### 3.14 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$

**Leçons :** 264, 266.

**Référence :** [Ben].

**Prérequis :** définition et propriétés de base chaînes de Markov, états récurrents/transcients, formule de Stirling, théorèmes de Fubini.

La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ est définie par récurrence par $X_0 = 0$, et $X_{n+1} = X_n + \theta_{n+1}$, où $(\theta_n)_n$ est une suite de VA i.i.d. de loi uniforme sur les vecteurs de la base canonique $\{\pm e_1, ..., \pm e_d\}$. On admet les deux lemmes suivants :

**Lemme 1 (admis) :** L'état $x$ est récurrent si et seulement si $\sum_{k\geqslant 0} P^k(x,x) = \infty$, où $P^k(x,y)$ est la probabilité d'arriver sur $y$ en partant de $x$ en $k$ étapes.

**Lemme 2 (admis) :** Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$. Alors la fonction $\phi \circ \|.\|$ est intégrable si et seulement si la fonction d'une variable réelle positive $t \mapsto t^{d-1}\phi(t)$ est intégrable.

**Théorème :** Pour $d = 1$ et 2, la marche aléatoire est récurrente. Pour $d \geqslant 3$, elle est transciente.

*Preuve.* La marche aléatoire est irréductible, donc tous les états sont de même nature. Il suffit ainsi de regarder la nature de l'état 0, c'est à dire la nature de la série $\sum_{k\geqslant 0} P^k(x,x) = \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X_k = 0)$ d'après le lemme 1. Or, on peut montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $\|X_n\|_1 = \sum_{j=1}^d |X_n^{(j)}|$ est de même parité que $n$, donc pour tout $k$ impair, $\mathbb{P}(X_k = 0) = 0$. On s'intéresse donc à la série $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$.

1. Pour $d = 1$ : pour $n = 2k$ pair, pour revenir en 0 en $n$ étapes il faut se déplacer autant de fois à gauche qu'à droite. Ainsi :
$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{(2k)!}{k!^2 4^k},$$
donc d'après la formule de Stirling,
$$\mathbb{P}(X_n = 0) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi k}},$$
donc la série $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$ est divergente et l'état 0 est récurrent.
2. Pour $d = 2$ : on note pour tout $k \geqslant 0$, $X_k = (X_k^1, X_k^2)$ et $\theta_k = (\theta_k^1, \theta_k^2)$. On considère les variables aléatoires définies par
$$S_k = \theta_k^1 + \theta_k^2, \qquad T_k = \theta_k^1 - \theta_k^2.$$
On peut montrer, en dressant le tableau des valeurs possibles pour $\theta_k$, que $S_k$ et $T_k$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher, et ainsi $\left(\sum_{k=1}^n S_k\right)_n$ et $\left(\sum_{k=1}^n T_k\right)_n$ définissent des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$. On en déduit alors :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{2k} = 0) &= \mathbb{P}(X_{2k}^1 = X_{2k}^2 = 0)\\ &= \mathbb{P}(X_{2k}^1 + X_{2k}^2 = X_{2k}^1 - X_{2k}^2 = 0)\\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} S_i = \sum_{i=1}^{2k} T_i = 0\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} S_i = 0\right)\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} T_i = 0\right)\\ &\underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi k}}\frac{1}{\sqrt{\pi k}} = \frac{1}{\pi k},\end{aligned}$$
donc la série $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$ est divergente et l'état 0 est récurrent.
3. On suppose maintenant $d \geqslant 3$. On note $\varphi$ la fonction caractéristique de $\theta_1$. On va montrer dans un premier temps que
$$\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X_{2k} = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1-\varphi^2(t)}\mathrm{d}t,$$

puis que cette intégrale est finie. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} I_d(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i\langle x,t\rangle} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i\sum_{j=1}^d x_j t_j} \mathrm{d}t \\ &= \prod_{j=1}^d \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix_j t_j} \mathrm{d}t_j \\ &= 1_{\{x=0\}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit, d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X_{2k}=0) &= \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{E}[1_{\{X_{2k}=0\}}] = \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{E}[I_d(X_{2k})] \\ &= \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \mathbb{E}\left[\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i\langle X_{2k},t\rangle} \mathrm{d}t\right] \\ &= \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \varphi_{X_{2k}}(t) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \varphi(t)^{2k} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1-\varphi^2(t)} \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini-Tonelli. Montrons à présent que l'intégrale est finie. On a :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) &= \mathbb{E}[e^{i\langle t,\theta_1\rangle}] = \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^d t_j \theta_1^j}\right] \\ &= \sum_{j=1}^d \frac{1}{2d}(e^{it_j} + e^{-it_j}) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^d \cos(t_j) \end{aligned}$$

donc la fonction $1-\varphi^2$ s'annule en $(0,...,0)$, $(\pi,...,\pi)$ et $(-\pi,...,-\pi)$. On regarde par exemple en $(0,...,0)$, les autres cas étant analogues :

$$\begin{aligned} \varphi^2(t) &= \left(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^d \cos(t_j)\right)^2 \\ &\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{d^2}\left(\sum_{j=1}^d (1 - t_j^2/2) + o(\|t\|^2)\right)^2 \\ &\underset{t\to 0}{=} \left(1 - \sum_{j=1}^d \frac{t_j^2}{2d} + o(\|t\|^2)\right)^2 \\ &\underset{t\to 0}{=} 1 - \sum_{j=1}^d \frac{t_j^2}{d} + o(\|t\|^2), \end{aligned}$$

d'où $\dfrac{1}{1-\varphi^2(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{d}{\|t\|^2}$. Or, d'après le lemme 2, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\|t\|^2}$ est intégrable en 0 si et seulement si la fonction $t \mapsto t^{d-1}t^{-2} = \dfrac{1}{t^{-d+3}}$ est intégrable en 0, soit si et seulement si $d > 2$. Donc, pour $d \geqslant 3$, la série $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X_{2k}=0)$ est convergente et l'état 0 est transcient.

□

**Remarque.** Voir Chabanol pour la preuve du lemme 1, et Garet-Kurtzmann pour la preuve du lemme 2. Vu le raisonnement du cas $d \geqslant 3$, on n'a pas forcément besoin de démontrer les cas $d = 1$ et $d = 2$ (puisqu'on obtient une équivalence), mais les preuves restent intéressantes et montrent une application de la formule de Stirling.