Retour d'oraux

Sacha Quayle

Les oraux sont très bien organisés et les surveillants sont hyper bienveillants. Pour les leçons, on garde notre valise de livres à côté de nous pendant toute la préparation. On tire ensuite le couplage face cachée, et tout le monde retourne la feuille en même temps. On a bien trois heures entières de préparation, au bout desquelles notre plan est photocopié et on a encore 10 min pour manger/boire, aller aux toilettes et relire le plan. Pour le plan, la première page est un peu plus petite que les formats sur lesquels on s'entraîne pendant l'année, puisqu'il y a l'entête au début, mais ce n'est pas très dérangeant.

Pour la modélisation, on tire un couplage dont on a juste les mots clés au début. Ce couplage permet d'ouvrir une session avec un identifiant et mot de passé personnalisés, sur la session on retrouve alors les deux textes et au bout d'une heure à peu près le jury nous donne le texte que l'on a choisi. Le transfert de fichiers est bien fait, il n'y a rien à faire normalement, il ne faut juste pas oublier de sauvegarder régulièrement les fichiers.

1 Oral d'algèbre et géométrie

Tirage :

1. 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
2. 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Choix : 151.

Développements présentés :

1. Réduction de Frobénius.
2. Théorème des extrémas liés.

Développement choisi : Réduction de Frobénius.

Plan :

I - Théorie de la dimension

1. Familles libres, génératrices.
2. Espaces de dimension finie.
3. Sous-espaces, produit et somme d'espaces de dimension finie.

II - Applications linéaires en dimension finie

1. Propriétés, rang.
2. Caractérisations du rang.
3. Dualité.

III - Applications

1. Réduction de Frobénius
2. Sous-variétés et espace tangent.

Remarques sur la préparation. J'ai fini d'écrire le plan en 1h45 à peu près, avec environ 60 items, après ça j'ai réécrit mes développements et revu quelques preuves. J'avais prévu de rajouter des sous parties dans la partie III sur les extensions de corps et la topologie, mais il ne me restait plus beaucoup de place et j'ai préféré me préparer aux questions sur les développements, et sur les preuves du plan. J'avais d'ailleurs revu les preuves sur les bases de la dimension (car dans le jury ils mentionnent qu'il faut bien les connaître), mais au final je n'ai eu aucune question dessus.

Remarques/questions du jury sur le développement : Mon développement consistait des deux lemmes suivants, puis l'existence de la réduction de Frobénius. J'ai duré 13min30. :

Lemme 1 Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

Lemme 2 En gardant les notations du lemme précédent, l'espace $E_{u,x} = \text{Vect}(u^k(x))_{k\geqslant 0}$ admet un supplémentaire stable par u.

Théorème 3 Existence réduction de Frobénius.

Voici les questions sur le développement :

1. Pourquoi si $p = \dim(E_{u,x})$, $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est une base de $E_{u,x}$? Même chose, si $p = \deg(\pi_u)$, pourquoi $(id_E, u, ..., u^{p-1})$ est une base de $K[u]$?
2. Si F est un SEV stable par u, pourquoi π_{u_F} divise π_u ?
3. Dans le lemme 1, j'écrivais $\pi_u = \Pi P_i^{m_i}$ le produit en irréductibles et je prenais $x_k \in \ker(P_k^{m_k}(u)) \backslash \ker(P_k^{m_k-1}(u))$. On m'a redemandé la justification et pourquoi le polynôme minimal de x_k c'est bien $P_k^{m_k}$.
4. Dans le lemme 2, je définissais un SEV F (le candidat pour être un supplémentaire stable) par une intersection indexée par $\mathbb{N}$, puis je dis qu'en fait l'intersection est seulement sur $0 \leqslant k \leqslant p-1$ avec $p = \dim(E_{u,x})$, on m'a demandé de le rejustifier.
5. Exemple sur une matrice simple : $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Questions sur le plan :

1. Comment définit-on le polynôme minimal ?
2. Est-ce-que des SEV $E_1, ..., E_r$ sont en somme directe si et seulement si leur intersection deux à deux est nulle ? *(dans mon développement pour le lemme 2 je montrais que l'intersection était nulle. J'ai dit que dès que $r \geqslant 3$ c'est faux, j'ai essayé de construire un contre-exemple mais je n'ai pas réussi)*
3. Pourquoi l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à r est un fermé ? *(je l'avais mis dans mon plan)*
4. Que se passe-t-il pour les matrices de rang égal à r avec $r < n$? Pour $r = n$? *(j'ai dit que si $r < n$ l'espace est ni fermé ni ouvert. Si $r = n$ j'ai dit que l'espace était ouvert (c'est les matrices inversibles) puis justifié pourquoi, mais pas fermé par un argument de connexité, ils m'ont OK puis demandé de le retrouver en déterminant l'adhérence de cet espace)*
5. Sur les matrices compagnon : quelle est la dimension d'un sous-espace propre associé ? Donner une CNS pour qu'une matrice compagnon soit diagonalisable. *(j'ai montré que la dimension était 1 en utilisant la caractérisation du rang par les matrices extraites)*

Note obtenue : 14,5.

2 Oral d'analyse et probabilités

Tirage :

1. 201 : Espaces de fonctions : exemples et applications.
2. 229 : Fonctions monotones, fonctions convexes. Exemples et applications.

Choix : 201.

Développements présentés :

1. Densité des fonctions continues nulle part dérivables.
2. Inversion de Fourier.

Développement choisi : Densité des fonctions continues nulle part dérivables.

Plan :

I - Espaces de fonctions continues

1. Modes de convergence.
2. Fonctions continues sur un compact.
3. Théorèmes de densité.

II - Espaces L^p

1. Définitions, premiers théorèmes.
2. Convolution et régularisation.
3. Application à la transformation de Fourier L^1.

III - Espaces de fonction holomorphes

1. Fonctions holomorphes : définitions et propriétés.
2. L'espace $H(\Omega)$.
3. Application à l'espace de Bergman.

Remarques sur la préparation. J'ai écrit le plan en 2h. C'était une leçon que j'avais déjà présentée en binôme donc j'ai mis plus de temps que ce que je pensais, mais j'avais pas mal de choses à dire (j'avais plus de 70 items).

Remarques/questions du jury sur le développement : Mon développement consistait seulement du théorème de densité. J'ai duré 16min, voulant bien expliquer les étapes car j'avais l'impression que deux membres du jury ne comprenaient pas tout à fait, et j'ai aussi oublié de regarder ma montre... J'ai hésité avec l'espace de Bergman, je ne sais pas si cela aurait été un meilleur choix.

Voici les questions sur le développement :

1. Comment retrouver ce résultat dès que l'on a un contre-exemple ? *(j'en avais mis un dans mon plan. J'ai essayé de prendre une fonction continue et de lui ajouter la-dite fonction divisée par n, mais on ne sait pas forcément qu'elle est nulle part dérivable. J'ai alors pensé au théorème de Weierstrass pour s'assurer de ce dernier point puisque les fonctions polynômes sont bien dérivables)*
2. Comment démontrer alors le théorème de Weierstrass ? *(j'ai parlé des polynômes de Bernstein et de la preuve par la convolution)*

Questions sur le plan :

1. Sur les espaces L^p : si l'ensemble est de mesure finie, on a une inclusion ($L^p \subset L^q$ si $q < p$). Pourquoi ? *(inégalité de Holder)* L'inclusion est-elle stricte ? *(j'ai répondu oui puis construit un contre-exemple sur [0,1])*
2. Sur [0,1], est-ce-que L^2 est fermé dans L^1 ? *(non, j'ai construit une suite en contre-exemple)*
3. Sur [0,1], montrer que la boule unité de L^2 est fermée dans L^1. *(je n'ai pas trouvé tout de suite, le jury m'a dit qu'il fallait utiliser Riesz-Fischer. J'essayais d'appliquer un théorème de convergence dominée sans succès, il m'a alors demandé quels théorèmes je connaissais sur l'intégrale de la limite d'une suite de fonctions, j'ai alors pensé au lemme de Fatou et j'ai fait un dessin au tableau pour me rappeler du sens de l'inégalité en trouvant un cas d'inégalité stricte, ce qu'il a apprécié)*
4. Comment se démontre l'inversion de Fourier ? *(on le démontre pour les noyaux de Gauss, puis on utilise le fait que c'est une approximation de l'unité)*
5. La transformée de Fourier est-elle injective ? *(j'ai dit que oui par la formule d'inversion)*
6. La transformée de Fourier est-elle surjective ? *(j'ai répondu que non, car sinon elle serait bijective, et d'après le théorème d'isomorphisme de Banach l'inverse serait alors continue. C'était alors la fin de l'oral et je n'ai pas pu finir le raisonnement.)*

Note obtenue : 18,75.

3 Oral de modélisation (option A)

Tirage :

1. Lois exponentielles, lois de Poisson. Estimation.
2. Théorèmes limite, simulation de variables aléatoires.

Choix : Lois exponentielles, lois de Poisson. Estimation..

Résumé du texte : On étudie l'évolution du nombre de sous-espèces d'une espèce (exactement pareil que la partie I du texte 2021-A1 qu'on peut retrouver sur agreg.org), qu'on peut modéliser par un arbre généalogique dont la racine est "l'ancêtre". On regarde alors l'évolution d'un caractère ou état, qui évolue sur chaque branche de cet arbre. Le but est, en sachant l'état des différentes sous-espèces présentes à l'instant t, d'estimer l'état initial, c'est-à-dire l'état de l'ancêtre. On simplifie l'étude en se restreignant au cas de deux états possibles. La première partie du texte traitait de l'évolution du nombre de sous-espèces (on obtenait alors la proposition 1 et le théorème 2 du texte mentionné précédemment). La deuxième partie traitait du modèle d'évolution de notre caractère, en se concentrant sur ce qu'il se passe sur une seule branche de l'arbre. La troisième partie proposait alors un estimateur de notre état initial, et on établissait une minoration de la probabilité que cet estimateur soit bien notre état initial.

Présentation/plan : J'ai mis à peu près 30min pour choisir mon texte, étant partie sur l'autre au début car il y avait des théorèmes limites, ce que je trouve plus facile à simuler informatiquement. Cependant, j'ai eu le texte 2021-A1 en oral blanc, le début était donc le même et je me sentais plus à l'aise dessus. J'ai suivi exactement le même plan que le texte. J'ai ajouté des simulations numériques dans chaque partie : simulation du nombre d'espèces en fonction du temps, test du chi-deux pour illustrer la loi que l'on trouvait dans la partie I (qui n'a pas abouti), test du chi-deux dans la partie II (on calculait la loi de la variable donnant l'état sur une branche au temps t), et enfin une simulation de la probabilité de la partie III avec la borne théorique (graphique qui était déjà donné dans le texte et on nous suggérait de refaire la simulation). J'ai duré 33 min.

Questions :

1. Quel résultat avez-vous utilisé pour simuler la probabilité dans la dernière simulation ? *(Monte-Carlo qui repose sur la loi des grands nombres, ils m'ont alors demandé de l'énoncer et d'expliciter la variable que l'on utilise ici, les indicatrices)*
2. Qu'avez-vous essayé de faire pour la simulation qui n'a pas aboutie ? *(je voulais faire un test du chi-deux mais les effectifs des classes doivent être plus grands que 5, j'ai donc voulu écrire un programme pour fusionner les classes d'effectifs faibles)*
3. Expliquer le principe du test du chi-deux.
4. Vous avez parlé de la p-valeur, qu'est-ce-que c'est ? *(j'ai donné l'interprétation, ils m'ont demandé la définition mathématique mais je me souvenais plus exactement, j'ai essayé de retrouver puis on est passé à autre chose)*
5. Pouvez-vous démontrer la formule de Wald ? *(j'en ai parlé pour une des preuves)*
6. Donner la définition et les caractérisations de la convergence en loi.
7. Donner les liens entre les modes de convergence avec les réciproques partielles.
8. Donner la définition du processus de Poisson.
9. Expliquer la propriété sans mémoire des lois exponentielles.

Remarques : Beaucoup de questions de cours de base et quasiment aucune sur le modèle, l'interprétation des résultats ni les simulations informatiques (par ex faire varier les paramètres, relancer les simulations...). Jury très bienveillant et encourageant.

Note obtenue : 15.