui vont nous permettre de démontrer l'existence d'une fonction périodique continue dont la série de Fourier diverge en 0. On pourra également obtenir le théorème de convergence de Féjer, qui démontre la convergence des sommes de Césaro $\sigma_N(f)$ vers f, en norme infinie pour une fonction dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, et en norme L^p pour une fonction dans $L^p_{2\pi}$. On s'intéresse ensuite au cadre des foncions $L^2_{2\pi}$, qui constitue un espace Hilbert pour la norme $\|.\|_2$. Le système trigonométrique $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de cet espace, les résultats sur les espaces de Hilbert permettent donc d'obtenir la convergence de la série de Fourier en moyenne quadratique, et la formule de Parseval. Enfin, dans la troisième partie, on étudie quelques applications des séries de Fourier : la formule sommatoire de Poisson, la résolution d'une équation différentielle ordinaire, et enfin la résolution de l'équation de la chaleur.

Toutes les fonctions considérées sont des fonctions d'une variable réelle et à valeurs complexes. Sauf mention explicite du contraire, tous les résultats sont tirés de [Amr].

1 Coefficients et séries de Fourier

1.1 Notations, espace des fonctions périodiques

On introduit ici les notations qui seront utilisées dans toute la suite. On rappelle aussi des résultats de complétude sur certains espaces, que l'on admet.

Définition 1. Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite T-périodique si : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.

Remarque 2. Si f est une fonction T-périodique, alors la fonction g définie par $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ est 2π-périodique. Pour simplifier, on peut donc se restreindre à l'étude des fonctions 2π-périodiques.

Définition 3. On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace des fonctions 2π-périodiques continues.

Proposition 4. *L'espace $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.*

Soit $1 \leqslant p < +\infty$. On note $\mathcal{L}^p_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques appartenant à $\mathcal{L}^p_{loc}$, et on définit une semi-norme :

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^p,$$

qui induit une norme sur l'espace défini ci-dessous.

Définition 5. Soit $1 \leqslant p < +\infty$. On note $L^p_{2\pi} = \mathcal{L}^p_{2\pi}/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ presque partout.

L'espace $L^p_{2\pi}$ muni de $\|.\|_p$ est donc un espace normé.

Proposition 6 (Riesz-Fischer). *Soit $1 \leqslant p < +\infty$. L'espace $(L^p_{2\pi}, \|.\|_p)$ est un espace de Banach, et : si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions convergeant vers une fonction f dans L^p, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge simplement presque partout vers f.*

Proposition 7. *L'espace $L^2_{2\pi}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Définition 8. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n \in \mathcal{C}_{2\pi}$ défini par $e_n(x) = e^{inx}$. On appelle la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ le système trigonométrique.

Définition 9. On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire d'éléments du système trigonométrique.

Définition 10 (produit de convolution). Pour $f, g \in L^1_{2\pi}$, le produit de convolution $f * g$ au point x, quand il existe, est donné par

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t.$$

Définition 11 (approximation de l'unité). Une suite $(\varphi_n)_n$ d'éléments de $L^1_{2\pi}$ est une approximation de l'unité si :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_n = 1$.
2. Pour tout $\delta > 0$, $\displaystyle\int_{|t|\geqslant\delta} \varphi_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque 12. Si $1 \leqslant p < \infty$, toutes les propriétés sur la convolution dans $\mathbb{R}^d$ restent vraies dans le cadre $L^p_{2\pi}$. En particulier, si $f, g \in L^1_{2\pi}$, alors le produit de convolution $f * g$ existe pour presque tout $x \in [0, 2\pi]$.

Définition 13 (translation). Soit $1 \leqslant p < \infty$. Si $f \in L^p_{2\pi}$, on définit pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a f$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tau_a f(x) = f(x-a).$$

On peut maintenant s'intéresser aux coefficients de Fourier associés à une fonction, et établir les premières propriétés, ce qui est l'objet de la sous-section suivante.

1.2 Coefficients et séries de Fourier

Définition 14 (coefficients de Fourier). Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre $c_n(f) \in \mathbb{C}$ défini par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x.$$

Remarque 15. Pour $f \in L^2_{2\pi}$, on a $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$.

Exemple 16. Soit f la fonction 2π-périodique définie par : $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$. Alors : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2}$.

Proposition 17 (propriétés). *Soient $f \in L^1_{2\pi}$, $a \in \mathbb{R}$, $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$ et $g \in L^\infty_{2\pi}$. Alors :*

1. *En notant $f_\sigma(x) = f(-x)$, $c_n(f_\sigma) = c_{-n}(f)$.*
2. *$c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$.*
3. *$c_n(\tau_a f) = e^{-ina}c_n(f)$.*
4. *$c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)e_n$.*
5. *$f * e_n = c_n(f)e_n$.*

Démonstration. Ces différents résultats découlent facilement des propriétés standards du calcul intégral. □

Proposition 18. *Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et f est C^1 par morceaux, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = inc_n(f)$.*

Démonstration. La fonction f est C^1 par morceaux, donc on peut écrire $[0, 2\pi] = \displaystyle\bigcup_{j=0}^{p-1}[a_j, a_{j+1}]$ où f est C^1 sur chaque $[a_j, a_{j+1}]$. On a alors, en effectuant des intégrations par parties : pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$
\begin{aligned}
c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{p-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{p-1}\left(\left[f(x)e^{-inx}\right]_{a_j}^{a_{j+1}} + in\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)e^{inx}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[f(x)e^{-inx}\right]_0^{2\pi} + inc_n(f),
\end{aligned}
$$

d'où $c_n(f') = inc_n(f)$. □

Théorème 19 (lemme de Riemann-Lebesgue). *Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a $c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Démonstration. On suppose d'abord que f est C^1. Alors d'après la proposition précédente :

$$
\forall n \geqslant 1,\ |c_n(f)| = \frac{|c_n(f')|}{|n|} \leqslant \frac{\|f'\|_1}{|n|} \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0,
$$

donc $c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Dans le cas où $f \in L^1_{2\pi}$: soit $\varepsilon > 0$. Par densité de l'ensemble des fonctions C^1 à support compact, donc de C^1, dans L^1, il existe $g \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$ telle que $\|f-g\|_1 \leqslant \varepsilon$. Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\forall n \geqslant 1,\ |c_n(f)| &\leqslant |c_n(f-g)| + |c_n(g)| \\
&\leqslant \|f-g\|_1 + |c_n(g)| \\
&\leqslant \varepsilon + |c_n(g)|,
\end{aligned}
$$

or $c_n(g) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc on a bien $c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Proposition 20. *L'application $\gamma : L^1_{2\pi} \to c_0(\mathbb{Z})$ définie par $\gamma(f) = (c_n(f))_{n\in Z}$ est un homomorphisme d'algèbres de $(L^1_{2\pi}, *)$ dans $(c_0(\mathbb{Z}), .)$, continu de norme 1.*

Démonstration.
- D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, γ est bien définie.
- Montrons que γ est continue et de norme 1. On a :

$$
\forall f \in L^1_{2\pi},\ |c_n(f)| \leqslant \|f\|_1,
$$

  donc γ est continue, et $\|\gamma\| \leqslant 1$. Or on a $\|\gamma(e_0)\|_\infty = 1$, donc on a bien $\|\gamma\| = 1$.
- Il reste donc à montrer que si $f, g \in L^1_{2\pi}$, alors $\gamma(f*g) = \gamma(f)\gamma(g)$. Or pour deux telles fonctions, la fonction φ définie sur $[0,2\pi]^2$ par $\varphi(x,t) = f(x-t)g(t)e^{-inx}$ est intégrable, donc d'après le théorème de Fubini :

$$
\begin{aligned}
c_n(f*g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f*g(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)e^{-inx}\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= c_n(g)c_n(f).
\end{aligned}
$$

  D'où $\gamma(f*g) = \gamma(f)\gamma(g)$.

□

Définition 21 (somme partielle). Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $N \in \mathbb{N}$. La somme partielle d'ordre N de f est la fonction $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$.

Exemple 22. En reprenant l'exemple 16, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N(f)(0) = 0$.

Définition 23 (somme partielle de Cesàro). Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $N \in \mathbb{N}$. La somme partielle de Césaro de la série de Fourier de f est la fonction $\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(f)$.

La question qui se pose naturellement désormais est de savoir si une fonction dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ peut s'obtenir comme "combinaison linéaire infinie" des e_n. Plus précisément, on s'intéresse aux questions suivantes :

1. Pour quelles fonctions y-a-t-il convergence de $(S_N(f))_N$?
2. S'il y a convergence, y-a-t-il convergence vers f ?
3. S'il y a convergence, de quel type s'agit-il ? Convergence en norme $\|.\|_p$, simple, uniforme, au sens de Cesàro ?

C'est donc l'objet de la section suivante.

2 Convergence des séries de Fourier

2.1 Noyaux de Dirichlet et Féjer

Définition 24 (noyau de Dirichlet). Soit $N \geqslant 1$. Le noyau de Dirichlet d'ordre N est la fonction $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$.

Proposition 25 (propriétés). *Soit $N \geqslant 1$.*

1. *La fonction D_N est paire, 2π-périodique et vérifie $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N = 1$.*
2. *D_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}$.*
3. *Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, $S_N(f) = f * D_N$.*

Démonstration. 1. La fonction D_N est bien paire et 2π-périodique. De plus,

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N = \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} e_n = \sum_{n=-N}^{N} 2\pi\delta_{0,n},$$

donc on a bien $\|D_N\|_1 = 1$.

2. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $D_N(x) = 2N+1$. Sinon, on a

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{e^{-iNx} - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{ix/2}}{e^{ix/2}} \frac{e^{-i(N+1/2)x} - e^{i(N+1/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \\ &= \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

On remarque que cette dernière expression tend vers $2N+1$ lorsque x tend vers 0, donc D_N se prolonge par continuité en $x = 0$, donc en les $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ par périodicité.

3. On a

$$f * D_N = \sum_{n=-N}^{N} (f * e_n) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n = S_N(f).$$

□

Définition 26 (noyau de Féjer). Soit $N \geqslant 1$. Le noyau de Féjer d'ordre N est la fonction $K_N = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} D_j$.

Proposition 27 (propriétés). *1. La suite de fonctions $(K_N)_{N\geqslant 1}$ est une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}$.*

2. *Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, pour tout $N \geqslant 1$, $\sigma_N(f) = f * K_N$.*

Démonstration. 1. On a, pour tout $x \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} NK_N(x) &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\sin((j+1/2)x)}{\sin(x/2)} = \frac{1}{\sin(x/2)} \Im\left(\sum_{j=0}^{N-1} e^{i(j+1/2)x}\right) \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im\left(e^{ix/2}\sum_{j=0}^{N-1} e^{ijx}\right) = \frac{1}{\sin(x/2)} \Im\left(\frac{1-e^{iNx}}{1-e^{ix}}\right) \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im\left(e^{iNx/2}\frac{e^{iNx/2} - e^{-iNx/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}\right) = \frac{\sin(Nx/2)^2}{\sin(x/2)^2}, \end{aligned}$$

donc $K_N \geqslant 0$, et :

$$\|K_N\|_1 = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N = 1.$$

D'autre part : pour tout $\delta > 0$,

$$0 \leqslant \int_{|t|\geqslant\delta} K_N(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{|t|\geqslant\delta}\frac{1}{N\sin^2(\delta/2)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0,$$

donc $(K_N)_N$ est bien une approx. de l'unité dans $L^1_{2\pi}$.

2. On a :

$$f * K_N = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f * D_N = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} S_N(f) = \sigma_N(f).$$

□

Les noyaux de Dirichlet et de Féjer vont nous permettre de mettre en défaut la convergence des séries de Fourier dans certains cadres, mais également d'obtenir des théorèmes de convergence. C'est l'objet de la sous-section suivante.

2.2 Théorèmes de convergence

On commence par établir l'existence d'un contre-exemple à la convergence des séries de Fourier, sans en donner une expression explicite, à l'aide du théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème 28 (Banach-Steinhaus, [Gou]). *Soient E un espace de Banach, et F un espace vectoriel normé. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose :*

$$\forall x \in E, \ \ \mathit{sup}_{i\in I} \|T_i x\|_F < \infty.$$

Alors :

$$\mathit{sup}_{i\in I}\|T_i\| < \infty.$$

Démonstration. On pose, pour tout $N \geqslant 1$, $\Phi_N = \bigcap_{i\in I}\{x \in E, \|T_i x\|_f < \infty\}$. Alors, pour tout $N \geqslant 1$, l'ensemble Φ_N est fermé car les T_i sont continues, et $\bigcup_{N\geqslant 1}\Phi_N = E$. Puisque E est complet, d'après le théorème de Baire, il existe $N \geqslant 1$ tel que Φ_N est d'intérieur non vide : il existe ainsi $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tel que la boule ouverte $B(x_0, r_0)$ est incluse dans Φ_N. Ainsi, si $y \in B_E(0,1)$, alors :

$$\forall i \in I, \ \|T_i(r_0 y + x_0)\|_F \leqslant N,$$

donc :

$$\begin{aligned}\forall i \in I, \ \|T_i(y)\|_F &\leqslant \frac{1}{r_0}\|T_i(r_0 y + x_0)\|_F + \|T_i(x_0)\|_F \\ &\leqslant \frac{1}{r_0}(N + \sup_{i\in I}\|T_i x_0\|_F),\end{aligned}$$

donc :

$$\sup_{i\in I}\|T_i\| \leqslant \frac{1}{r_0}(N + \sup_{i\in I}\|T_i x_0\|_F) < \infty,$$

d'où le théorème. □

Le théorème de Banach-Steinhaus permet alors d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 29 (contre-exemple, [Gou]). *Il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier diverge en 0.*

Démonstration. On pose, pour tout $N \geqslant 1$, l_N la forme linéaire sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ définie par $l_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) = S_N(f)(0)$. L'application l_N est bien linéaire et :

$$\begin{aligned}
\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi},\ |l_N(f)| &= \left| \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{n=-N}^{N} e^{-int} \mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_N(t) \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_N| = \|f\|_\infty C_N,
\end{aligned}$$

où $C_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_N|$. Ainsi, l_N est continue et $\|l_N\| \leqslant C_N$. Montrons que $\|l_N\| = C_N$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon = \frac{D_N}{|D_N| + \varepsilon}$. On a bien $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, et $l_N(f_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{D_N^2}{|D_N|+\varepsilon}$. Or $\frac{D_N^2}{|D_N|+\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} |D_N|$, et on peut dominer $\frac{D_N^2}{|D_N|+\varepsilon}$ par $|D_N|$, qui est intégrable, donc on a :

$$l_N(f_\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} C_N,$$

puis $\|l_N\| = C_N$. On a alors, pour tout $N \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\|l_N\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin((N+1/2)x)|}{|\sin(x/2)|} \mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin((N+1/2)x)|}{|x|} \mathrm{d}x \ (\text{car } |\sin(u)| \leqslant |u|) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi(N+1/2)} \frac{|\sin(x)|}{|x|} \mathrm{d}x \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,
\end{aligned}$$

donc par contraposée du théorème de Banach-Steinhaus, qu'il est licite d'appliquer car $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach, il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ tel que $l_N(f) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, i.e. la série de Fourier de f diverge en 0. □

On s'intéresse désormais à la convergence des séries de Fourier, en norme $\|.\|_p$ ou $\|.\|_\infty$. Le théorème de convergence de Féjer démontre la convergence au sens de Cesàro. On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 30. *Soit $1 \leqslant p < \infty$. Si $f \in L^p_{2\pi}$, alors l'application $\Phi : \mathbb{R} \to L^p_{2\pi}$ définie par $\Phi(a) = \tau_a f$ est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On suppose d'abord que f est C^∞. Alors en particulier f est continue sur $[0, 2\pi]$, donc d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue, et donc par 2π-périodicité : il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [0, 2\pi],\ |x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Alors : pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $|a-b| \leqslant \delta$,

$$\|\tau_a f - \tau_b f\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x-a) - f(x-b)|^p \, dx \leqslant \varepsilon^p,$$

donc $\|\tau_a f - \tau_b f\|_p \leqslant \varepsilon$ et Φ est bien uniformément continue.

Si $f \in L^p_{2\pi}$, alors par densité de l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty_{2\pi}$ dans $L^p_{2\pi}$, il existe $g \in \mathcal{C}^\infty_{2\pi}$ tel que $\|f-g\|_p \leqslant \varepsilon$. D'après ce qui précède, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R},\ |a-b| \leqslant \delta \implies \|\tau_a g - \tau_b g\|_p \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi : pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $|a-b| \leqslant \delta$,

$$\|\tau_a f - \tau_b f\|_p \leqslant \|\tau_a f - \tau_a g\|_p + \|\tau_a g - \tau_b g\|_p + \|\tau_b g - \tau_b f\|_p \leqslant 3\varepsilon.$$

Donc Φ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. □

Théorème 31 (Fêjer). *Soit* $1 \leqslant p < \infty$.

1. *Si* $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, *alors* $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. *Si* $f \in L^p_{2\pi}$, *alors* $\|\sigma_N(f) - f\|_p \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. 1. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Soit $\varepsilon > 0$. f est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc y est uniformément continue d'après le théorème de Heine, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [0,2\pi],\ |x-y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Alors : pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned}
|\sigma_N(f)(x) - f(x)| &= |f * K_N(x) - f(x)| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x-t) - f(x))K_N(t)\mathrm{d}t\right| \text{ (car $(K_N)_N$ est une approximation de l'unité)} \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x-t) - f(t)|K_N(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{t\leqslant\delta} |f(x-t) - f(t)|K_N(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{t>\delta} |f(x-t) - f(t)|K_N(t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant \varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_{t\leqslant\delta} K_N + 2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{t>\delta} K_N(t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{t>\delta} K_N,
\end{aligned}$$

or $(K_N)_N$ est une approximation de l'unité, donc $\displaystyle\int_{t>\delta} K_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\displaystyle\int_{t>\delta} K_N \leqslant \varepsilon$. Ainsi :

$$\forall n \geqslant N,\ \|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon,$$

d'où $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Soit $f \in L^p_{2\pi}$. Alors, pour tout $N \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\|\sigma_N(f)-f\|_p^p &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sigma_N(f)(x)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t-x)-f(x))K_N(t)\mathrm{d}t\right|^p\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t-x)-f(x)|^pK_N(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder appliquée à la mesure de probabilité $\frac{1}{2\pi}K_N(t)\mathrm{d}t$. Ainsi, en notant $g(t)=\|\tau_{-t}f-f\|_p$,

$$\begin{aligned}\|\sigma_N(f)-f\|_p^p &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t-x)-f(x)|^p\mathrm{d}xK_N(t)\mathrm{d}t \text{ (d'après Fubini-Tonelli)}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_N(t)g(-t)\mathrm{d}t\\ &= (g*K_N)(0)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}g(0)=0,\end{aligned}$$

car d'après le lemme précédent $g\in\mathcal{C}_{2\pi}$, donc en appliquant 1. la suite de fonctions $(\sigma_N(g))_N$ converge uniformément, donc simplement, vers g. Ainsi :

$$\|\sigma_N(f)-f\|_p\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

□

En plus du théorème de Féjer, on dispose du théorème de Dirichlet, qui donne un critère de convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction $L^1_{2\pi}$.

Théorème 32 (Dirichlet). *Soient $f\in L^1_{2\pi}$ et $x_0\in\mathbb{R}$. On suppose :*

1. *$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ existent (on les note respectivement $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$).*
2. *f possède une dérivée à gauche et une dérivée à droite en x_0.*

Alors : $\lim\limits_{N\to+\infty}S_N(f)(x_0)=\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$.

Démonstration. Quitte à translater, on peut supposer que $x_0=0$. D'après les propriétés établies sur le noyau de Dirichlet, on a

$$S_N(f)(0)=f*D_N(f)(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(-x)D_N(x)\mathrm{d}x.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}S_N(f)(0)-\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(-x)D_N(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x)+f(-x)-f(0^-)-f(0^+))D_N(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}h(x)\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

où h est la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, \pi],\ h(x) = \frac{f(x) + f(-x) - f(0^-) - f(0^+)}{\sin(x/2)}.$$

La fonction h est localement intégrable sur $]0, \pi]$, et puisque

$$\frac{f(x) - f(0^+)}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} f'(0^+),$$

la fonction h est bornée au voisinage de 0, donc est intégrable sur $[0, \pi]$. Ainsi, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue,

$$\int_0^\pi h(x) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right) \mathrm{d}x \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ainsi

$$S_N(f)(0) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2}.$$

□

2.3 Applications du théorème de convergence de Féjer

Le théorème de convergence de Féjer permet ainsi de démontrer la convergence en moyenne de Césaro des sommes partielles de Fourier vers la fonction. Puisque $\sigma_N(f) \in \mathrm{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{Z}})$, on a la proposition suivante :

Proposition 33 (application dans $L^2_{2\pi}$). *La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$. Ainsi, si $f \in L^2_{2\pi}$,*

1. *Dans $L^2_{2\pi}$, $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n$.*
2. *On a la formule de Parseval : $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$*

On n'a cependant pas forcément la convergence de la série de Fourier, comme on l'a vu avec la proposition 29. En revanche, grâce au théorème de Féjer on a les résultats suivants.

Théorème 34. 1. *Soient $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x_0) = l \implies l = f(x_0).$$

2. *Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $(S_N(f))_N$ converge simplement dans $\mathbb{R}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = S(f)(x).$$

Démonstration. 1. On a $S_N(f)(x_0) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} l$, donc d'après le théorème de Cesàro, on a $\sigma_N(f)(x_0) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} l$. Or, d'après le théorème de convergence de Féjer, puisque f est continue, on a $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc en particulier $\sigma_N(f)(x_0) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$, donc par unicité de la limite, on a bien $l = f(x_0)$.

2. Découle de 1.

□

Théorème 35. *Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ et on a $f = S(f)$.*

Démonstration. La fonction f' est 2π-périodique, continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$, donc elle est L^2 et la formule de Parseval donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n(f)|^2 = \|f'\|_2^2 < \infty,$$

Ainsi, on a : pour tout $N > 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant |n| \leqslant N} |c_n(f)| &= \sum_{1 \leqslant |n| \leqslant N} \frac{1}{|n|} |n c_n(f)| \\
&\leqslant \left(\sum_{1 \leqslant |n| \leqslant N} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{1 \leqslant |n| \leqslant N} n^2 |c_n(f)|^2 \right)^{1/2} \quad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&\leqslant \left(\sum_{1 \leqslant |n|} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{1 \leqslant |n|} n^2 |c_n(f)|^2 \right)^{1/2} < \infty,
\end{aligned}$$

donc $(S_N(f))_N$ converge normalement, donc simplement sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après le théorème précédent, on a bien l'égalité souhaitée. □

Tous ces résultats permettent par exemple de calculer certaines de sommes de séries numériques, comme on peut le voir avec l'application suivante.

Application 36. On a : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$, et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Démonstration. On considère $f \in L^2_{2\pi}$ définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$. Alors on peut calculer ses coefficients de Fourier :

- $c_0(f) = \displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{x^2 e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{in} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{inx} \mathrm{d}x \right) \quad \text{(par IPP)} \\
&= \frac{1}{i\pi n} \left(\left[\frac{x e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \mathrm{d}x \right) \quad \text{(par IPP)} \\
&= \frac{1}{i\pi n} \frac{2\pi \cos(n\pi)}{-in} = \frac{2(-1)^n}{n^2},
\end{aligned}$$

1. D'une part, comme f est continue et de classe C^1 par morceaux, le théorème 35 assure que sa série de Fourier converge normalement, donc simplement sur $\mathbb{R}$, vers f, ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx} \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).
\end{aligned}$$

En évaluant en $x = \pi$, on obtient : $\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$, d'où $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. En évaluant en $x = 0$, on obtient : $0 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, d'où $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

2. D'autre part, comme $f \in L^2_{2\pi}$, d'après la formule de Parseval :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2,$$

avec : $\|f\|_2^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \mathrm{d}x = \dfrac{\pi^4}{5}$, d'où $\dfrac{\pi^4}{5} = \dfrac{\pi^4}{9} + 4\sum_{n\in\mathbb{Z}*}\dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^4}$. On obtient ainsi la formule $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$.

$\square$

3 Applications

3.1 Formule sommatoire de Poisson

Cette application des séries de Fourier relie les valeurs "entières" d'une fonction et de sa transformée de Fourier. Elle a des applications en théorie des nombres, où elle permet de calculer les sommes de certaines fonctions arithmétiques.

Théorème 37. *Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que*

$$\underset{x \to \mathbb{R}}{sup}\, x^2|f(x)| < \infty, \qquad \underset{x \to \mathbb{R}}{sup}\, x^2|f'(x)| < \infty.$$

Alors f vérifie l'identité suivante, appelée formule sommatoire de Poisson :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par étudier la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$. Soit $a > 0$. On a : pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\sup_{|x| \leqslant a} |f(x + 2\pi n)| = \sup_{|y - 2\pi n| \leqslant a} |f(y)| \leqslant \sup_{|y| \geqslant a - 2\pi |n|} |f(y)|,$$

Or par hypothèse, il existe $C > 0$ telle que $y^2|f(y)| \leqslant C$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\sup_{|y| \geqslant a - 2\pi |n|} |f(y)| \leqslant \frac{C}{(2\pi|n| - a)^2},$$

pour n assez grand pour que $2\pi|n| - a \neq 0$. La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$ est donc normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$: on note $g(x)$ sa somme. D'après la deuxième hypothèse, on peut refaire exactement le même raisonnement que précédemment à la fonction f', assurant que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x + 2\pi n)$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme, g est de classe C^1 et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x + 2\pi n).$$

Ainsi, g est de classe C^1, et elle est 2π-périodique. D'après le théorème 35, la série de Fourier de g est normalement convergente, et est égale à g :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g) e^{inx}.$$

Or : pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi k) e^{-inx} \mathrm{d}x.$$

Comme la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$, le théorème d'interversion somme-intégrale donne :

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x + 2\pi k) e^{-inx} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x = \frac{\hat{f}(n)}{2\pi},$$

d'où la formule annoncée. □

Corollaire 38. *En évaluant en $x = 0$, en gardant les notations précédentes :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Application 39. On définit la fonction thêta de Jacobi par :

$$\forall t > 0,\ \theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi n^2 t).$$

Alors on a l'identité de Jacobi :

$$\forall t > 0,\ \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

Démonstration. On considère, pour tout $s > 0$, le noyau de Gauss $\gamma_s \in C^1(\mathbb{R})$ défini par :

$$\gamma_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}}.$$

La fonction γ_s vérifie les hypothèses du théorème 37, donc la formule sommatoire de Poisson évalué en 0 donne :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_s(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\gamma_s}(n).$$

Pour calculer $\hat{\gamma_s}$, on peut par exemple appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale pour trouver une équation différentielle vérifiée par $\hat{\gamma_s}$, et on trouve :

$$\hat{\gamma_s}(x) = e^{-sx^2/2}.$$

On obtient ainsi :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-2\pi^2 n^2/s} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2/2s}.$$

On obtient alors, pour tout $t > 0$, en prenant $s = \frac{2\pi}{t}$:

$$\sqrt{t}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t},$$

d'où l'identité de Jacobi. □

3.2 Résolution d'une équation différentielle ordinaire

La théorie autour des séries de Fourier permet de résoudre des équations différentielles ordinaires. Nous allons illustrer la démarche sur l'exemple suivant : on considère l'équation

$$y^{(4)} + 4y'' + 4 = |\sin(2x)|, \tag{I}$$

d'inconnue $x \mapsto y(x)$. La méthode générale consiste à rechercher une solution particulière sous forme de série trigonométrique. Nous allons démontrer ici le résultat suivant :

Théorème 40. *La solution générale de (I) est de la forme*

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4nx)}{(4n^2-1)(64n^4-20n^2+1)},$$

où $y_1(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + C\cos(2x) + D\sin(2x)$, avec $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Démonstration. L'équation homogène associée à (I) est :

$$y^{(4)} + 4y'' + 4,$$

d'équation caractéristique $r^4 + 5r^2 + 4 = 0$, dont les racines sont $-i, i, -2i$ et $2i$. La solution générale réelle de l'équation homogène est donc de la forme

$$y_1(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + C\cos(2x) + D\sin(2x),$$

avec $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

On cherche maintenant une solution particulière de (I). On la cherche de classe C^4, et sous forme d'une série trigonométrique. La fonction $f : x \mapsto |\sin(2x)|$ est 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux, donc d'après le théorème 35, elle est la somme de sa série de Fourier :

$$|\sin(2x)| = c_0(f) + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} c_n(f)e^{inx}.$$

Or :

- $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin(2x)|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(2x)|e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(2x)|e^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \sin(2x)e^{-inx}\mathrm{d}x - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(2x)e^{-inx}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \sin(2x)e^{-inx}\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \sin(2(x+\pi))e^{-in(x+\pi)}\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, si n est impair, $c_n(f) = 0$. Et :

$$\begin{aligned}
c_{2n}(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(2x)e^{-i2nx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{i\pi}\int_0^{\pi/2} e^{2i(1-n)x}\mathrm{d}x - \frac{1}{i\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-i2(1+n)x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{\pi}\left(\frac{e^{2i(1-n)\frac{\pi}{2}} - 1}{2(1-n)} - \frac{e^{-2i(1+n)\frac{\pi}{2}} - 1}{-2(1+n)}\right) \\
&= \frac{-e^{-in\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{-2e^{-in\pi}}{\pi(n^2-1)},
\end{aligned}$$

Ainsi, si n est impair, alors $c_{2n}(f) = 0$. Et :

$$c_{4n}(f) = -\frac{2}{\pi(4n^2-1)}.$$

On en déduit finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(2x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(4nx)}{4n^2-1}.$$

Comme (I) ne comporte que des dérivées d'ordre pair, on peut chercher une solution particulière sous la forme

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0}\alpha_n \cos(4nx).$$

Si l'on suppose que l'on puisse dériver quatre fois terme à terme la série précédente, alors on a :

$$f^{(4)}(x) + 5f''(x) + 4 = 4\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n(64n^2 - 20n^2 + 1)\cos(4nx).$$

Puisque $64n^2 - 20n^2 + 1$ ne s'annule pas, on peut identifier terme à terme et on obtient donc la forme souhaitée. □

3.3 Résolution de l'équation de la chaleur

On peut également utiliser les séries de Fourier pour résoudre une équation aux dérivées partielles, l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times [0,l] \\ u(0,x) = f(x),\ \forall x \in [0,l], \\ u(t,0) = u(t,l) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{II}$$

d'inconnue $\mathbb{R}_+ \times [0,l]$, $(t,x) \mapsto u(t,x)$, fonction qui mesure la température, à l'instant t au point d'abscisse x, d'une tige rectiligne de longueur l, isolée aux extrémités. On suppose également que la fonction f est de classe C^1, avec $f(0) = f(l) = 0$.

Théorème 41. *Il existe une unique solution classique à l'équation de la chaleur, c'est à dire une fonction de classe C^2 vérifiant (II), et elle est donnée par :*

$$u(t,x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n t}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

où $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ et

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx.$$

Démonstration. On ne démontre ici que l'existence de la solution. On cherche une solution par la méthode de séparation des variables, c'est-à-dire sous la forme

$$u(t,x) = \varphi(x)\psi(t).$$

avec φ et ψ qui ne s'annulent pas sur $]0,l[$ et $]0,+\infty[$ respectivement. Pour que u soit solution de (II), il faut que

$$\varphi(x)\psi'(t) = \varphi''(x)\psi(t),$$

soit

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\phi(x)} = \lambda,$$

où λ est une constante. On obtient alors les deux équations

$$\psi'(t) + \lambda\psi(t) = 0, \quad \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0.$$

Pour ψ, il existe alors une constante C telle que $\psi(t) = Ce^{-\lambda t}$.
Pour φ : on remarque d'abord que pour que l'équation $\varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0$ possède une solution non triviale, il faut que $\lambda > 0$. En effet : si $\lambda = 0$, alors φ est de la forme

$$\varphi(x) = Ax + B,$$

or les conditions initiales sur u impliquent $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, donc on aurait $A = B = 0$. Et si $\lambda < 0$, alors φ est de la forme

$$\varphi(x) = Ae^{-x\sqrt{-l}} + Be^{x\sqrt{-l}},$$

et les conditions initiales impliquent également $A = B = 0$. Ainsi, on doit avoir $\lambda > 0$, et dans ce cas, φ est de la forme

$$\varphi(x) = A\cos(x\sqrt{\lambda}) + B\sin(x\sqrt{\lambda}).$$

Les conditions initiales donnent

$$0 = \varphi(0) = A, \quad 0 = \varphi(l) = \sin(l\sqrt{\lambda}),$$

donc, pour que φ ne soit pas triviale, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = \lambda_n = (n\pi/l)^2$. On obtient ainsi une suite de solutions de (II) (sans imposer la condition initiale sur le temps), donnée par

$$u_n(t, x) = \exp(-\lambda_n t)\sin(\sqrt{\lambda_n}x).$$

Comme l'équation est linéaire, le principe de superposition nous donne une solution de (II), donnée par

$$u(t, x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n \exp(-\lambda_n t)\sin(\sqrt{\lambda_n}x),$$

où les (a_n) sont des constantes. La condition initiale $u(0, x) = f(x)$ donne

$$\forall x \in [0, l],\ f(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x).$$

La fonction f étant de classe C^1 telle que $f(0) = f(l) = 0$, on peut la prolonger en une fonction continue, C^1 par morceaux, périodique sur $\mathbb{R}$, et alors d'après le théorème 35, cette condition impose

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x.$$

On applique alors le théorème de dérivation sous le signe somme aux fonctions partielles $u(t, .)$ et $u(., x)$, ce qui est licite puisque par définition de la suite $(a_n)_n$, elle est bornée et la série Σa_n est absolument convergente. Les séries de fonctions partielles de u sont donc uniformément convergentes sur tout segment, donc on peut appliquer le théorème. On vérifie alors que u est solution de (II), ce qui donne l'existence.

$\square$

Références

[Amr] El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.*

[Gou] Gourdon. *Analyse.*