

### 3.17 Lemme de Morse

Leçons : 171, 206, 214, 215.

Référence : [Rou].

**Prérequis** : matrices symétriques/antisymétriques, théorème d'inversion locale, formules de Taylor, réduction des formes quadratiques réelles, signature.

**Lemme** : Soit  $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$  inversible. lors il existe un voisinage  $V$  de  $A_0$  dans  $S_n(\mathbb{R})$  et  $\rho \in C^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$  tel que :  $\forall A \in V, A = {}^t\rho(A)A_0\rho(A)$ .

**Théorème** : Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert contenant 0 et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^3$ . On suppose que 0 est un point critique non dégénéré de  $f$ , et que la forme quadratique  $d^2f(0)$  est de signature  $(p, n-p)$ . lors il existe un  $C^1$ -difféomorphisme  $\varphi$  entre deux voisinages  $V_0$  et  $W_0$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\varphi(0) = 0$ , et :

$$\forall x \in V_0, f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2.$$

*Preuve du lemme.* On considère la fonction  $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R})$  définie par  $\varphi(M) = {}^tMA_0M$ . On voudrait appliquer le théorème d'inversion locale (TIL) à la fonction  $\varphi$  en  $I_n$  : pour cela il faut d'abord calculer sa différentielle. Pour tout  $H \in M_n(\mathbb{R})$ , on a

$$\varphi(I_n + H) = A_0 + {}^t(A_0H) + A_0H + {}^tHA_0H,$$

avec  ${}^tHA_0H \underset{H \rightarrow 0}{=} o(\|H\|)$ , donc on en déduit que  $\varphi$  est différentiable en  $I_n$  et  $d\varphi(I_n) : H \mapsto {}^t(A_0H) + A_0H$ .

insi,  $\ker(d\varphi(I_n)) = \{H \in M_n(\mathbb{R}), A_0H \in A_n(\mathbb{R})\}$ , donc  $d\varphi(I_n)$  n'est pas injective. Pour pouvoir appliquer le TIL, on va donc considérer une restriction. Puisque  $M_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R})$ , on a  $M_n(\mathbb{R}) = \ker d\varphi(I_n) \oplus F$ , où  $F = \{H \in M_n(\mathbb{R}), A_0H \in S_n(\mathbb{R})\}$ . Soit  $\psi$  la restriction de  $\varphi$  à  $F$ , qui est un SEV de  $M_n(\mathbb{R})$ . On a  $I_n \in F$  car  $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ , donc  $\psi$  est différentiable en  $I_n$  et  $d\psi(I_n) = d\varphi(I_n)|_F$ . insi,  $\ker d\psi(I_n) = \ker d\varphi(I_n) \cap F = \{0\}$  et  $d\psi(I_n)$  est injective, donc bijective par égalité des dimensions de  $F$  et  $S_n(\mathbb{R})$ . insi, d'après le TIL, il existe  $U$  voisinage de  $I_n$  dans  $F$  et  $V$  voisinage de  $A_0$  dans  $S_n(\mathbb{R})$  tels que  $\psi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U \rightarrow V$ . Quitte à considérer  $U \cap GL_n(\mathbb{R})$  qui reste encore ouvert, on peut supposer que  $U \subset GL_n(\mathbb{R})$ . En posant ainsi  $\rho = \psi|_U^{-1} : V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ , on obtient le lemme. □

*Preuve du théorème.* Quitte à restreindre  $U$ , on peut supposer  $U$  convexe. lors, d'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 :

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = xdf(0) + \int_0^1 (1-t)d^2f(tx)(x,x)dt,$$

avec  $df(0) = 0$  par hypothèse et  $d^2f(tx)(x,x) = {}^tx\text{Hess}f(tx)x$ , donc on peut écrire  $f(x) - f(0) = {}^txQ(x)x$  où

$$\forall x \in U, Q(x) = \int_0^1 \text{Hess}f(tx)dt \in S_n(\mathbb{R}),$$

et on peut déjà remarquer que d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, la fonction  $Q$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  (car la fonction  $f$  est de classe  $C^3$ ). On a  $Q(0) = \frac{1}{2}\text{Hess}f(0) \in S_n(\mathbb{R})$  et  $Q(0) \in GL_n(\mathbb{R})$  par hypothèse, donc d'après le lemme il existe un voisinage  $V$  de  $Q(0)$  dans  $S_n(\mathbb{R})$  et une application  $\rho \in C^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$  tel que :

$$\forall A \in V, A = {}^t\rho(A)Q(0)\rho(A).$$

Or  $Q$  est continue et à valeurs dans  $S_n(\mathbb{R})$ , donc il existe un voisinage  $W$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $Q(W) \subset V$ . insi :

$$\forall x \in W, f(x) - f(0) = {}^txQ(x)x = {}^t\rho(Q(x))Q(0)\rho(Q(x)).$$

Or par hypothèse, la forme quadratique  $d^2f(0)$  est de signature  $(p, n-p)$ , donc il existe une matrice  $P \in O_n(\mathbb{R})$  tel que  $Q(0) = {}^tP \begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & -I_{n-p} \end{pmatrix} P$ , et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in W, f(x) - f(0) &= {}^t\varphi(x) \begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & -I_{n-p} \end{pmatrix} \varphi(x) \\ &= \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2, \end{aligned}$$

où :  $\forall x \in W, \varphi(x) = P\rho(Q(x))x$ . On a donc l'égalité souhaitée, mais  $\varphi$  n'est pas forcément un  $C^1$ -difféomorphisme : on va donc appliquer le TIL en 0 pour conclure. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= P\rho(Q(h))h \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} P(\rho(Q(0)) + o(1))h \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \varphi(0) + P\rho(Q(0))h + o(\|h\|),\end{aligned}$$

car  $\rho$  et  $Q$  sont de classe  $C^1$ . Insi, on en déduit que  $\varphi$  est différentiable en 0 et  $d\varphi(0) : h \mapsto P\rho(Q(0))h$ , avec  $P\rho(Q(0))$  inversible, donc on en déduit que  $d\varphi(0)$  est inversible et donc d'après le TIL, il existe deux voisinages  $V_0$  et  $W_0$  de 0 tels que  $\varphi : V_0 \rightarrow W_0$  est un  $C^1$ -difféomorphisme. On a donc le résultat voulu.  $\square$

**Questions :**

1. Quelles sont les conditions sur la fonction  $f$  pour que la hessienne soit symétrique ?
2. Applications ?

**Réponses :**

1. Il faut que  $f$  soit de classe  $C^2$ .
2. Voir [Ber].