

### 3.13 Paul-Lévy, théorème central limite et applications

Leçons : 250, 261, 262, 265, 266.

Références : [GK].

**Prérequis** : transformation de Fourier, fonction caractéristique, formule de Taylor, lemme de Slutsky. Pour l'application 1 : loi Gamma. Pour l'application 2 : estimateurs, intervalles de confiance.

**Définition** :  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$  si : pour toute fonction  $f$  continue bornée,  $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$ .

**Lemmes (admis)** :

1.  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow$  pour toute fonction  $f$  continue à support compact,  $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$ .
2. Si  $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  tel que  $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z$ , alors  $(1 + \frac{z_n}{n})^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^z$ .

**Théorème (Paul-Lévy)** :  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$  si et seulement si la suite de fonctions  $(\varphi_{X_n})_n$  converge simplement vers  $\varphi_X$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème (TCL)** : Soit  $(X_n)_n$  suite de variables aléatoires réelles i.i.d. admettant un moment d'ordre 2. On note  $m$  l'espérance commune,  $\sigma^2$  la variance commune et  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Alors

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

**Application 1** : Formule de Stirling.

**Application 2** : Intervalle de confiance pour le paramètre d'un  $n$ -échantillon d'une loi de Poisson.

**Remarque** : On ne peut pas présenter tous les résultats démontrés ici, il faut choisir les résultats que l'on démontre en fonction de la leçon. Voir le [ZQ] pour les résultats admis.

*Preuve théorème de Paul-Lévy.* On suppose  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la fonction  $f_t : x \mapsto e^{itx}$  est continue bornée, donc  $\mathbb{E}[f_t(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f_t(X)]$ , c'est-à-dire  $\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_X(t)$ .

Inversement, on suppose que  $(\varphi_{X_n})_n$  converge simplement vers  $\varphi_X$ . Soit  $f$  une fonction continue à support compact.

- On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact. Alors  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  (l'espace de Schwartz), donc par bijectivité de la transformée de Fourier, il existe  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $f = \hat{g}$ . Alors : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{-itX_n} g(t) dt \right] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[e^{-itX_n}] g(t) dt,$$

d'après le théorème de Fubini. Or, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a  $\mathbb{E}[e^{-itX_n}] = \varphi_{X_n}(-t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_X(-t) = \mathbb{E}[e^{-itX}]$ , et  $|\mathbb{E}[e^{-itX_n}] g(t)| \leq |g(t)|$  avec  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ , donc par convergence dominée :  $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$ .

- Dans le cas général, si  $\varepsilon > 0$ , par densité il existe une fonction  $h$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact tel que  $\|f - h\|_\infty \leq \varepsilon$ , alors :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| &\leq |\mathbb{E}[f(X_n) - h(X_n)]| + |\mathbb{E}[h(X_n)] - \mathbb{E}[h(X)]| + |\mathbb{E}[h(X) - f(X)]| \\ &\leq 2\varepsilon + |\mathbb{E}[h(X_n)] - \mathbb{E}[h(X)]|, \end{aligned}$$

d'où  $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$  d'après ce qui précède, puis  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$  d'après le lemme 1. □

*Preuve TCL.* Quitte à centrer réduire, on peut supposer que  $m = 0$  et  $\sigma^2 = 1$ . D'après le théorème de Paul-Lévy, il suffit de montrer que la suite de fonctions  $(\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}})_n$  converge simplement vers  $\varphi_{\mathcal{N}(0,1)} : t \mapsto e^{-t^2/2}$ . Or, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $n \geq 1$ , par indépendance on a :

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\sqrt{n}}}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\frac{X_i}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n.$$

La variable  $X_1$  admet un moment d'ordre 2, donc la fonction  $\varphi_{X_1}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et d'après la formule de Taylor,

$$\varphi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n = \left( \varphi_{X_1}(0) + \frac{t}{\sqrt{n}} \varphi'_{X_1}(0) + \frac{t^2}{2n} \varphi''_{X_1}(0) + \frac{\varepsilon_n}{n} \right)^n,$$

où  $\varepsilon_n \in \mathbb{C} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Or  $\varphi_{X_1}(0) = 1$ ,  $\varphi'_{X_1}(0) = \mathbb{E}[iX_1] = 0$  et  $\varphi_{X_1}(0)''(0) = -\mathbb{E}[X_1^2] = -1$ , d'où

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left( 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-t^2/2},$$

d'après le lemme 2. D'où  $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ . □

*Preuve application 1.* On considère  $(X_n)_n$  des variables i.i.d. de loi  $\mathcal{E}(1)$ . On note  $S_n = \sum_{k=0}^{n+1} X_k$ . Alors d'après le théorème central limite,

$$\frac{S_n - (n+1)}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Or  $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$  et  $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , donc d'après le lemme de Slutsky,

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{S_n - (n+1)}{\sqrt{n+1}} \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

On calcule alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt$ , où  $f_n$  est la densité de  $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ , de deux manières différentes :

1. On utilise ce qui précède, la convergence en loi étant équivalente à la convergence simple des fonctions de répartition au points de continuité de la fonction de répartition limite, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-t^2/2} dt.$$

2. On utilise la loi Gamma, puisque  $\mathcal{E}(1) \sim \Gamma(1, 1)$ , on a :  $S_n \sim \Gamma(n+1, 1)$ , donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(t) dt &= \int_0^1 \sqrt{n} f_{S_n}(\sqrt{nt} + n) dt \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 (\sqrt{nt} + n)^n e^{-(n+t\sqrt{n})} \mathbf{1}_{t \geq -\sqrt{n}} dt \\ &= \frac{\sqrt{n}}{n!} \left( \frac{n}{e} \right)^n \int_0^1 \left( 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n e^{-t\sqrt{n}} dt, \end{aligned}$$

avec  $\int_0^1 \left( 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n e^{-t\sqrt{n}} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 e^{-t^2/2} dt$  par convergence dominée, donc par unicité de la limite on déduit

$$\frac{\sqrt{n}}{n!} \left( \frac{n}{e} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

d'où la formule de Stirling. □

*Preuve application 2.* On considère des VA  $(X_n)_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{P}(\lambda)$  où  $\lambda > 0$  est à estimer. On note  $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ . D'après le théorème central limite, on a

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda}} (\overline{X}_n - \lambda) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Or, d'après la loi des grands nombres,  $\overline{X}_n$  est un estimateur fortement consistant de  $\lambda$  et par stabilité de la convergence presque sûre par les fonctions continues,  $\sqrt{\frac{\lambda}{\overline{X}_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{ps} 1$ , donc en particulier  $\sqrt{\frac{\lambda}{\overline{X}_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1$ . Ainsi, d'après le lemme de Slutsky,

$$\sqrt{\frac{n}{\overline{X}_n}}(\overline{X}_n - \lambda) = \sqrt{\frac{n}{\lambda}}(\overline{X}_n - \lambda) \sqrt{\frac{\lambda}{\overline{X}_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Ainsi, si  $\alpha \in ]0, 1[$ , et  $q$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , alors on a

$$\mathbb{P}\left(-q \leq \sqrt{\frac{n}{\overline{X}_n}}(\overline{X}_n - \lambda) \leq q\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 - \alpha,$$

ce qui donne l'intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\lambda$  :

$$\left[ \overline{X}_n \pm q \sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}} \right]$$

□

### Questions :

1. Est-ce-que convergence en loi implique convergence en probabilité en général?
2. Pourquoi a-t-on besoin du lemme 2?

### Réponses :

1. Non, on a l'implication si la limite est constante.
2. Pour éviter le recours au log complexe.