

École Normale Supérieure de Rennes
Institut de Mathématiques de Toulouse

Maître de stage : Laure COUTIN

Étude de théorèmes limites pour le processus de Hawkes

Sacha QUAYLE

9 juillet 2023

Table des matières

Introduction	2
1 Processus de Hawkes discret	4
1.1 Théorèmes limites	5
1.2 Résultats généraux	5
1.2.1 Espérances	5
1.2.2 Vers les théorèmes limites	9
1.3 Démonstration des théorèmes limites	11
1.3.1 Preuve des théorèmes 1.3 et 1.5	11
1.3.2 Preuve des théorèmes 1.4 et 1.6	13
2 Processus de Hawkes continu	18
2.1 Préliminaires	18
2.1.1 Probabilités continues	18
2.1.2 Processus de Poisson	20
2.2 Définition	22
2.3 Premiers résultats	23
2.4 Théorèmes limites	25
Conclusion	27
A Preuve du théorème 1.1	28
B Méthode de Stein	30
Références	34

Introduction

Les processus de Hawkes sont des processus stochastiques qui ont des applications dans différents domaines comme la sismologie, la finance et les réseaux sociaux.

Pour mieux comprendre la définition du processus de Hawkes, on va d'abord introduire la notion de processus de Poisson. Un processus de Poisson est un processus de comptage classique, qui est souvent le mieux adapté pour expliquer un processus "d'arrivées", tel que le nombre de clients arrivant devant un guichet, ou le nombre d'appels téléphoniques dans un centre. Les arrivées sont supposées réparties de façon aléatoire et indépendante dans le temps, suivant une loi explicitée dans la section 2.1.2.

Les processus de Hawkes sont des processus de Poisson dont les variables "temps d'écart" entre deux arrivées ne sont plus indépendantes. Ce sont des processus auto-excités, ce qui signifie que chaque événement arrivé augmente le taux des arrivées futures pour une certaine période de temps. C'est le cas par exemple pour les répliques des tremblements de terre ; un séisme augmente la tension géographique dans la région, ce qui peut causer d'autres secousses. C'est aussi le cas pour certains événements en finance, tel que la faillite d'une grande banque d'investissement qui peut envoyer des chocs dans les centres du monde financier.

Il existe deux modèles du processus de Hawkes, le modèle discret et le modèle continu.

Le processus de Hawkes *discret* (abrégé DHP pour *Discrete Hawkes Process*) est défini de la manière suivante : on fixe $(\alpha_k)_k$ une suite de nombres strictement positifs vérifiant

$$(A) : \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < 1, \quad (B) : \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n < \infty,$$

puis on définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ définie :

1. soit par des lois de Bernoulli : $X_1 \sim \mathcal{B}(\alpha_0)$ et pour tout $n \geq 2$, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{n-i} X_i$ (noté p_n).
2. soit par des lois de Poisson : $X_1 \sim \mathcal{P}(\alpha_0)$ et pour tout $n \geq 2$, X_n suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{n-i} X_i$ (noté λ_n).

Le DHP est alors défini par la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Des exemples classiques pour la suite α sont $\alpha_n = \gamma e^{-n\theta}$ (appelé noyau exponentiel) et $\alpha_n = \gamma n e^{-n\theta}$ (appelé noyau Erlang), avec les bonnes hypothèses sur γ et θ .

Le processus de Hawkes *continu* (abrégé CHP pour *Continuous Hawkes Process*) est lui défini de la manière suivante : c'est un processus de comptage N tel que, en notant \mathcal{F}_t la tribu engendrée par les événements $N(C)$ pour $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), C \subset]-\infty, t[$, son intensité conditionnelle est donnée par

$$\lambda^*(t) = \alpha_0 + \int_0^t \alpha(t-s) dN(s),$$

où $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ (appelée fonction d'excitation) vérifie $\int_0^\infty \alpha < 1$. Un exemple classique pour α est $\alpha(t) = \gamma e^{-\theta t}$, analogue au noyau exponentiel dans le DHP.

On étudie dans ce rapport les théorèmes limites sur le processus de Hawkes. Les résultats pour le CHP sont tirés de [1] en se plaçant en dimension 1. Pour le DHP, le modèle Bernoulli est étudié dans [2], mais ici on généralise les résultats au modèle Poisson.

Dans la section 1, on se place dans le cas discret. On établit une formule explicite pour les espérances, puis on obtient une loi des grands nombres (LGN) et un théorème central limite (TCL) pour chaque modèle, que l'on illustre avec des simulations numériques. Les théorèmes dans le modèle Bernoulli sont tirés de [2] mais ici on les démontre également pour le modèle Poisson. Dans la section 2, on définit le CHP à l'aide du processus de Poisson. De même, on établit une formule explicite pour les espérances, puis on énonce les théorèmes de convergence démontrés dans [1] que l'on compare aux résultats trouvés dans le cas discret.

1 Processus de Hawkes discret

Pour commencer, on peut effectuer des simulations pour voir à quoi ressemble la trajectoire de $(S_n)_n$. On prend ici $\alpha_n = \gamma e^{-\theta n}$, avec $\gamma = 0.3$ et $\theta = 1.5$. On a simulé les variables (X_1, \dots, X_n) pour $n = 10$ dans les deux modèles discrets, et on obtient la figure 1.

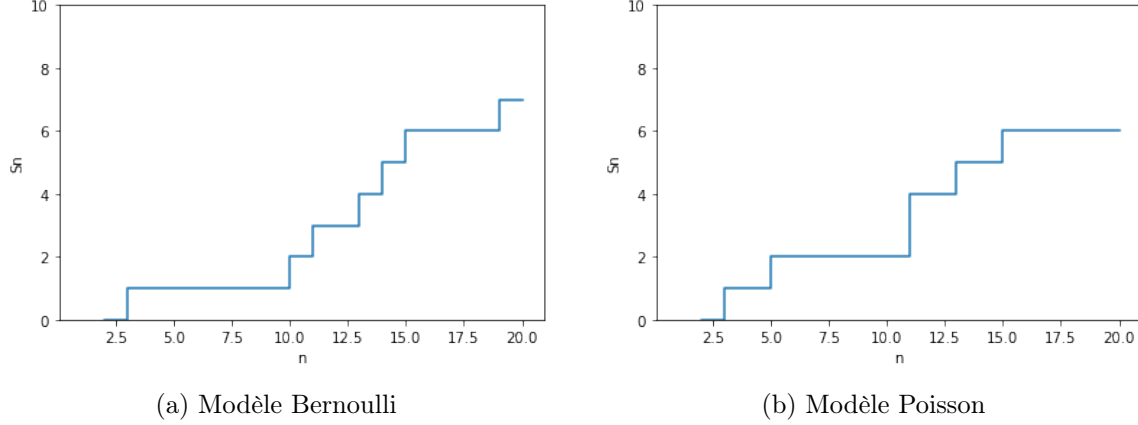


FIGURE 1 – Simulation du processus de Hawkes discret

On peut donc voir l'influence des événements passés : lorsqu'il y a un saut, on observe plus facilement des sauts juste après. Dans le modèle Poisson on voit également que l'on peut avoir des sauts de taille différente.

On donne pour commencer deux théorèmes sur les martingales discrètes de carré intégrable, utiles pour la suite. La preuve du théorème 1.1 est explicitée dans l'annexe A. Le théorème 1.2, que l'on admet, est énoncé sous cette forme dans [3], et la version générale se trouve dans [4]. On se place sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, \mathbb{P})$. On rappelle que si M est une martingale, on note $\langle M \rangle$ le processus prévisible dans la décomposition de Doob de la sous-martingale M^2 .

Théorème 1.1 (loi des grands nombres pour les martingales). *Si M est une martingale de carré intégrable, alors, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle M \rangle_n = \infty$,*

$$\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \xrightarrow{ps} 0.$$

Théorème 1.2 (théorème central limite pour les martingales). *Soit M une martingale de carré intégrable. On suppose que les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $\frac{\langle M \rangle_n}{n} \xrightarrow{ps} \sigma^2 > 0$.
2. Pour tout $\epsilon > 0$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 1_{(M_k - M_{k-1})^2 \geq \epsilon n} | \mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow{ps} 0.$$

Alors $\frac{M_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1.1 Théorèmes limites

On se place dans le modèle discret du processus de Hawkes, défini dans l'introduction. Le but de la fin de cette section est de démontrer les théorèmes suivants :

Théorème 1.3 (loi des grands nombres). *Dans le modèle Bernoulli du DHP,*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu := \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{k \geq 1} \alpha_k}$$

Théorème 1.4 (théorème central limite). *Dans le modèle Bernoulli du DHP,*

$$\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{\mu(1 - \mu)}{(1 - \sum_{k \geq 1} \alpha_k)^2} \right)$$

Théorème 1.5 (loi des grands nombres). *Dans le modèle Poisson du DHP,*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{ps} \mu$$

Théorème 1.6 (théorème central limite). *Dans le modèle Poisson du DHP,*

$$\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{\mu}{(1 - \sum_{k \geq 1} \alpha_k)^2} \right)$$

La différence entre les LGN réside dans le mode de convergence, et celle entre les TCL dans la valeur de la variance. La LGN fait intervenir les espérances des variables S_n . Puisque l'espérance est la même pour une loi de Bernoulli ou une loi de Poisson de même paramètre, cela ne paraît pas choquant d'avoir des résultats similaires. Cependant, les variances ne sont pas les mêmes, donc cela explique les différences dans le TCL.

1.2 Résultats généraux

On se place pour l'instant dans le modèle discret du processus de Hawkes, sans préciser si l'on est dans le modèle Bernoulli ou Poisson. Dans la section 1.2.1, on trouve une formule explicite pour les espérances des variables X_n puis on démontre que les moments sont bornés. Dans la section 1.2.2, on met en place les outils nécessaires pour démontrer les théorèmes limites, en étudiant la martingale associée à S .

1.2.1 Espérances

On cherche pour commencer à calculer les espérances des variables X_n . On n'a pas trouvé de références connues détaillant ce calcul dans le cas discret, mais on obtient ces résultats en s'inspirant des calculs faits dans le cas continu, explicités dans [1].

On considère $\alpha^{(1)}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n^{(1)} = \alpha_n$, puis on pose, par récurrence, pour tout $k \geq 2$,

$$\forall n \geq k, \alpha_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n-j} \alpha_j^{(k-1)}$$

(on a $\alpha_n^{(k)} = 0$ pour tout $n < k$). On pose enfin $\psi_n = \sum_{k=1}^n \alpha_n^{(k)}$. On a alors le théorème suivant, qui donne la valeur des espérances en fonction seulement de la suite α .

Théorème 1.7. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\mathbb{E}[X_n] = \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \psi_{n-j} \right).$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.8. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\mathbb{E}[X_n] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{n-i} \mathbb{E}[X_i]$$

Démonstration du lemme 1.8. Pour tout $n \geq 1$, on note \mathcal{F}_n la tribu engendrée par les variables X_1, \dots, X_n . Pour tout $n \geq 2$, on a alors, par définition de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$,

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}[\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n-j} X_j]$$

car l'espérance d'une loi de Bernoulli ou de Poisson est égale à son paramètre, d'où par linéarité l'égalité souhaitée. \square

Démonstration du théorème 1.7. On montre la propriété par récurrence sur n .

- On a $\mathbb{E}[X_1] = \alpha_0$, donc la propriété est vraie au rang 1.
- On suppose la propriété vraie aux rangs $1, \dots, n-1$ pour $n \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n] &= \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n-j} \left(1 + \sum_{k=1}^{j-1} \psi_k \right) \right) \quad (\text{d'après 1.8 et l'hypothèse de récurrence}) \\ &= \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n-j} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{p=1}^k \alpha_{n-j} \alpha_k^{(p)} \right) \quad (\text{par définition de } \psi_k) \\ &= \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n-j} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{j-1} \sum_{k=p}^{j-1} \alpha_{n-j} \alpha_k^{(p)} \right) \\ &= \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n-j} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{n-j} \alpha_k^{(p)} \right) \quad (\text{car } \alpha_k^{(p)} = 0 \text{ si } k < p) \\ &= \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n-j} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{j-1} \alpha_j^{(p+1)} \right) \quad (\text{par définition de } \alpha_j^{(p+1)}) \\ &= \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n-j} + \sum_{j=1}^{n-1} (\psi_j - \alpha_j) \right) \quad (\text{par définition de } \psi_j) \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang n . \square

Grâce au théorème 1.7, on a immédiatement les corollaires suivants :

Corollaire 1.9. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\mathbb{E}[S_n] = \alpha_0 \left(n + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} \psi_{k-j} \right).$$

Démonstration. Immédiat. □

Corollaire 1.10. *On a*

$$\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu := \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{k \geq 1} \alpha_k}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n] &= \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \psi_{n-j} \right) \\ &= \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_j \leq j} \alpha_{j-k_j} \dots \alpha_{k_2-k_1} \alpha_1 \right) \end{aligned}$$

Or, pour tout $j \geq 1$, $\sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_j \leq j} \alpha_{j-k_j} \dots \alpha_{k_2-k_1} \alpha_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k \geq 1} \alpha_k \right)^j$, donc par passage à la limite :

$$\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k \geq 1} \alpha_k \right)^j \right) = \mu.$$

□

Corollaire 1.11. *Si $\alpha_n = \gamma e^{-n\theta}$, alors pour tout $n \geq 2$,*

$$\mathbb{E}[X_n] = \gamma \frac{1 - e^{-\theta} - \gamma e^{-n\theta} (1 + \gamma)^{n-1}}{1 - e^{-\theta} (1 + \gamma)}.$$

Grâce au lemme 1.8, on peut également en déduire les propositions suivantes concernant les moments, qui seront utiles pour obtenir des résultats de convergence. On ne met pas les valeurs absolues car les variables sont positives.

Proposition 1.12. *On a*

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[X_n] < \infty.$$

Démonstration. D'après le lemme 1.8, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n] &\leq \alpha_0 + \sup_{1 \leq k \leq n-1} \mathbb{E}[X_k] \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n-k} \\ &\leq \alpha_0 + \sup_{k \geq 1} \mathbb{E}[X_k] \sum_{k \geq 1} \alpha_k,\end{aligned}$$

d'où en passant à la borne supérieure :

$$\sup_{k \geq 1} \mathbb{E}[X_k] \left(1 - \sum_{k \geq 1} \alpha_k\right) \leq \alpha_0,$$

avec $\sum_{k \geq 1} \alpha_k < 1$, d'où le résultat souhaité. □

Proposition 1.13. *Pour tout $k \geq 2$,*

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[X_n^k] < \infty.$$

Démonstration. Dans le cas Bernoulli, $X_n^k = X_n$ donc le résultat est immédiat avec le lemme précédent.

Dans le cas Poisson, on montre la propriété par récurrence sur k .

1. On a déjà la propriété au rang 1.
2. On suppose la propriété vraie aux rangs $1, \dots, k-1$ avec $k \geq 2$. On a

$$\mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n^k | \mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}[P_k(p_n)],$$

où $p_n = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{n-i} X_i$ et P_k est un polynôme unitaire de degré k . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc une constante C telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n^k] &\leq C + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbb{E}[X_{n-i}^k] \\ &\leq C + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[X_n^k],\end{aligned}$$

d'où en passant à la borne supérieure :

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[X_n^k] \left(1 - \sum_{n \geq 1} \alpha_n\right) \leq C,$$

avec $\sum_{k \geq 1} \alpha_k < 1$, d'où la propriété au rang k . □

1.2.2 Vers les théorèmes limites

Dans cette section, on souhaite obtenir des résultats préliminaires utiles pour démontrer les théorèmes limites, tout en restant dans un contexte général. On note toujours, pour tout $n \geq 1$, \mathcal{F}_n la tribu engendrée par les variables X_1, \dots, X_n . On souhaite obtenir des résultats sur $(\frac{S_n}{n})_{n \geq 1}$. On sait que la suite S est une sous-martingale, donc elle admet une décomposition de Doob, de martingale associée

$$M_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{i-1}]).$$

On étudie M car il est difficile d'obtenir des résultats directs de convergence sur $(\frac{S_n}{n})_n$, puisque les variables X_n ne sont pas indépendantes. Cependant, il est plus facile d'en obtenir sur M car c'est une martingale et on dispose de théorèmes de convergence sur les martingales (voir le début de la section 1). On cherche donc dans cette section à trouver le lien entre la convergence de M et celle de S .

Le lemme 1.14 et la proposition 1.15 sont démontrés dans [2] dans le modèle Bernoulli, mais on les généralise ici aux deux modèles. Le lemme 1.16 quant à lui n'est pas démontré dans [2].

Lemme 1.14. $(M_n)_n$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.

Démonstration. Pour tout n , M_n est \mathcal{F}_n -mesurable, et $\forall n \geq 2$,

$$\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{i-1}] | \mathcal{F}_{n-1}])$$

Or $\mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{n-1}] = X_i$ si $i \leq n-1$ et $\mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}]$ sinon, et $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{i-1}] | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{i-1}]$ car $\mathcal{F}_{i-1} \subset \mathcal{F}_{n-1}$, d'où

$$\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{i-1}]) = M_{n-1}.$$

On en déduit ainsi que M est une martingale. □

La proposition suivante donne le lien entre les convergences de M et S . Ce calcul est fait dans [2]. On trouve ici une valeur différente pour ε_n , mais cela ne modifie pas le raisonnement ni les résultats finaux.

Proposition 1.15. Pour tout $n \geq 1$,

$$M_n = \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\right) S_n - n\alpha_0 + \varepsilon_n,$$

où $\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Démonstration. On calcule :

$$\begin{aligned}
M_n &= \sum_{i=1}^n \left(X_i - \alpha_0 - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i-j} X_j \right) \\
&= S_n - n\alpha_0 - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n \alpha_{i-j} X_j \\
&= S_n - n\alpha_0 - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} \alpha_i X_j \quad (\text{par réindexation de la 2è somme}) \\
&= S_n - n\alpha_0 - \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \right) \sum_{j=1}^{n-1} X_n + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=n-j+1}^{\infty} \alpha_i X_j \\
&= \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \right) S_n - n\alpha_0 + \varepsilon_n,
\end{aligned}$$

où $\varepsilon_n = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \right) X_n + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=n-j+1}^{\infty} \alpha_i X_j$, avec :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\varepsilon_n] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \right) X_n + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=n-j+1}^{\infty} \alpha_i X_j \right] \\
&\leq \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=n-j+1}^{\infty} \alpha_i \right) \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[X_n] \quad (\text{car } \sum_{i \leq 1} \alpha_i < 1) \\
&= \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \alpha_i \right) \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[X_n] \\
&= \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} i\alpha_i \right) \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[X_n]
\end{aligned}$$

donc, d'après les hypothèses (A) et (B), la proposition 1.12, et l'inégalité de Markov appliqué $\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}} \geq 0$, on obtient $\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. \square

Lemme 1.16. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \text{Var}[X_k | \mathcal{F}_{k-1}].$$

Démonstration. On a

$$\langle M \rangle_{n+1} - \langle M \rangle_n = \mathbb{E}[M_{n+1}^2 - M_n^2 | \mathcal{F}_n],$$

et $M_{n+1} = M_n + X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$, donc

$$M_{n+1}^2 = M_n^2 + (X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n])^2 + 2M_n (X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n])$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle_{n+1} - \langle M \rangle_n &= \mathbb{E} \left[(X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n])^2 \middle| \mathcal{F}_n \right] + 2M_n \mathbb{E}[X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] | \mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]^2 \\
&= \text{Var}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]
\end{aligned}$$

On conclut en faisant la somme télescopique. □

1.3 Démonstration des théorèmes limites

Avec le théorème 1.15, on souhaite maintenant démontrer des résultats de convergence sur S , à l'aide de la martingale M . On démontre dans un premier temps les LGN, puis on parlera des TCL, dont les preuves ont nécessité plus de travail.

1.3.1 Preuve des théorèmes 1.3 et 1.5

On distingue les deux modèles car les preuves sont différentes. Celle pour le modèle Bernoulli repose sur l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Celle pour le modèle Poisson repose sur la LGN pour les martingales.

Modèle Bernoulli.

Démonstration du théorème 1.3. On rappelle que l'on souhaite démontrer

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu := \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{k \geq 1} \alpha_k}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{M_n}{n} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\text{Var}[M_n]}{n^2 \varepsilon^2},$$

avec

$$\begin{aligned}
\text{Var}[M_n] &= \mathbb{E}[M_n^2] = \mathbb{E} \left[\sum_{i,j=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{i-1}])(X_j - \mathbb{E}[X_j | \mathcal{F}_{j-1}]) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [(X_i - \mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{i-1}])^2] + 2 \sum_{i < j=1}^n \mathbb{E} [(X_i - \mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{i-1}])(X_j - \mathbb{E}[X_j | \mathcal{F}_{j-1}])],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{i-1}])(X_j - \mathbb{E}[X_j | \mathcal{F}_{j-1}])] &= \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_j \mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{i-1}]] \\
&\quad - \mathbb{E}[X_i \mathbb{E}[X_j | \mathcal{F}_{j-1}]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{i-1}] \mathbb{E}[X_j | \mathcal{F}_{j-1}]],
\end{aligned}$$

or X_i et $\mathbb{E}[X_i|\mathcal{F}_{i-1}]$ sont \mathcal{F}_{j-1} -mesurables, donc

$$\mathbb{E}[X_i\mathbb{E}[X_j|\mathcal{F}_{j-1}]] = \mathbb{E}[X_iX_j], \quad \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i|\mathcal{F}_{i-1}]\mathbb{E}[X_j|\mathcal{F}_{j-1}]] = \mathbb{E}[X_j\mathbb{E}[X_i|\mathcal{F}_{i-1}]],$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Var}[M_n] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i|\mathcal{F}_{i-1}])^2] \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}[X_i^2] - 2\mathbb{E}[X_i\mathbb{E}[X_i|\mathcal{F}_{i-1}]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i|\mathcal{F}_{i-1}]^2]) \\ &\leq 2n \end{aligned}$$

Et finalement $\frac{M_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, or $\frac{\varepsilon_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, d'où $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$. □

Modèle Poisson. Pour ce modèle, on a d'abord besoin du lemme suivant.

Lemme 1.17. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\langle M \rangle_n = n\alpha_0 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \right) S_n + \varepsilon_n,$$

où ε_n est le même que dans la proposition 1.15.

Démonstration du lemme 1.17. On utilise le théorème 1.16 et le fait que la variance d'une loi de Poisson de paramètre p est p . □

Démonstration du théorème 1.5. On rappelle que l'on veut démontrer

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{ps} \mu.$$

D'après le théorème 1.1, puisque $\langle M \rangle_n \xrightarrow{ps} +\infty$, on a

$$\frac{S_n - \langle M \rangle_n}{\langle M \rangle_n} = \frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \xrightarrow{ps} 0,$$

donc

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \langle M \rangle_n,$$

on en déduit alors le résultat souhaité d'après le lemme 1.17. □

1.3.2 Preuve des théorèmes 1.4 et 1.6

On a vu que la LGN était relativement facile à démontrer. En revanche, le TCL a été plus dur à établir : dans le modèle Bernoulli, on n'a pas réussi à démontrer le résultat trouvé par Séol ni à en démontrer un autre. Dans le modèle Poisson, on avait une intuition de la valeur dans la variance dans la loi limite, reposant sur le modèle Bernoulli et le résultat dans le cas continu. La difficulté était donc de trouver une formulation du TCL pour les martingales qui pouvait s'appliquer ici.

Modèle Bernoulli.

Dans [2], Seol énonce le théorème 1.4 :

$$\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\mu(1 - \mu)}{(1 - \sum_{k \geq 1} \alpha_k)^2}\right).$$

Dans la preuve, il utilise le TCL pour les martingales et énonce que

$$\frac{\langle M \rangle_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{ps} \mu(1 - \mu).$$

Cependant, on n'a pas réussi à démontrer ce résultat. On a même trouvé une valeur différente dans un cas particulier. Dans un premier temps, on démontre donc que la valeur de la variance est différente dans le cas du noyau exponentiel. Dans un second temps, on fait des simulations numériques pour illustrer les résultats trouvés, et tenter de rejeter la valeur trouvée par Séol.

Montrons d'abord que le résultat $\frac{\langle M \rangle_n}{n} \xrightarrow{ps} \mu(1 - \mu)$ est faux dans le cas $\alpha_n = \gamma e^{-n\theta}$. On rappelle que dans le modèle Bernoulli, on note $p_n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n-k} X_k$. On a

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n p_n(1 - p_n),$$

d'après le théorème 1.16 et puisque la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p est $p(1 - p)$. Par définition de p_n , et puisque les variables X_n sont bornées par 1, on peut facilement voir que la suite $\mathbb{E}[p_n]$ converge. En outre, en notant $q_n = p_n - \alpha_0$, on a

$$(a) : q_n = e^{-\theta}(q_{n-1} + \gamma X_{n-1}),$$

puis

$$(b) : \mathbb{E}[q_n^2] = e^{-2\theta}(1 + 2\gamma)\mathbb{E}[q_{n-1}^2] + e^{-2\theta}(2\gamma\alpha_0 + \alpha^2)\mathbb{E}[q_{n-1}] + \gamma^2\alpha_0 e^{-2\theta}.$$

on obtient alors une formule de récurrence sous la forme $u_n = au_{n-1} + v_n$, où $u_n = \mathbb{E}[q_n^2]$, la série de terme général a^n converge, et la suite v converge. Ainsi on en déduit que la suite u converge. Donc la suite $\mathbb{E}[p_n^2]$ converge.

On note ainsi $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[p_n(1 - p_n)]$. Alors

$$\mathbb{E} \left[\frac{\langle M \rangle_n}{n} \right] \rightarrow \sigma^2,$$

donc $\frac{\langle M \rangle_n}{n}$ est uniformément intégrable, et

$$\frac{\langle M \rangle_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2.$$

Pour conclure, il suffit ainsi de montrer $\sigma^2 \neq \mu(1 - \mu)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans les relations (a) et (b), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[q_n] = \frac{\gamma \alpha_0 e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}(1 + \gamma)} = \mu - \alpha_0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[q_n^2] = \frac{\gamma e^{-2\theta} (2\alpha_0 + \alpha) (\mu - \alpha_0) + \gamma^2 \alpha_0 e^{-2\theta}}{1 - e^{-2\theta} (1 + 2\gamma)} =: \beta.$$

On trouve ainsi, puisque $p_n^2 = q_n^2 + 2\alpha_0 q_n + \alpha_0^2$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[p_n] = \mu, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[p_n^2] = \beta + 2\gamma(\mu - \alpha_0) + \alpha_0^2.$$

Mais avec des simulations numériques, on peut facilement voir que $\beta + 2\gamma(\mu - \alpha_0) + \alpha_0^2 \neq \mu^2$, donc $\sigma^2 \neq \mu(1 - \mu)$ et le résultat est faux.

On peut donc déterminer la valeur de la variance dans le cas du noyau exponentiel grâce au TCL pour les martingales : il s'agit de σ^2 . Dans le cas général cependant, on n'a pas réussi à la déterminer.

On veut maintenant faire des simulations pour étudier la convergence de $\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}}$. Pour simuler S_n , on simule les variables (X_n) de façon récursive, par définition du processus de Hawkes. Puisqu'on veut simuler des résultats de convergence, on veut trouver n assez grand pour simuler la limite de $\frac{S_n}{n}$. On simule donc les variables $(X_n)_{n \geq 1}$ et on regarde la trajectoire de $\frac{S_n}{n}$, on obtient alors la figure 2. En prenant $n = 2000$, on peut donc supposer que l'on est dans le régime stationnaire.

On note toujours σ^2 la valeur de la limite de la suite $\mathbb{E} \left[\frac{\langle M \rangle_n}{n} \right]$ trouvée précédemment. On prend donc $n = 2000$, et on fait un histogramme normalisé de $\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}}$ en regardant 1000 observations. On superpose l'histogramme avec les densités des lois $\mathcal{N} \left(0, \frac{\mu(1-\mu)}{(1-\sum_{k \geq 1} \alpha_k)^2} \right)$, en bleu, et $\mathcal{N} \left(0, \frac{\sigma^2}{(1-\sum_{k \geq 1} \alpha_k)^2} \right)$, en rouge. On obtient alors la figure 3. Le test Kolmogorov-Smirnov donne une p -valeur supérieure à 0.05 pour les deux cas. On ne peut donc pas rejeter le théorème 1.4.

La manière de simuler le processus de Hawkes dans ce cas est la plus naturelle. On pourrait cependant chercher d'autres façons de la simuler afin de rejeter la valeur de la variance trouvée par Séol.

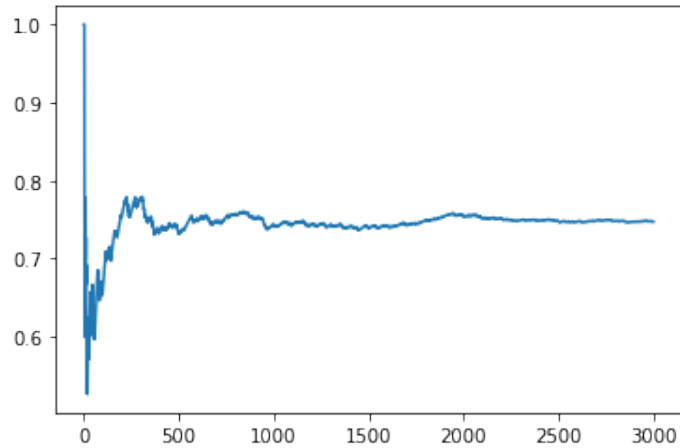


FIGURE 2 – $\frac{S_n}{n}$ en fonction de n

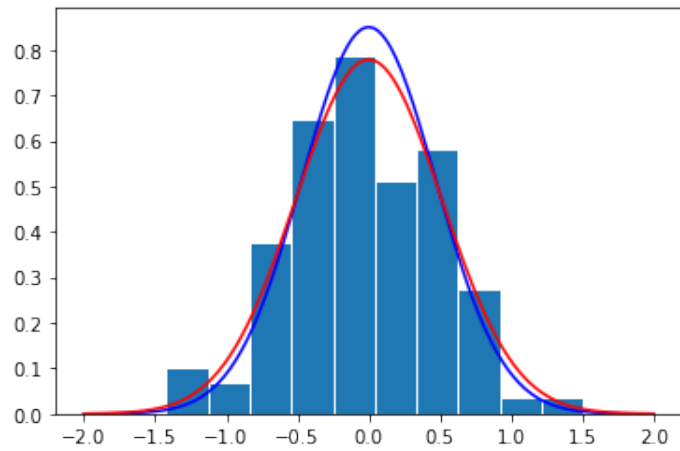


FIGURE 3 – Histogramme normalisé de $\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}}$ superposé à la densité de la loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{\mu(1-\mu)}{(1-\sum_{k \geq 1} \alpha_k)^2}\right)$, en bleu, et $\mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{(1-\sum_{k \geq 1} \alpha_k)^2}\right)$, en rouge

Modèle Poisson.

Pour le modèle Poisson, on démontre le TCL en utilisant le TCL pour les martingales. Dans ce modèle, la limite de $\frac{\langle M \rangle_n}{n}$ est beaucoup plus facile à calculer.

Remarque 1.18. On avait d'abord essayé de démontrer le TCL en utilisant la méthode de Stein, expliquée dans l'annexe B. On sait que $\mathbb{E}[X_j] \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \mu$. Le principe était donc d'étudier $R_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, où les $(Y_k)_k$ sont indépendantes et

$$Y_k \sim \mathcal{P}\left(\alpha_0 + \mu \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{k-j}\right).$$

Il s'agit donc de remplacer X_j par μ dans l'expression du paramètre λ_k . La méthode de Stein, en particulier la proposition B.10, permet de montrer

$$\frac{R_n - \mu n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mu).$$

Ainsi, si on trouve un théorème de convergence faisant intervenir $S_n - R_n$, on peut conclure. Mais nous n'avons pas réussi à trouver un tel résultat. L'étude de la méthode de Stein était cependant intéressante, c'est pourquoi on l'évoque quand même dans ce rapport.

Démonstration du théorème 1.6. On rappelle que l'on veut démontrer

$$\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\mu}{(1 - \sum_{k \geq 1} \alpha_k)^2}\right).$$

On veut appliquer le TCL pour les martingales, i.e. le théorème 1.2. D'après les lemmes 1.17 et 1.5, on a $\frac{\langle M \rangle_n}{n} \xrightarrow{ps} \alpha_0 + \mu \sum_{k \geq 1} \alpha_k = \mu$. Il suffit alors de vérifier la deuxième condition du TCL : soit $\epsilon > 0$. On note

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 \mathbf{1}_{(M_k - M_{k-1})^2 \geq \epsilon n} | \mathcal{F}_{k-1}].$$

On va montrer que $Z_n \xrightarrow{ps} 0$ à l'aide du lemme de Borel-Cantelli. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Z_n|] &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 \mathbf{1}_{(M_k - M_{k-1})^2 \geq \epsilon n}] \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|(M_k - M_{k-1})^2 \mathbf{1}_{(M_k - M_{k-1})^2 \geq \epsilon n}|] \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^4]} \sqrt{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{(M_k - M_{k-1})^2 \geq \epsilon n}]}, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Or :

$$M_k - M_{k-1} = X_k - \alpha_0 - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{k-j} X_j,$$

avec $\sum_{k \geq 1} \alpha_k < 1$ et, pour tout $p \geq 1$, $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$ (d'après la proposition 1.13), donc il existe une constante C_1 telle que

$$\mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^4] \leq C_1 \sup_{1 \leq p \leq 4} \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n|^p] =: K_1.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[1_{(M_k - M_{k-1})^2 \geq \epsilon n}] &= \mathbb{P}((M_k - M_{k-1})^2 \geq \epsilon n) \\
&= \mathbb{P}((M_k - M_{k-1})^8 \geq (\epsilon n)^4) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^8]}{(\epsilon n)^4}
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Markov, avec de même il existe une constante K_2 telle que

$$\mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^8] \leq K_2,$$

d'où finalement :

$$\mathbb{E}[|Z_n|] \leq \frac{K}{n^2},$$

où $K > 0$. Ainsi on en déduit : pour tout $\delta > 0$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|Z_n| \geq \delta)$$

est convergente, donc d'après le lemme de Borel-Cantelli, $Z_n \xrightarrow{ps} 0$. Ainsi, d'après le TCL pour les martingales,

$$\frac{M_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mu),$$

et donc, d'après la proposition 1.15, on en déduit

$$\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\mu}{(1 - \sum_{k \geq 1} \alpha_k)^2}\right).$$

□

On a également effectué des simulations numériques pour illustrer ce théorème. On se place toujours dans le cas $\alpha_n = \gamma e^{-n\theta}$ avec $\theta = 0.9$, $\gamma = 0.5$ et $n = 2000$. On trace l'histogramme pour 1000 valeurs de $\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}}$ et on superpose la densité de la loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{\mu}{(1 - \sum_{k \geq 1} \alpha_k)^2}\right)$ pour obtenir la figure 4, et de même le test de Kolmogorov-Smirnov donne une p -valeur supérieure à 0.05.

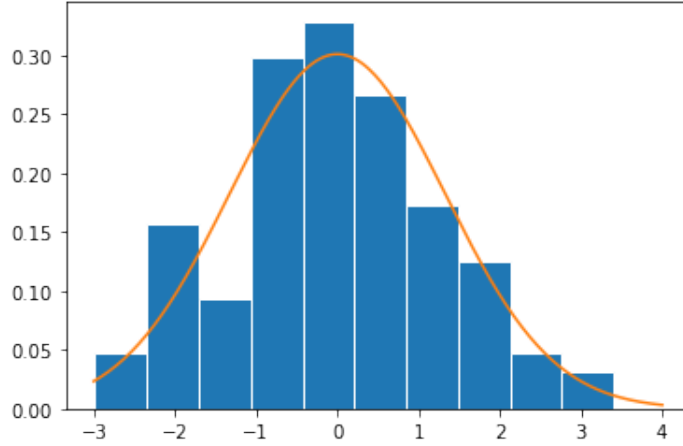


FIGURE 4 – Histogramme normalisé de $\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}}$ superposé à la densité de la loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{\mu}{(1 - \sum_{k \geq 1} \alpha_k)^2}\right)$

2 Processus de Hawkes continu

La majorité du travail fait pendant le stage portait sur le processus de Hawkes discret, notamment en essayant de corriger le TCL énoncé par Séol et en cherchant un TCL pour les martingales. Pour le processus de Hawkes continu, on a seulement eu le temps de donner la définition, qui nécessite des notions préliminaires. On a aussi pu regarder les théorèmes limites, et les comparer aux théorèmes dans le cas discret, mais sans les démontrer, par faute de temps.

2.1 Préliminaires

On commence par donner quelques définitions sur les processus (variables aléatoires indexées non plus par \mathbb{N} mais par le temps) à valeurs réelles, tels que le mouvement brownien et le processus de Poisson, indispensables pour définir le CHP et énoncer les résultats de convergence.

2.1.1 Probabilités continues

Définition 2.1 (processus). Un processus (stochastique) est une famille $(X_t)_{t \geq 0}$ de variables (réelles).

Définition 2.2 (mesure intensité). Si $(X_t)_t$ est un processus à valeurs dans \mathbb{R}^d , on définit sa mesure intensité μ par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu(B) = \mathbb{E}[|X \cap B|].$$

Définition 2.3 (processus gaussien). Un processus stochastique $(X_t)_t$ est dit gaussien si : pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, pour tout (t_1, \dots, t_d) , le vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_d})$ est gaussien.

Un processus gaussien est caractérisé en loi par ses fonctions espérance et covariance :

$$m(t) = \mathbb{E}[X_t], \quad \Gamma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t).$$

Définition 2.4 (mouvement brownien). Un processus stochastique $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien si c'est un processus gaussien centré, à trajectoires continues, et tel que sa fonction de covariance est donnée par

$$\Gamma(s, t) = \text{Cov}(B_s, B_t) = \min(s, t) \quad (2.1)$$

Le mouvement brownien est associé à l'analyse de mouvements qui évoluent au cours du temps de manière si désordonnée qu'il semble difficile de prévoir leur évolution.

Définition 2.5 (processus ponctuel). Un processus ponctuel est une suite strictement croissante de variables aléatoires positives $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec la convention $T_0 = 0$. À cette suite, on associe la suite

$$\xi_n = T_{n+1} - T_n.$$

Définition 2.6 (processus de comptage). Un processus aléatoire $(N(t))_{t \geq 0}$ est un processus de comptage si :

1. $N(0) = 0$.
2. N est croissante, continue à droite et fixe entre deux sauts.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $N_t - N_{t-} \in \{0, 1\}$.

Remarque 2.7. À tout processus ponctuel on peut associer un processus de comptage, et vice versa : si $(T_n)_{n \geq 0}$ est un processus ponctuel, alors on pose

$$N(t) = \sum_{k \geq 1} 1_{T_k \leq t},$$

et si N est un processus de comptage, on note $(T_n)_{n \geq 0}$ la suite des sauts de N .

On interprète T comme la suite des temps d'arrivées, ξ comme l'écart de temps entre deux arrivées successives et $N(t)$ comme le nombre de points d'arrivées entre les instants 0 et t . On représente ces trois suites de la manière suivante :

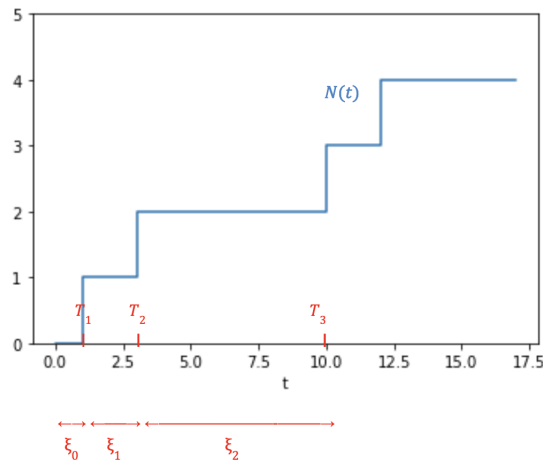


FIGURE 5

On définit pour finir la notion de martingale continue, analogue au cas discret. On peut alors imaginer les définitions et résultats analogues : temps d'arrêt, martingale arrêtée, sur ou sous-martingale...

Définition 2.8 (filtration). Une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de sous-tribus telle que pour tout $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Définition 2.9 (martingale continue). Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ adapté et tel que pour tout $t \geq 0$, $X_t \in L^1$ est une martingale si pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$.

2.1.2 Processus de Poisson

On conserve les notations de la section précédente : si N est un processus de comptage, on note $(T_n)_n$ la suite de ses sauts et $\xi_n = T_{n+1} - T_n$. Le processus ponctuel de Poisson est le plus simple et le plus universel des processus ponctuels, permettant de représenter des phénomènes comme le nombre d'appels dans un central téléphonique, ou bien les arrivées de clients devant un guichet. Le caractère "simple" de ce processus tient essentiellement au fait qu'il est à accroissements indépendants et stationnaires.

Définition 2.10 (processus de Poisson homogène). Un processus ponctuel N est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ si les variables aléatoires ξ_n sont i.i.d. de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Dans [5], il est démontré, ce qu'on ne fera pas ici, que cette définition possède trois autres définitions équivalentes :

Proposition 2.11. *Soit N un processus ponctuel. N est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ si et seulement si l'une des trois conditions suivantes équivalentes est vérifiée :*

1. *Pour tout $t \geq 0$, $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, et, conditionnellement à $\{N(t) = n\}$, la famille (T_1, \dots, T_n) est uniformément distribuée sur $[0, t]$.*
2. *Pour tout $0 = t_0 < \dots < t_n$, les variables $(N(t_{i+1}) - N(t_i))$ sont indépendantes, et pour tout (t, s) , $N(t+s) - N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda s)$.*
3. *Pour toute fonction test f ,*

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{n \geq 1} f(T_n) \right) \right] = \exp \left(- \int_0^\infty (1 - e^{-f(s)}) \lambda ds \right).$$

On peut effectuer des simulations du processus de Poisson : pour cela, on fixe les paramètres λ et n (ici on a pris $\lambda = 3$ et $n = 20$) et on simule les n variables ξ_k de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On définit alors $T_{k+1} = T_k + \xi_k$ puis on définit le processus de Poisson N par la fonction étagée sur $[0, T]$ (où $T = \max T_k$) qui s'incrémente de 1 à chaque T_k . On obtient alors la figure 6. On peut ainsi voir la différence avec le processus de Hawkes discret : les variables donnant l'écart de temps entre deux arrivées successives sont i.i.d. ici, donc un saut n'augmente pas la probabilité d'observer des sauts juste après, contrairement au processus de Hawkes.

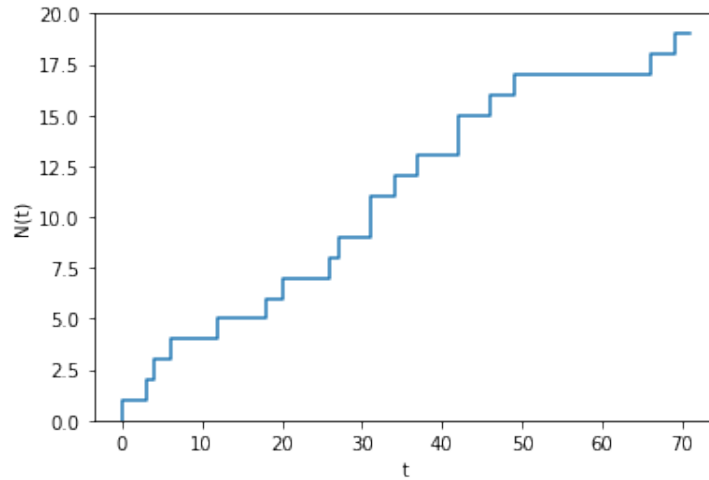


FIGURE 6 – Simulation du processus de Poisson d'intensité $\lambda = 3$ pour $n = 20$ variables

On peut généraliser la définition du processus de Poisson au cas non stationnaire, en prenant une intensité dépendante du temps.

Définition 2.12 (processus de Poisson non homogène). Soit $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. On pose $a(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$. Si N est un processus de Poisson d'intensité 1, alors on dit que le processus \tilde{N} défini par $\tilde{N}(t) = N(a(t))$ est un processus de Poisson non homogène d'intensité λ et de fonction moyenne a .

Remarque 2.13. Si N est un processus de Poisson (homogène ou non) d'intensité λ , sa mesure intensité est donnée par

$$\mu(B) = \int_B \lambda.$$

On fera donc parfois l'abus de parler de façon équivalente de l'intensité ou de la mesure intensité d'un processus de Poisson.

Remarque 2.14. On peut passer de même d'un processus de Poisson non homogène \tilde{N} à un processus de Poisson d'intensité 1 : on pose

$$N(t) = \tilde{N}(\tau(t)),$$

où $\tau(t) = \inf \{s \geq 0, a(s) \geq t\}$.

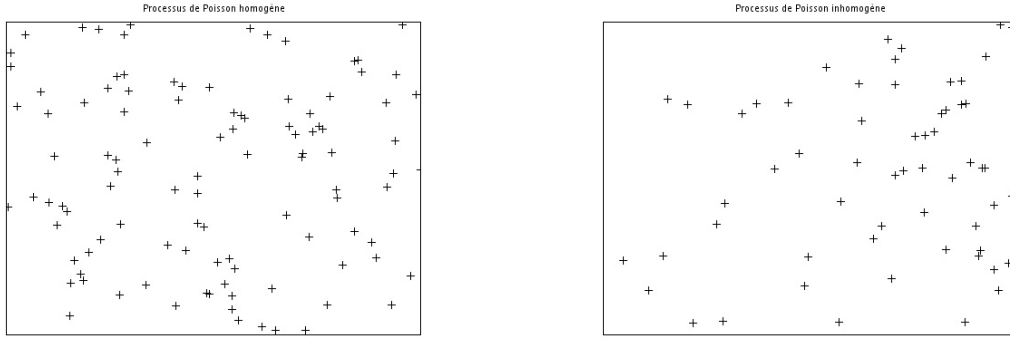
Corollaire 2.15. Si $(N(t))_{t>0}$ est un processus de Poisson non homogène de fonction d'intensité λ et de fonction moyenne a , alors $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre $a(t)$.

On peut également définir la notion de mesure de Poisson, qui généralise celle de processus de Poisson à plusieurs dimensions.

Définition 2.16 (mesure de Poisson). Une mesure de Poisson sur $((\mathbb{R}_+)^d, \mathcal{B}((\mathbb{R}_+)^d))$ d'intensité μ est une variable aléatoire M à valeurs dans l'ensemble des motifs de points de $(\mathbb{R}_+)^d$ (c'est-à-dire l'ensemble des sous-ensembles localement finis de $(\mathbb{R}_+)^d$) telle que :

1. Pour tout $A \in \mathcal{B}((\mathbb{R}_+)^d)$, $M(A) \sim \mathcal{P}(\mu(A))$.
2. Pour tout $A, B \in \mathcal{B}((\mathbb{R}_+)^d)$ disjoints, les variables $M(A)$ et $M(B)$ sont indépendantes.

Exemple 2.17. On se place sur $[0, 1]^2$. On simule sur la figure 7 deux mesures de Poisson, pour $\mu(dx, dy) = 100dxdy$ et $\mu(dx, dy) = 100xdxdy$.



(a) $\mu(dx, dy) = 100dxdy$

(b) $\mu(dx, dy) = 100xdxdy$

FIGURE 7 – Simulation de la mesure de Poisson pour deux intensités mesures sur $[0, 1]^2$

2.2 Définition

On peut à présent définir le CHP.

Définition 2.18 (Processus de Hawkes continu). Soit $(N(t))_{t \geq 0}$ un processus de comptage. On note \mathcal{F}_t la tribu engendrée par les événements $N(C)$ pour $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $C \subset]-\infty, t[$. On dit que N est un processus de Hawkes continu si son intensité conditionnelle est donnée par

$$\lambda^*(t) = \alpha_0 + \int_0^t \alpha(t-s) dN(s),$$

où $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ (appelée fonction d'excitation) vérifie $\int_0^\infty \alpha < 1$.

- Remarque 2.19.**
1. On peut donc voir un processus de Hawkes comme un processus de Poisson non homogène, mais avec une intensité conditionnelle dépendante des événements passés.
 2. Si on choisit α décroissante alors l'influence des événements récents est plus importante que celle des anciens événements. On choisit souvent $\alpha(t) = \alpha_0 \exp(-\beta t)$ (l'analogue au noyau exponentiel dans le cas discret).

3. On peut interpréter l'intensité conditionnelle λ^* des manières suivantes :

- $\lambda^*(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[N(t+h) - N(t) | \mathcal{F}_t]}{h}$.
- $\mathbb{P}(N(t) \text{ a un saut dans }]t, t + dt]) = \lambda^*(t)dt$.
- $\mathbb{E}[N(t+h) | \mathcal{F}_t] = \int_0^{t+h} \lambda^*(s)ds$.

Il faut d'abord vérifier qu'un tel processus existe bien. Ceci est démontré dans [5] et [6] selon le théorème suivant, que l'on admet ici :

Théorème 2.20. *Soit M une mesure de Poisson sur $]0, +\infty[^2$ relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$. On considère la suite d'intensités et de processus définis par $N^0 = 0$, $\lambda^0 = 0$, et*

$$\begin{cases} \lambda^{n+1}(t) = \alpha_0 + \int_0^t \alpha(t-u) dN^n(u), \\ N^{n+1}(t) = \int_0^t \int_0^\infty \mathbf{1}_{z \leq \lambda^{n+1}(s)} dM(s, z) \end{cases}$$

Alors les suites $(\lambda^n)_n$ et $(N^n)_n$ convergent, et en notant λ, N leurs limites respectives, N est un processus de Hawkes d'intensité λ .

2.3 Premiers résultats

On cherche ici, comme dans le cas discret, à calculer les espérances des processus $N(t)$ (ce qui correspond, dans le cas continu, à l'analogie des variables S_n). On s'inspire des preuves faites dans [1], ici dans le cas unidimensionnel, qui sont analogues aux preuves faites dans le cas discret.

De la même façon, on considère $\alpha_1 = \alpha$, puis on pose, par récurrence, pour tout $n \geq 2$,

$$\alpha_n(t) = \int_0^t \alpha(t-s) \alpha_{n-1}(s) ds,$$

puis $\psi(t) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n(t)$ (on a supposé $\int_0^\infty \alpha < \infty$, donc la somme est bien convergente). On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.21. *Pour tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \alpha_0 \left(t + \int_0^t \psi(t-s) s ds \right).$$

Pour démontrer ce théorème, on utilise les deux lemmes suivants :

Lemme 2.22. *Pour tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \alpha_0 t + \int_0^t \alpha(t-s) \mathbb{E}[N(s)] ds.$$

Démonstration. D'après la remarque 2.19, on a, pour tout $s \geq 0$ et $h > 0$,

$$\mathbb{E}[N(s+h)|\mathcal{F}_s] = (s+h)\alpha_0 + \int_0^{s+h} \int_0^m \alpha(m-u) dN(u) dm,$$

donc, pour tout $t \geq s$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(t)|\mathcal{F}_s] &= \alpha_0 t + \int_0^t \int_0^m \alpha(m-u) dN(u) dm \\ &= \alpha_0 t + \int_0^t \int_0^{t-u} \alpha(m) dm dN(u) \quad (\text{Fubini}) \\ &= \alpha_0 t + \left[N(u) \int_0^{t-u} \alpha(m) dm \right]_0^t + \int_0^t \alpha(t-u) N(u) du, \end{aligned}$$

en faisant une intégration par parties, avec $\left[N(u) \int_0^{t-u} \alpha(m) dm \right]_0^t = 0$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(t)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(t)|\mathcal{F}_s]] \\ &= \alpha_0 t + \mathbb{E} \left[\int_0^t \alpha(t-u) N(u) du \right] \\ &= \alpha_0 t + \int_0^t \alpha(t-u) \mathbb{E}[N(u)] du \quad (\text{Fubini}). \end{aligned}$$

□

Lemme 2.23. Soit $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe une unique fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$\forall t \geq 0, f(t) = h(t) + \int_0^t \alpha(t-s) f(s) ds,$$

donnée par

$$f_h(t) = h(t) + \int_0^t \psi(t-s) h(s) ds.$$

Démonstration. Montrons qu'une telle solution est unique : si f_1, f_2 sont deux telles solutions, alors, pour tout $t \geq 0$,

$$f_1(t) - f_2(t) = \int_0^t \alpha(t-s) (f_2(s) - f_1(s)) ds.$$

On pose $g = f_1 - f_2$. Alors :

$$\|g\|_1 \leq \|\alpha\|_1 \|g\|_1,$$

avec $\|\alpha\|_1 < 1$ par hypothèse, donc $g = 0$.

Il suffit alors de montrer que f_h est solution. On calcule :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \alpha(t-s) f_h(s) ds &= \int_0^t \alpha(t-s) h(s) ds + \int_0^t \alpha(t-s) \int_0^s \psi(s-u) h(u) du ds \\
&= \int_0^t \alpha(t-s) h(s) ds + \int_0^t \int_u^t \alpha(t-s) \psi(s-u) h(u) ds du \\
&= \int_0^t \psi(t-s) h(s) ds \\
&= f_h(t) - h(t)
\end{aligned}$$

car $\int_0^t \alpha(t-s) \psi(s) ds = \psi(t) - \alpha(t)$. Donc f_h est l'unique solution. □

Démonstration du théorème 2.21. On utilise les deux lemmes précédents, en prenant $f(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ et $h(t) = \alpha_0 t$. □

2.4 Théorèmes limites

Dans [1], les deux théorèmes suivants (que l'on admet simplement ici) sont énoncés et démontrés :

Théorème 2.24 (loi des grands nombres).

$$\sup_{v \in [0,1]} \left| \frac{N(Tv)}{T} - \frac{v\alpha_0}{1 - \int_0^\infty \alpha} \right| \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{ps} 0$$

Théorème 2.25 (théorème central limite). *Pour tout $v \in [0, 1]$,*

$$\sqrt{T} \left(\frac{N(Tv)}{T} - \frac{v\alpha_0}{1 - \int_0^\infty \alpha} \right) \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{\alpha_0}{(1 - \int_0^\infty \alpha)^3}} W_v,$$

où $(W_v)_{v \in [0,1]}$ est un mouvement brownien standard.

On voit donc apparaître la valeur analogue à μ dans le cas discret : ici,

$$\mu = \frac{\alpha_0}{1 - \int_0^\infty \alpha}.$$

Pour obtenir les théorèmes analogues au cas discret, il faut prendre $v = 1$ dans les deux théorèmes précédents. Dans la LGN, on obtient alors

$$\left| \frac{N(T)}{T} - \mu \right| \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{ps} 0,$$

ce qui est bien analogue au cas discret.

Pour le TCL, on obtient

$$\sqrt{T} \left(\frac{N(T)}{T} - \mu \right) \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{\alpha_0}{(1 - \int_0^\infty \alpha)^3}} W_1.$$

Par définition du mouvement brownien, W_1 suit une loi normale standard. On obtient alors comme loi limite

$$\sqrt{\frac{\alpha_0}{(1 - \sum_{k \geq 1} \alpha_k)^3}} \mathcal{N}(0, 1) = \mathcal{N} \left(0, \frac{\mu}{(1 - \sum_{k \geq 1} \alpha_k)^2} \right).$$

On retrouve ainsi la même variance que dans le théorème 1.6. Les théorèmes énoncés dans [1] sont donc analogues à ceux obtenus dans le cas discret, pour le modèle Poisson. Nous n'avons cependant pas eu le temps d'étudier les preuves dans le cas continu.

Conclusion

Dans ce rapport de stage, on a étudié dans la section 1 le modèle discret du processus de Hawkes, et dans la section 2 le modèle continu. Dans les deux cas, on dispose d'une formule explicite pour les espérances ainsi que d'une LGN et d'un TCL.

On a généralisé le modèle Bernoulli étudié dans [2] au modèle Poisson. Cette généralisation présente deux intérêts : tout d'abord, le modèle est plus réaliste, car dans ce dernier l'écart entre deux observations à deux instants consécutifs peut prendre toutes les valeurs dans \mathbb{N} , contrairement à $\{0, 1\}$.

Ensuite, il y a un lien entre le modèle discret Poisson et le modèle continu. D'abord, il y a une analogie entre les théorèmes limites, comme vu dans la section 2.4. Il y a également un résultat dans [7], qui n'a pas été abordé ici, mais dont l'étude pourrait être intéressante. On peut modifier le modèle discret Poisson pour avoir un pas de temps $h \in]0, 1[$, au lieu de 1. L'article démontre alors, que lorsque h tend vers 0, le modèle discret converge vers le modèle continu.

Il serait donc intéressant, d'une part d'étudier les démonstrations des théorèmes limites dans le cas continu, puis d'étudier ce lien entre les modèles discret et continu.

Annexe A Preuve du théorème 1.1

On se place dans toute cette section sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, \mathbb{P})$.

Théorème A.1 (décomposition de Doob). *Si X est une sous-martingale, alors il existe un unique couple (M, A) , où M est une martingale et A est un processus croissant prévisible, tel que $A_0 = 0$ et $X = M + A$.*

Définition A.2 (compensateur). Si M est une martingale de carré intégrable, alors M^2 est une sous-martingale, et on note $\langle M \rangle$, appelé compensateur de M , le processus A dans la décomposition de Doob de M^2 .

Proposition A.3 (propriétés). *Si M est une martingale de carré intégrable, alors :*

1. On a :

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[M_k^2 - M_{k-1}^2 | \mathcal{F}_{k-1}]$$

2. Si $\langle M \rangle$ converge p.s, alors M converge p.s.

Définition A.4. Soient X un processus adapté et V un processus prévisible tels que, pour tout $n \geq 1$, $V_n(X_n - X_{n-1})$ est intégrable. Alors on pose $V.X$ le processus défini par

$$(V.X)_n = V_0 X_0 + \sum_{k=1}^n V_k (X_k - X_{k-1}).$$

Proposition A.5. *Si X est une martingale, alors $V.X$ est une martingale.*

Lemme A.6 (Kronecker). *Soient u une suite croissante tendant vers $+\infty$, et δ une suite de réels. Si la série $\sum \frac{\delta_n}{u_n}$ converge, alors*

$$\frac{1}{u_n} \sum_{k=0}^n \delta_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Théorème A.7 (loi des grands nombres pour les martingales). *Si M_n est une martingale de carré intégrable, alors, sur $\left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle M \rangle_n = \infty \right\}$,*

$$\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \xrightarrow{ps} 0.$$

Démonstration. On se place sur $\left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle M \rangle_n = \infty \right\}$ et on considère le processus prévisible A défini par $A_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$A_n = \frac{1}{1 + \langle M \rangle_n},$$

puis on pose $N = A.M$:

$$N_n = \sum_{k=1}^n \frac{M_k - M_{k-1}}{1 + \langle M \rangle_k}$$

D'après la proposition A.5, N est une martingale, on peut donc calculer son compensateur :

$$\begin{aligned}
\langle N \rangle_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[(N_k - N_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^2 \mathbb{E} [(M_k - M_{k-1})^2] \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^2 (\langle M \rangle_k - \langle M \rangle_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{\langle M \rangle_{k-1}}^{\langle M \rangle_k} \frac{1}{(1 + \langle M \rangle_k)^2} dt \\
&\leq \sum_{k=1}^n \int_{\langle M \rangle_{k-1}}^{\langle M \rangle_k} \frac{1}{(1 + t)^2} dt < \infty,
\end{aligned}$$

et $\langle N \rangle$ est croissant, donc la suite $\langle N \rangle$ converge presque sûrement, donc d'après la proposition A.3, la suite N converge presque sûrement, i.e la série

$$\sum \frac{M_k - M_{k-1}}{1 + \langle M \rangle_k}$$

converge. D'après le lemme de Kronecker, puisque $1 + \langle M \rangle_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$, on en déduit que

$$\frac{M_n}{1 + \langle M \rangle_n} \xrightarrow{ps} 0,$$

ce qui est équivalent, sur $\left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle M \rangle_n = \infty \right\}$, à

$$\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \xrightarrow{ps} 0.$$

□

Annexe B Méthode de Stein

Tous les résultats énoncés ici, jusqu'à la proposition B.7, sont tirés de [8].

B.1 Distances entre mesures de probabilité

Définition B.1 (classe séparante de fonctions). On dit qu'une classe H de fonctions est séparante si, pour tout couple de variables aléatoires (F, G) vérifiant : $\forall h \in H, h(F), h(G) \in L^1(\Omega)$ et $\mathbb{E}[h(F)] = \mathbb{E}[h(G)]$, on a $F \sim G$.

Définition B.2 (distance sur une classe séparante). Si H est une classe séparante de fonctions, on définit la distance associée : pour tout (F, G) ,

$$d_H(F, G) = \sup_{h \in H} |\mathbb{E}[h(F) - h(G)]|.$$

Définition B.3 (distance de Wasserstein). La distance de Wasserstein, notée d_W , est obtenue avec B.2 en prenant

$$H = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \|h\|_{Lip} \leq 1\}.$$

B.2 Lemme et équation de Stein

On note γ la distribution pour la loi normale standard.

Lemme B.4 (Stein). Une variable aléatoire réelle N suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ si et seulement si pour toute fonction $\mathcal{C}^1 f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \in L^1(\gamma)$, $\mathbb{E}[Nf(N)]$ et $\mathbb{E}[f'(N)]$ sont finies et

$$\mathbb{E}[Nf(N)] = \mathbb{E}[f'(N)].$$

On se pose alors la question suivante : si F est une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[Ff(F)] - \mathbb{E}[f'(F)]$ est proche de 0, est-il possible de dire que la loi de F se rapproche (pour une certaine distance, ici d_W) de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$? Pour cela, on introduit l'équation de Stein.

Définition B.5 (équation de Stein). Si $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne telle que $\mathbb{E}[|h(N)|] < \infty$, alors l'équation de Stein associée à h est l'équation

$$f'(x) - xf(x) = h(x) - \mathbb{E}[h(N)], \tag{I}$$

d'inconnue f .

Proposition B.6 (propriétés). Toute solution de (I) est de la forme

$$f(x) = ce^{x^2/2} + e^{x^2/2} \int_{-\infty}^x (h(y) - \mathbb{E}[h(N)])e^{-y^2/2} dy,$$

avec $c \in \mathbb{R}$. L'unique solution vérifiant $e^{x^2/2}f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ est donnée par

$$f_h(x) = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^x (h(y) - \mathbb{E}[h(N)])e^{-y^2/2} dy.$$

Si h est absolument continue, alors

$$\|f_h''\|_\infty \leq 2\|h'\|_\infty.$$

Proposition B.7. On a, pour une variable aléatoire F et une variable $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$,

$$d_H(F, N) = \sup_{h \in H} |\mathbb{E}[F f_h(F)] - \mathbb{E}[f_h'(F)]|.$$

Démonstration. Soit F une variable aléatoire et $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}[|h(F)|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|h(N)|] < \infty$. En appliquant l'espérance à (I) avec $f = f_h$ et $x = F$ on obtient

$$\mathbb{E}[f_h'(F) - F f_h(F)] = \mathbb{E}[h(F)] - \mathbb{E}[h(N)],$$

d'où le résultat souhaité. \square

On obtient ainsi une formule indépendante de la variable N . On a cependant pas assez d'information sur la fonction f_h , l'intérêt de la section suivante est alors de donner une majoration de cette distance dans un cadre plus précis, en l'occurrence lorsque

$$H = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \|h\|_{Lip} \leq 1\}.$$

B.3 Bornes de Stein

Théorème B.8 (borne pour d_W). Pour des variables aléatoires F et $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$,

$$d_W(F, N) \leq \sup_{f, \|f''\|_\infty \leq 2} |\mathbb{E}[F f(F)] - \mathbb{E}[f'(F)]|.$$

Démonstration. Par définition de d_W , on a $d_W = d_H$ avec

$$H = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \|h\|_{Lip} \leq 1\} \subset \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \|h'\|_\infty \leq 1\},$$

et par la proposition B.6 on a alors

$$d_W(F, N) \leq \sup_{h, \|h'\| \leq 1} |\mathbb{E}[F f_h(F)] - \mathbb{E}[f_h'(F)]|.$$

Or si $\|h'\| \leq 1$, par la proposition B.6 également, on a $\|f_h''\| \leq 2$, donc on a bien

$$d_W(F, N) \leq \sup_{f, \|f''\| \leq 2} |\mathbb{E}[F f(F)] - \mathbb{E}[f'(F)]|.$$

\square

B.4 Applications

Théorème B.9 (application au TCL). Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance commune 0 et de variance commune 1, admettant un moment d'ordre 3.

On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ puis $V_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$, et on considère $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Alors :

1. (TCL). $V_n \xrightarrow{\mathcal{L}} N$.
2. (Berry-Esseen). Il existe une constante C telle que

$$d_W(V_n, N) \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Démonstration. On fixe n et on pose, pour tout $1 \leq k \leq n$, $V_n^{(k)} = V_n - \frac{X_k}{\sqrt{n}}$. On calcule, pour tout f tel que $\|f''\|_\infty \leq 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_n f(V_n) - f'(V_n)] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{X_k}{\sqrt{n}} f(V_n) - \frac{f'(V_n)}{n} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\mathbb{E} \left[\frac{X_k}{\sqrt{n}} (f(V_n) - f(V_n^{(k)})) - \frac{f'(V_n)}{n} \right] + \mathbb{E} \left[\frac{X_k}{\sqrt{n}} f(V_n^{(k)}) \right] \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{X_k}{\sqrt{n}} (f(V_n) - f(V_n^{(k)})) - \frac{f'(V_n)}{n} \right], \end{aligned}$$

car les X_k sont indépendants et centrés. D'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$f(V_n) - f(V_n^{(k)}) = \frac{X_k}{\sqrt{n}} f'(V_n^{(k)}) + \int_{V_n^{(k)}}^{V_n} (V_n^{(k)} - t) f''(t) dt,$$

avec, de nouveau puisque les X_k sont indépendants et centrés,

$$\mathbb{E} \left[\frac{X_k^2}{n} f'(V_n^{(k)}) \right] = \frac{f'(V_n^{(k)})}{n},$$

donc on obtient

$$\mathbb{E}[V_n f(V_n) - f'(V_n)] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mathbb{E}[f'(V_n^{(k)}) - f'(V_n)]}{n} + \mathbb{E} \left[\frac{X_k}{\sqrt{n}} \int_{V_n^{(k)}}^{V_n} (V_n^{(k)} - t) f''(t) dt \right] \right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[V_n f(V_n) - f'(V_n)]| &\leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mathbb{E}[|f'(V_n^{(k)}) - f'(V_n)|]}{n} + \mathbb{E} \left[\frac{|X_k|}{\sqrt{n}} \int_{V_n^{(k)}}^{V_n} (V_n^{(k)} - t) |f''(t)| dt \right] \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mathbb{E} \left[2 \frac{|X_k|}{\sqrt{n}} \right]}{n} + \mathbb{E} \left[\frac{|X_k|^3}{\sqrt{n}^3} \right] \right) = \frac{C}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

avec $C = 2(\mathbb{E}[|X_1|] + \mathbb{E}[|X_1|^3])$.

□

Proposition B.10 (application à la loi de Poisson). *Si on note, pour tout $\lambda > 0$, Y_λ une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, alors*

1. $\frac{Y_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.
2. *Il existe une constante C telle que*

$$d_W \left(\frac{Y_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}, N \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}$$

Démonstration. Pour tout $\lambda > 0$ et pour toute variable X , on note $V_{X,\lambda} = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$. Remarquons d'abord que pour une variable $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et une fonction $\mathcal{C}^1 f$,

$$\mathbb{E}[Y f(Y)] = \lambda \mathbb{E}[f(Y + 1)].$$

Pour tout f tel que $\|f''\|_\infty \leq 2$, on a alors

$$\mathbb{E}[V_{Y,\lambda} f(V_{Y,\lambda}) - f'(V_{Y,\lambda})] = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} \mathbb{E}[f(V_{Y+1,\lambda}) - f(V_{Y,\lambda})] - \mathbb{E}[f'(V_{Y,\lambda})]$$

On utilise à nouveau la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(V_{Y+1,\lambda}) - f(V_{Y,\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f'(V_{Y,\lambda}) + \int_{V_{Y,\lambda}}^{V_{Y+1,\lambda}} (V_{Y+1,\lambda} - x) f''(x) dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[V_{Y,\lambda} f(V_{Y,\lambda}) - f'(V_{Y,\lambda})]| &= \left| \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} \mathbb{E} \left[\int_{V_{Y,\lambda}}^{V_{Y+1,\lambda}} (V_{Y+1,\lambda} - x) f''(x) dx \right] \right| \\ &\leq \frac{\|f''\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$

□

Références

- [1] M.Hoffmann J.F.Muzy E.Bacry, S.Delattre. *Some limit theorems for Hawkes processes and application to financial statistics*. Stochastic Processes and their Applications, 123 :2475–2499, 2013.
- [2] Y.Seol. *Limit theorems for discrete Hawkes processes*. Statistics and Probability Letters, 99 :223–229, 2015.
- [3] R.L.Tweedie S.P.Meyn. *Markov Chains and Stochastic Stability*. pages 530–531, 2005.
- [4] C.C.Heyde P.Hall. *Martingale limit theory and its application*. Probability and Mathematical Statistics, 1980.
- [5] P.Moyal L.Decreusefond. *Modélisation stochastique markovienne*. pages 5–10, 2022.
- [6] L.Marsalle V.C.Tran M.Costa, C.Graham. *Renewal in Hawkes process with self-excitation and inhibition*. 2020.
- [7] M.Khabou L.Huang. *Convergence of the Discrete-Time Compound Hawkes Process with Exponential or Erlang Kernel*. 2021.
- [8] G.Peccati I.Nourdin. *Normal approximations with Malliavin calculus*. Cambridge tracts in mathematics, (192) :59–63, 2012.