INTÉGRALE DE LEBESGUE

(INTL)

Thibaut Deheuvels

1A maths 2019, ENS de Rennes

Chapitre 0

Cardinaux, dénombrabilité

0.1 Cardinalité

Définition 0.1. Deux ensembles E et F sont dits *équipotents* s'il existe une bijection de E dans F. On note alors $E \simeq F$ ou $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

▷ Exemple. Si E est un ensemble, alors $\mathscr{P}(E) \simeq \{0,1\}^E$ car la fonction $A \subset E \longmapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection.

Notation. Si E et F sont deux ensembles, on note $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$ s'il existe une injection de E dans F. Si, de plus, les ensembles E et F ne sont pas équipotents, on note $\operatorname{Card} E < \operatorname{Card} F$. De la même façon, on définit les notations $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$ et $\operatorname{Card} E > \operatorname{Card} F$.

◇ Remarque *(axiome du choix [AC])*. Soit E un ensemble non vide. Il existe une fonction choix $f\colon \mathscr{P}(E) \to E$ telle que, pour toute partie non vide A de E, on ait $f(A) \in A$. Une formulation équivalente est la suivante : si I est un ensemble et $(E_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles non vides, alors le produit $\prod_{i\in I} E_i$ est non vide.

Proposition 0.2. – Si $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$, alors $\operatorname{Card} F \geqslant \operatorname{Card} E$.
– Si $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$, alors $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$. AC

Théorème 0.3 *(Cantor-Bernstein)*. Si $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$ et $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$, alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Proposition 0.4. Si E est non vide, alors $\operatorname{Card} E < \operatorname{Card} \mathscr{P}(E)$.

Preuve On a $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} \mathscr{P}(E)$ car la fonction $x \in E \longmapsto \{x\} \in \mathscr{P}(E)$ est clairement injective. Par l'absurde, supposons l'égalité. Alors il existe une fonction $\varphi\colon E \to \mathscr{P}(E)$ bijective. On pose

$$A \coloneqq \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}.$$

Comme φ est une bijection, il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) = A$. Si $a \in A$, alors $a \notin \varphi(a) = A$ ce qui est absurde. Si $a \notin A$, alors $a \in \varphi(a) = A$ ce qui est également absurde. D'où le résultat. □

0.2 Dénombrabilité

Définition 0.5. Un ensemble E est dit *dénombrable* si $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} \mathbb{N}$.

◇ Remarque. De manière équivalente et sans avoir à recourir à l'axiome du choix, un ensemble E est dénombrable si et seulement si $\operatorname{Card} \mathbb{N} \geqslant \operatorname{Card} E$.

▷ Exemples. – Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont dénombrables par les bijections

$$n \in \mathbb{Z} \longmapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0, \\ -2n-1 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (n,m) \in \mathbb{N}^2 \longmapsto \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m.$$

– Par récurrence, on montre que $\operatorname{Card} \mathbb{N}^k = \operatorname{Card} \mathbb{N}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
– Si $E_1, \dots, E_k$ sont k ensembles dénombrables, alors $\prod_{i=1}^k E_i$ est dénombrable.
– L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
– L'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ ne l'est pas car $\operatorname{Card} \mathbb{N} < \operatorname{Card} \mathscr{P}(\mathbb{N})$, donc $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne l'est pas.

Proposition 0.6. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dénombrables, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est dénombrable.

Théorème 0.7. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Preuve La fonction

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{2x_n}{3^{n+1}} \in [0,1]$$

est injective, donc $\operatorname{Card} \mathbb{N} < \operatorname{Card}\{0,1\}^{\mathbb{N}} \leqslant \operatorname{Card}[0,1] \leqslant \operatorname{Card} \mathbb{R}$. □

Chapitre 1

Tribus, tribu borélienne

1.1 Définitions et exemples

Soit E un ensemble. On appelle *classe de parties* de E tout sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$.

Définition 1.1. On appelle *tribu* (ou *σ-algèbre*) sur E toute classe de parties $\mathscr{A}$ de E telle que
- $\emptyset \in \mathscr{A}$;
- si $A \in \mathscr{A}$, alors $A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{A}$; (stabilité par passage au complémentaire)
- si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathscr{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$. (stabilité par union dénombrable)

On appelle alors $(E, \mathscr{A})$ un *espace mesurable*.

◇ Remarque. Un tribu est aussi stable par intersection dénombrable. En effet, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de A, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} \in \mathscr{A}$.

▷ Exemples. – La classe de parties $\{\emptyset, E\}$ est une tribu sur E appelée tribu grossière.
- La classe de parties $\mathscr{P}(E)$ en est une appelée tribu triviale.
- Si $A \subset E$, alors $\{\emptyset, E, A, A^{\mathrm{c}}\}$ est une tribu.
- La classe de parties $\{A \subset E \mid A \text{ dénombrable ou } A^{\mathrm{c}} \text{ dénombrable}\}$ est une tribu.

◇ Remarque. Une intersection quelconque de tribus sur E est encore une tribu sur E.

Définition-proposition 1.2. Si $\mathscr{C}$ est une classe de partie de E, alors il existe une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant C. On appelle cette tribu la *tribu engendrée* par $\mathscr{C}$ et on la note $\sigma(\mathscr{C})$. En d'autres termes, si $\mathscr{A}$ est une tribu sur E telle que $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$, alors $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$.

Preuve La plus petite tribu qui contient $\mathscr{C}$ est clairement

$$\sigma(C) = \bigcup_{\substack{\mathscr{A} \text{ tribu de } E \\ \mathscr{C} \subset \mathscr{A}}} \mathscr{A}.$$

□

▷ Exemple. Si $A \subset E$, alors $\sigma(\{A\}) = \{\sigma, A, A^{\mathrm{c}}, E\}$.

Exercice 1.1. Quelle est la tribu engendrée par les singletons de E ?

Il arrive fréquemment, lorsqu'on est confronté à une tribu engendrée par une classe de parties $\mathscr{C}$, qu'on veuille démontrer qu'une propriété vérifiée par les éléments de $\mathscr{C}$ reste vraie pour $\sigma(\mathscr{C})$ tout entière. Pour montrer une telle chose, on pourrait vouloir essayer de décrire un élément quelconque de $\sigma(\mathscr{C})$ à partir d'éléments de $\mathscr{C}$. Malheureusement, il n'y a pas de procédé général pour y parvenir : un élément de $\sigma(\mathscr{C})$ ne peut pas toujours être décrit comme une union dénombrable d'ensembles de $\mathscr{C}$, ni comme une intersection d'union de tels ensembles, etc. La remarque suivante suggère un procédé de démonstration bien commode pour montrer que $\sigma(\mathscr{C})$ continue de vérifier une propriété vraie pour $\mathscr{C}$. Nous l'utiliserons à de nombreuses reprises dans ce cours.

◇ Remarque. Pour montrer que les éléments de $\sigma(\mathscr{C})$ vérifient une propriété (P), il suffit de montrer que
- les éléments de $\mathscr{C}$ vérifient (P),
- la classe de parties $\mathscr{B} \coloneqq \{B \in \sigma(\mathscr{C}) \mid B \text{ vérifie (P)}\}$ est une tribu.

En effet, on aura alors $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$, donc $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{B}$, donc $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{C})$.

1.2 Tribu borélienne

1.2.1 Espaces topologiques

Définition 1.3. Soit E un ensemble. On appelle *topologie* sur E toute classe de parties $\mathscr{T}$ sur E vérifiant
– $\emptyset \in \mathscr{T}$ et $E \in \mathscr{T}$,
– si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{T}$, alors $\bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \mathscr{T}$,
– si $\Omega_1, \dots, \Omega_n \in \mathscr{T}$, alors $\bigcap_{i=1}^n \Omega_i \in \mathscr{T}$.
On appelle *ouverts* les éléments de $\mathscr{T}$ et on note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des ouverts de E, on appelle *fermés* leurs complémentaires. On appelle alors $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique.

▷ Exemple. L'ensemble $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$) muni de ses ouverts au sens usuel est un espace topologique.

◇ Remarque. Une intersection quelconque de topologies sur E est encore une topologie sur E. Si $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(E)$, alors il existe une plus petite topologie sur E contenant $\mathscr{C}$. On l'appelle *topologie engendrée* par $\mathscr{C}$.

1.2.2 Tribu borélienne

Définition 1.4. Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique. On appelle *tribu borélienne* sur E la tribu engendrée par les ouverts de E. On la note $\mathscr{B}(E) \coloneqq \sigma(\mathscr{T})$. Les éléments de $\mathscr{B}(E)$ sont appelés les *boréliens* de E.

◇ Remarques. – La tribu borélienne $\mathscr{B}(E)$ est aussi engendrée par les fermés de E.
– En général, on n'a pas $\mathscr{B}(E) = \mathscr{P}(E)$: c'est le cas de $\mathbb{R}$. En effet, on peut construire des parties de $\mathbb{R}$ non boréliennes (avec ou sans axiome du choix). En fait, on peut montrer que $\operatorname{Card} \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \operatorname{Card} \mathbb{R}$.

Proposition 1.5 *(boréliens de $\mathbb{R}$).* On a
$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]\alpha, \beta[\mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{]-\infty, a[\mid a \in \mathbb{Q}\}).$$
De même avec les autres types d'intervalles pour la seconde égalité.

Preuve • *Première égalité.* Si $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, alors $]\alpha, \beta[\in \mathscr{O}(\mathbb{R})$, donc $\sigma(\{]\alpha, \beta[\mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}) \subset \sigma(\mathscr{O}(\mathbb{R})) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Réciproquement, soit $\Omega \in \mathscr{O}(\mathbb{R})$. Alors
$$\Omega = \bigcup_{\substack{]\alpha,\beta[\subset \Omega \\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}}}]\alpha, \beta[\in \sigma(\{]\alpha, \beta[\mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}),$$
donc $\mathscr{O}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\{]\alpha, \beta[\mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\})$, donc $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{O}(\mathbb{R})) = \sigma(\{]\alpha, \beta[\mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\})$.
• *Deuxième égalité.* Comme $]-\infty, a[\subset \mathscr{O}(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{Q}$, on a $\sigma(\{]-\infty, a[\mid a \in \mathbb{Q}\}) \subset \sigma(\mathscr{O}(\mathbb{R})) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Réciproquement, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. On a
$$]\alpha, \beta[=]-\infty, \beta[\setminus]-\infty, \alpha] =]-\infty, \beta[\setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\infty, \alpha + \frac{1}{n}\right[\subset \sigma(\{]-\infty, a[\mid a \in \mathbb{Q}\}),$$
donc $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]\alpha, \beta[\mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}) \subset \sigma(\{]-\infty, a[\mid a \in \mathbb{Q}\})$. D'où l'égalité. □

Proposition 1.6 *(boréliens de $\mathbb{R}^d$).* On a
$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{]a_1, b_1[\times \cdots \times]\alpha_d, \beta_d[\mid \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_d, \beta_d \in \mathbb{Q}\}).$$

Proposition 1.7. Si $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$, alors $B + a \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve Soit $a \in \mathbb{R}^d$. On montre que la classe de parties $\mathscr{A} \coloneqq \{B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \mid B + a \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)\}$ contient $\mathscr{O}(\mathbb{R}^d)$ et que c'est une tribu sur $\mathbb{R}^d$ ce qui permet de conclure que $\mathscr{A} \supset \sigma(\mathscr{O}(\mathbb{R}^d)) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. □

Boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$. On introduit deux éléments $-\infty$ et $+\infty$, puis on étend l'ordre totale et posant $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On munit $\overline{\mathbb{R}}$ de la topologie engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$, les ensembles $[-\infty, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et les ensembles $]a, +\infty]$ avec $a \in \mathbb{R}$. On a alors $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{[-\infty, a[\mid a \in \mathbb{Q}\})$.

1.3 Tribu image réciproque, tribu image

1.3.1 Tribu image réciproque

Notation. Si $\mathscr{C}$ est une classe de parties de F, on note
$$f^{-1}(\mathscr{C}) = \left\{f^{-1}(C) \mid C \in \mathscr{C}\right\}.$$

DÉFINITION-PROPOSITION 1.8. Si $\mathscr{B}$ est une tribu sur F, alors $f^{-1}(\mathscr{B})$ est une tribu sur E. On l'appelle *tribu image réciproque*

▷ EXEMPLE. Soient $\mathscr{B}$ une tribu sur E et $A \subset E$. On note $i \colon x \in A \longmapsto x \in E$. Alors $i^{-1}(\mathscr{B})$ est une tribu sur A appelée *tribu trace*.

1.3.2 Tribu image

Soient E et F deux ensembles et $f \colon E \to F$. Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur E, la classe de parties

$$f(\mathscr{A}) \coloneqq \{f(A) \mid A \subset \mathscr{A}\}$$

est-elle une tribu sur F ? Non, il suffit de prendre $E = F = \{0,1\}$ muni de $\mathscr{A} \coloneqq \mathscr{P}(E)$ et $f \colon x \in E \longmapsto 0$. On a alors $f(\mathscr{P}(E)) = \{\emptyset, \{0\}\}$ qui n'est pas une tribu.

PROPOSITION 1.9. Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur E, alors $\{B \subset F \mid f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ est une tribu sur F appelée *tribu image* de $\mathscr{A}$ par f.

1.3.3 Lemme de transport

LEMME 1.10 *(de transport).* Soit $\mathscr{C}$ une classe de parties de F. Alors $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$.

Preuve On a $\mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C})$, donc $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$, donc $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$.

Réciproquement, montrons que $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$, *i. e.* que $f^{-1}(B) \subset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$ pour tout $B \in \sigma(\mathscr{C})$. Or la classe de partie $\mathscr{B} \coloneqq \{B \subset F \mid f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))\}$ est une tribu sur F (la tribu image de $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$ par f). On a clairement $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$, donc $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{B}$ ce qu'on souhaitait démontrer. □

Chapitre 2

Mesures

2.1 Définitions et exemples

Dans cette section, le couple $(E, \mathscr{A})$ désigne un espace mesurable.

Définition 2.1. On appelle *mesure* sur E toute application $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant
- $\mu(\emptyset) = 0$,
- si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux disjoints, alors $\mu(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

On appelle alors $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

▷ Exemples. – L'application $\mu\colon A \in \mathscr{A} \longmapsto 0$ est une mesure sur $(E, \mathscr{A})$ appelée *mesure nulle*.
- La *mesure grossière* sur $(E, \mathscr{A})$ est l'application
$$\mu\colon A \in \mathscr{A} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$
- La *mesure de comptage* sur $(E, \mathscr{P}(E))$ est l'application
$$m\colon A \in \mathscr{A} \longmapsto \begin{cases} \operatorname{Card} A & \text{si } A \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$
- La *mesure de Dirac* sur $(E, \mathscr{A})$ en $x \in E$ est l'application δ_x définie par $\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$ pour tout $A \in \mathscr{A}$.

Définition 2.2. Soit μ une mesure sur $(E, \mathscr{A})$.
- On dit que μ est *finie* si $\mu(E) < +\infty$.
- On dit que μ est une *mesure de probabilité* ou *probabilité* et que $(E, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace probabilisé si $\mu(E) = 1$.
- On dit que μ est σ*-finie*, s'il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\mu(E_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▷ Exemple. La mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ est σ-finie en posant $E_n = [\![0, n]\!]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ Remarques. – Si μ est une mesure sur $(E, \mathscr{A})$ et $B \in \mathscr{A}$, alors l'application
$$\nu\colon \left| \begin{array}{l} \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ A \longmapsto \mu(A \cap B) \end{array} \right.$$
est encore une mesure sur $(E, \mathscr{A})$.
- Si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de mesure sur $(E, \mathscr{A})$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ est encore une mesure sur $(E, \mathscr{A})$. En particulier, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$ est une mesure.

En particulier, soit X une variable aléatoire discrète dont les valeurs sont les x_n avec $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n \coloneqq \mathbb{P}(X = x_n)$. Alors la loi $\mathbb{P}_X$ de X s'écrit $\mathbb{P}_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$.

2.2 Propriétés des mesures

Dans toute la suite, le triplet $(E, \mathscr{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

Proposition 2.3 *(croissance)*. Soient $A, B \in \mathscr{A}$ tel que $A \subset B$ Alors $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. De plus, si $\mu(A) < +\infty$, alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Preuve On a $\mu(B) = \mu(A \sqcup B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geqslant \mu(A)$. Si $\mu(A) < +\infty$, alors $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A)$. □

Proposition 2.4 *(σ-sous-additivité)*. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathscr{A}$, alors
$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Preuve On définit la suite de parties $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$B_0 = A_0, \quad \text{et} \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

(i) la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathscr{A}$,

(ii) les parties B_n sont deux à deux disjointes,

(iii) on a $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Montrons (ii). Par l'absurde, supposons qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$ et $B_n \cap B_m \neq \emptyset$. Soit $x \in B_n \cap B_m$. Alors $x \in A_m$ et $x \notin A_n$, donc $x \notin B_n$ ce qui est absurde

Montrons (iii) par double inclusion. L'inclusion directe est claire. Réciproquement, si $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, alors $x \in B_m$ où $m \coloneqq \min\{n \mid x \in A_n\}$.

Finalement, on a

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

car $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Proposition 2.5 *(continuité).* 1. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{A}$, alors

$$\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

On dit alors que μ est continue à gauche.

2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de $\mathscr{A}$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, alors

$$\mu\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

On dit alors que μ est continue à droite.

Preuve 1. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) = +\infty$, alors $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = +\infty$ et $\mu(A_n) = +\infty$ à partir d'un certain rang, d'où l'égalité. On suppose que $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère la même suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que dans la preuve précédente, *i. e.* telle que $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} [\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})] + \mu(A_0) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

□

2. On peut supposer que $n_0 = 0$ quitte à considérer la suite $(A_{n_0+n})_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(A_0 \setminus A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de A. Par continuité à gauche, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_0 \setminus A_n) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_0 \setminus A_n\Big) = \mu\Big(A_0 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu(A_0) - \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$$

car $\mu(A_0) < +\infty$, donc $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

◇ Remarque. La seconde hypothèse du point 2 est nécessaire. En effet, sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), m)$, un contre-exemple est la suite $(A_n \coloneqq [\![n, +\infty[\![)_{n\in\mathbb{N}}$ car $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\emptyset) = 0$ et $m(A_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Mesure de Lebesgue

But. On veut généraliser la longueur ℓ des intervalles de $\mathbb{R}$, *i. e.* pour tout intervalle I,

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{si } I \text{ est un intervalle d'extrémité } a, b \in \mathbb{R}, \\ +\infty & \text{si } I \text{ est un intervalle non bornée.} \end{cases}$$

Également, on veut généraliser le volume des pavés dans $\mathbb{R}^d$ (les ensembles $\prod_{k=1}^d I_k$ où les I_k sont des intervalles de $\mathbb{R}$), *i. e.* pour tout pavé P,

$$\mathscr{V}(P) = \prod_{k=1}^{d} \ell(I_k) \quad \text{avec} \quad P = \prod_{k=1}^{d} I_k$$

avec la convention $\mathscr{V}(P) = 0$ s'il existe $k \in [\![1, d]\!]$ tel que $\ell(I_k) = 0$.

Théorème 2.6. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique mesure λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que
- $\lambda_d([0,1]^d) = 1$,
- λ_d est invariante par translation, *i. e.* si $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$, alors $\lambda_d(B+a) = \lambda_d(B)$.

Quand $d = 1$, on note cette mesure λ.

Preuve On l'admet pour l'instant. La mesure de Lebesgue sera construite pour $d = 1$ dans la section 5.1.2. □

Proposition 2.7. Si P est un pavé de $\mathbb{R}^d$, alors $\lambda_d(P) = \mathscr{V}(P)$. En particulier, si $x \in \mathbb{R}^d$, alors $\lambda_d(\{x\}) = 0$.

◇ Remarque. Si D est une partie dénombrable de $\mathbb{R}^d$, alors $\lambda_d(D) = 0$. La réciproque est fausse : un contre-exemple est l'exemple de Cantor définit comme suit. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$K_0 = [0,1] \quad \text{et} \quad K_{n+1} = \frac{K_n}{3} \cup \frac{K_n + 2}{3}.$$

L'ensemble de Cantor est l'ensemble $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Alors $\lambda(K) = 0$ et l'ensemble K n'est pas dénombrable : on peut montrer qu'il est en bijection avec $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$.

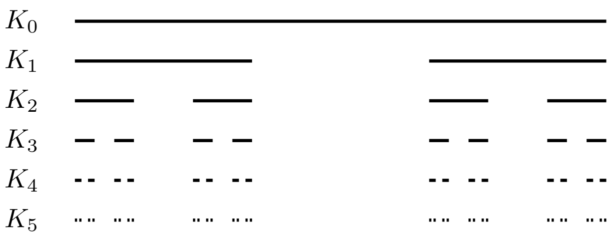

Figure 2.1 – Les premiers ensembles de la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Lemme 2.8. Si $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe un ouvert Ω et un fermé F tels que
- $F \subset B \subset \Omega$,
- $\lambda_d(\Omega \setminus F) < \varepsilon$.

Théorème 2.9 *(régularité de la mesure de Lebesgue).* Si $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\lambda_d(B) = \inf\{\lambda_d(\Omega) \mid \Omega \supset B,\ \Omega \text{ ouvert}\} = \sup\{\lambda_d(K) \mid K \subset B,\ K \text{ compact}\}.$$

2.4 Ensembles négligeables

Définition 2.10. Soit $N \subset E$. On dit que N est *μ-négligeable* s'il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$. On dit qu'une propriété (P) sur E est vraie *μ-presque partout* si l'ensemble

$$\{x \in E \mid x \text{ ne vérifie pas (P)}\}$$

est μ-négligeable.

▷ Exemples. 1. L'indicatrice $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est nulle λ-presque partout.
2. L'indicatrice $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ est continue λ-presque partout.
3. La suite $(\mathbb{1}_{[0,1/n]})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction nulle λ-presque partout.

Définition 2.11. On dit que $(E, \mathscr{A}, \mu)$ est *complet* si $\{N \subset E \mid N \text{ est } \mu\text{-négligeable}\} \subset \mathscr{A}$.

Chapitre 3

Fonctions mesurables

Dans tous le chapitre, les couples $(E, \mathscr{A})$ et $(F, \mathscr{B})$ désigneront deux espaces mesurables.

3.1 Mesurabilité

Définition 3.1. On dit que $f\colon E \to F$ est $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-*mesurable* (ou simplement *mesurable*) si $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$, *i. e.*

$$\forall B \in \mathscr{B}, \quad f^{-1}(B) \subset \mathscr{A}.$$

Si E et F sont des espaces topologiques associés à leurs tribus boréliennes, on qualifiera de *boréliennes* les fonctions $(\mathscr{B}(E), \mathscr{B}(F))$-mesurables.

▷ Exemples. – Une fonction constante est mesurable. En effet, soit $f\colon x \in E \longmapsto y_0 \in F$. Si $B \in \mathscr{B}$, alors

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } y_0 \notin B \\ E & \text{si } y_0 \in B \end{cases} \in \mathscr{A}.$$

– Soit $A \subset E$. Alors $\mathbb{1}_A$ est $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{A}$. En effet, si $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, alors

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} E & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \in B, \\ A & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \in B, \\ A^{\mathrm{c}} & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \notin B, \\ \emptyset & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \notin B. \end{cases}$$

◇ Remarques. – Si $\mathscr{A} = \mathscr{P}(E)$, alors toute fonction $f\colon E \to F$ est mesurable. Par exemple, dans $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$, toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable, *i. e.* les suites réelles sont mesurables.

– Très souvent, on aura $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}\}$ et, dans ce cas, il sera implicite que la tribu sur F est $\mathscr{B}(F)$.

Mesure image

Définition 3.2 *(mesure image)*. Soient μ une mesure sur $(E, \mathscr{A})$ et $f\colon E \to F$ une fonction mesurable. Alors

$$\mu_f : \left| \begin{array}{l} \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ B \longmapsto \mu_f(B) := \mu(f^{-1}(B)) \end{array} \right.$$

est une mesure sur $(F, \mathscr{B})$ appelée *mesure image* par f.

◇ Remarque. Si $X\colon (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est une variable aléatoire (*i. e.* une fonction mesurable), alors on appelle loi de X la mesure image de $\mathbb{P}$ par X où $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

3.2 Montrer la mesurabilité

Proposition 3.3. On suppose que $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{C})$ où $\mathscr{C}$ est une classe de parties de E. Alors $f\colon E \to F$ est mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$.

Preuve Le sens direct est évident car $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset f^{-1}(\mathscr{B})$. Réciproquement, si $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$, alors $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) \subset \mathscr{A}$, donc $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \subset \mathscr{A}$ par le lemme de transport, donc $f^{-1}(\mathscr{B}) \in \mathscr{A}$. □

Application. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est monotone, alors elle est borélienne.

◇ Remarque. On suppose que $(F, \mathscr{B}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Pour montrer que $f\colon E \to \mathbb{R}$ est mesurable, il suffit de montrer que $f^{-1}(]-\infty, a[) \subset \mathscr{A}$, noté $\{f < a\}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. Idem sur $\overline{\mathbb{R}}$ avec $[-\infty, a[$.

Continuité et mesurabilité

Soient $(E, \mathscr{T})$ et $(F, \mathscr{S})$ deux espaces topologiques.

PROPOSITION 3.4. Si $f\colon E \to F$ est continue, alors f est borélienne.

Preuve Si Ω est un ouvert de F, alors $f^{-1}(\Omega) \in \mathscr{A} \subset \mathscr{B}(E)$. Donc $f^{-1}(\mathscr{S}) \subset \mathscr{B}(E)$. Comme $\mathscr{B}(F) = \sigma(\mathscr{S})$, la fonction f est mesurable. $\square$

APPLICATION. Donnons une deuxième démonstration du résultat : si $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$, alors $B+a \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. La fonction

$$f\colon \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \\ x \longmapsto x - a \end{array} \right.$$

est continue, donc elle est mesurable, *i. e.* pour tout $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, on a $f^{-1}(B) = B + a \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.

DÉFINITION 3.5. Soient $(E, \mathscr{A})$ un espace topologique et $f\colon E \to \mathbb{R}$. On dit que f est *semi-continue inférieurement* (resp. *supérieurement*) si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{f \leqslant a\}$ (resp. $\{f \geqslant a\}$) est fermé.

PROPOSITION 3.6. Si $f\colon E \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement ou supérieurement, alors f est borélienne.

Preuve Si f est semi-continue inférieurement, alors $\{f \leqslant a\}$ est fermé pour tout $a \in \mathbb{R}$, donc $\{f \leqslant a\} \in \mathscr{B}(E)$, donc f est mesurable car $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\})$. $\square$

3.3 PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS MESURABLES

PROPOSITION 3.7. Soient $(E, \mathscr{A})$, $(F, \mathscr{B})$ et $(G, \mathscr{C})$ trois espaces mesurables, $f\colon E \to F$ mesurable et $g\colon F \to G$ mesurables. Alors $g \circ f$ est mesurable.

Preuve Si $C \in \mathscr{C}$, alors $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathscr{A}$ car $g^{-1}(C) \in \mathscr{B}$. Donc $g \circ f$ est mesurable. $\square$

▷ EXEMPLE. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable, alors $|f|$ est aussi mesurable car $|\ |$ est continue, donc mesurable.

LEMME 3.8. Soit $f\colon (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$. On note f_1 et f_2 sont composantes. Alors f est mesurables si et seulement si f_1 et f_2 sont mesurables.

Preuve On suppose que f est mesurable. Pour $i \in \{1, 2\}$, en notant $\pi_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la projection sur la i-ième coordonnée, on a $f_i = \pi_i \circ f$ où f est mesurable et π_i est continue, donc f_i est mesurable.

Réciproquement, on suppose que f_1 et f_2 sont mesurables. Si I_1 et I_2 sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(I_1 \times I_2) = f_1^{-1}(I_1) \cap f_2^{-1}(I_2) \in \mathscr{A}$ car f_1 et f_2 sont mesurables. Comme $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{I_1 \times I_2 \mid I_1, I_2 \text{ intervalles}\})$, la fonction f est mesurable. $\square$

PROPOSITION 3.9. Soient $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. On a

1. pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha f + g$ est mesurable ;
2. la fonction fg est mesurable.

Preuve 1. On écrit $\alpha f + g = \phi \circ \psi$ où les fonctions

$$\psi\colon x \in E \longmapsto (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \phi\colon x \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha x + y \in \mathbb{R}$$

sont mesurables, donc la fonction $\alpha f + g$ est mesurable.
2. Idem avec $\phi\colon (x, y) \longmapsto xy$. $\square$

▷ EXEMPLE. Si $A_1, \dots, A_N \in \mathscr{A}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ est mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On appelle ces fonctions les fonctions étagées.

PROPOSITION 3.10. Si $f\colon E \to \mathbb{C}$ est mesurable, alors f est mesurable si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont. De plus, les points 1 et 2 de la proposition précédente restent vrais (avec $\alpha \in \mathbb{C}$).

3.4 SUITES DE FONCTIONS MESURABLES À VALEURS RÉELLES

RAPPEL. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\overline{\mathbb{R}}$, alors on note

$$\varliminf_{n \to +\infty} x_n \coloneqq \lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geqslant n} x_k \quad \text{et} \quad \varlimsup_{n \to +\infty} x_n \coloneqq \lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geqslant n} x_k$$

resp. les *limites inférieure* et *supérieure* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut montrer que $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$. S'il y a égalité, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$. La réciproque est également vraie.

Proposition 3.11. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ mesurables.

1. Alors les fonctions

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \\ x \longmapsto \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \\ x \longmapsto \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \end{array}\right.$$

sont mesurables. De même pour les limites inférieure et supérieure.

2. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f\colon E \to \mathbb{R}$, alors f est mesurable.

Preuve 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme les ensembles $\{f_n < a\}$ sont dans la tribu, on a

$$\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n < a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n < a\} \in \mathscr{A}.$$

Donc la fonction $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est mesurable. Par ailleurs, on a

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leqslant a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \leqslant a\} \in \mathscr{A}.$$

Donc la fonction $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est mesurable.

On a $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$ avec $g_n \coloneqq \inf_{k\geqslant n} f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, les fonctions g_n sont mesurables, donc leur borne supérieure $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n$ l'est. De la même manière, la fonction $\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} f_n$ est mesurable.

2. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, alors la fonction f vaut $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n$ qui est mesurable. □.

3.5 Approximation des fonctions étagées à valeurs réelles

Définition 3.12. Une fonction $f\colon E \to F$ est appelée *fonction étagée* si elle est mesurable et elle ne passe que par un nombre fini de valeurs.

◇ Remarque. Si f est étagée et $x_1, \ldots, x_n$ sont ses valeurs distinctes, alors elle s'écrit

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_n \mathbb{1}_{\{f=x_i\}}.$$

Les fonctions étagées sont exactement les fonctions de la forme $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ où les parties A_i sont des éléments de la tribu $\mathscr{A}$.

Proposition 3.13. Soit $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable positive. Alors il existe une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f. De plus, si f est bornée, alors la convergence est uniforme.

Preuve Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{k/2^n \leqslant f \leqslant (k+1)/2^n\}} + n\mathbb{1}_{\{f\geqslant n\}}.$$

Alors les fonctions f_n sont étagées positives car, comme f est mesurable, les ensembles $\{k/2^n \leqslant f \leqslant (k+1)/2^n\}$ sont dans la tribu. Soit $x \in E$. Si $f(x) = +\infty$, alors $f_n(x) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $f_n(x) \to +\infty = f(x)$ quand $n \to +\infty$. On suppose que $f(x) < +\infty$. Pour n assez grand, *i. e.* pour $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $f(x) < n$, il existe $k \in [\![0, n2^n - 1]\!]$ tel que

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n} = \frac{1}{2^n},$$

donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$. Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. Montrons que cette suite est croissante. Soit $x \in E$.

– Si $f(x) \geqslant n+1$, alors $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.
– Si $f(x) < n$, alors $f(x) \in \{k/2^n, (k+1)/2^{n+1}\}$, donc $f_{n+1}(x) \geqslant k/2^n = f_n(x)$.
– Si $n \leqslant f(x) < n+1$, alors $f_{n+1}(x) = k/2^{n+1} \geqslant n$.

On suppose que f est bornée. Soit $N \geqslant \|f\|_\infty$. Pour tous $n \geqslant N$ et $x \in E$, on a $|f(x) - f_n(x)| \leqslant 1/2^n$, donc $\|f - f_n\|_\infty \leqslant 1/2^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. □

◇ Remarque. Dans le cas où la fonction f est mesurable de signe quelconque, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge simplement vers f. Si f est bornée, alors la convergence est uniforme.

Chapitre 4

INTÉGRALE DE LEBESGUE

4.1 INTÉGRATION DE FONCTIONS

4.1.1 Intégration des fonctions étagées positives

RAPPEL. Les fonctions étagées sont exactement les fonctions $\varphi \colon E \to \mathbb{R}$ de la forme

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ et $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}$ tels que $E = \bigsqcup_{i=1}^{N} A_i$. Dans la suite, on supposera toujours que l'écriture ci-dessus implique que les parties A_i forment une partition de E.

NOTATION. On note $\mathscr{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}_+$.

DÉFINITION 4.1. Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \in \mathscr{E}_+$. On définit l'*intégrale* de φ par rapport à la mesure μ comme

$$\int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu \coloneqq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i)$$

avec la convention : si $\mu(A_i) = +\infty$ et $\alpha_i = 0$, alors $\alpha_i \mu(A_i) = 0$.

◇ REMARQUES. – La définition ne dépend pas de l'écriture $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ où $E = \bigsqcup_{i=1}^{N} A_i$. En effet, si on note $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{\{\varphi = \alpha_i\}}$ où les α_i sont distincts et $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \mathbb{1}_{B_i}$ où $E = \bigsqcup_{i=1}^{N} B_i$, alors

$$\sum_{j=1}^{N} \beta_j \mu(B_j) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\beta_j = \alpha_i} \beta_j \mu(B_j) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu\Big(\bigsqcup_{\beta_j = \alpha_i} B_j \Big) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(\{\varphi = \alpha_i\}).$$

– Si $\varphi \in \mathscr{E}_+$, alors $\int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu \geqslant 0$.

NOTATION. On note indifféremment

$$\int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu, \quad \int \varphi \, \mathrm{d}\mu, \quad \int_E \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu(x), \quad \int_E \varphi(x) \mu(\mathrm{d}x).$$

▷ EXEMPLES. – • *Mesure de* DIRAC. Soient $x \in E$ et $\varphi \in \mathscr{E}_+$. Notons δ_x la mesure de DIRAC associée à x sur l'espace $(E, \mathscr{A})$. Alors

$$\int_E \varphi \, \mathrm{d}\delta_x = \varphi(x).$$

En effet, on suppose que $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{\{\varphi = \alpha_i\}}$ où les α_i sont distincts. Alors

$$\int_E \varphi \, \mathrm{d}\delta_x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_x(\{\varphi = \alpha_i\}) = \alpha_{i_0} \qquad \text{avec} \qquad \alpha_{i_0} = \varphi(x).$$

– • *Mesure de comptage.* Soit $\varphi \in \mathscr{E}_+$. Notons m la mesure de comptage sur l'espace $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Alors

$$\int_{\mathbb{N}} \varphi \, \mathrm{d}m = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n).$$

En effet, si $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{\{\varphi = \alpha_i\}}$ où les α_i sont distincts, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\varphi(n) = \alpha_i} \varphi(n) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i m(\{\varphi = a_i\}) = \int_{\mathbb{N}} \varphi \, \mathrm{d}m.$$

PROPOSITION 4.2. 1. Si $\varphi, \psi \in \mathscr{E}_+$ et $\alpha \geqslant 0$, alors $\alpha\varphi + \psi \in \mathscr{E}_+$ et
$$\int (\alpha\varphi + \psi)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int \varphi\,\mathrm{d}\mu + \int \psi\,\mathrm{d}\mu.$$
2. Si $\varphi, \psi \in \mathscr{E}_+$ vérifient $\varphi \leqslant \psi$, alors
$$\int \varphi\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int \psi\,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve 1. On note $\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{\{\varphi=\alpha_i\}}$ et $\psi = \sum_{j=1}^M \beta_j \mathbb{1}_{\{\psi=\beta_j\}}$, alors
$$\alpha\varphi + \psi = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\alpha\alpha_i + \beta_j)\mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \in \mathscr{E}_+ \quad \text{et} \quad E = \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{j=1}^M (A_i \cap B_j).$$
On a
$$\begin{aligned}\int (\alpha\varphi + \psi)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\alpha\alpha_i + \beta_j)\mu(A_i \cap B_j)\\ &= \alpha \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^M \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^M \beta_j \sum_{i=1}^M \mu(A_i \cap B_j)\\ &= \alpha \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu\Big(\bigsqcup_{j=1}^N A_i \cap B_j\Big) + \sum_{j=1}^M \beta_j \mu\Big(\bigsqcup_{i=1}^M A_i \cap B_j\Big)\\ &= \alpha \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^M \beta_j \mu(B_j)\\ &= \alpha \int \varphi\,\mathrm{d}\mu + \int \psi\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$
2. On a $\psi = \varphi + (\psi - \varphi)$ où les fonctions φ et $\psi - \varphi$ sont dans $\mathscr{E}_+$. D'après le point 1, on a
$$\int \psi\,\mathrm{d}\mu = \int \varphi\,\mathrm{d}\mu + \int (\psi - \varphi)\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int \varphi\,\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

NOTATION. Pour $\varphi \in \mathscr{E}_+$ et $A \in \mathscr{A}$, on note
$$\int_A \varphi\,\mathrm{d}\mu := \int_E \varphi \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu.$$
On a bien $\varphi\mathbb{1}_A \in \mathscr{E}_+$ car, si $\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, alors $\varphi\mathbb{1}_A = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap A}$.

LEMME 4.3. Soient $\varphi \in \mathscr{E}_+$ et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de $\mathscr{A}$ telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Alors
$$\int_{E_n} \varphi\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_E \varphi\,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve On note $\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$. Alors
$$\int_{E_n} \varphi\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [A_i \cap E_n]\Big) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i) = \int_E \varphi\,\mathrm{d}\mu$$
car les suites $(\mu(A_i \cap E_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$. $\square$

4.1.2 Intégration des fonctions mesurables positives

NOTATION. On note $\mathscr{M}_+$ l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

DÉFINITION 4.4. Soit $f \in \mathscr{M}_+$. On définit son intégrale par rapport à la mesure μ comme
$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_E \varphi\,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; \varphi \in \mathscr{E}_+, \varphi \leqslant f\right\}.$$

◇ REMARQUES. – Par croissance de l'intégrale des fonctions de $\mathscr{E}_+$, la définition précédente n'est pas ambiguë.
– Si $f \in \mathscr{M}_+$, alors $\int f\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0$.
– Si $f, g \in \mathscr{M}_+$ vérifient $f \leqslant g$, alors $\int f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int g\,\mathrm{d}\mu$.

NOTATION. Pour $\varphi \in \mathscr{E}_+$ et $A \in \mathscr{A}$, on a $f\mathbb{1}_A \in \mathscr{M}_+$ et on note

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \coloneqq \int_A f\mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu.$$

▷ EXEMPLES. – • *Mesure de DIRAC.* Soient $x \in E$ et $f \in \mathscr{M}_+$. On montrera plus tard que

$$\int_E f \, \mathrm{d}\delta_x = f(x).$$

– • *Mesure de comptage.* Soient m la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ et $f \in \mathscr{M}_+$. Alors

$$\int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}m = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n).$$

4.2 Théorème de Beppo Levi et conséquences

4.2.1 Théorème et conséquences

THÉORÈME 4.5 *(Beppo LEVI).* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $\mathscr{M}_+$. Alors

$$\int_E \lim_{n\to+\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Preuve Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(\int f_n \, \mathrm{d}\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc elle admet une limite et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{avec} \quad f \coloneqq \lim_{n\to+\infty} f_n,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f \, \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

Montrons l'autre inégalité. Soit $\varphi \in \mathscr{E}_+$ telle que $\varphi \leqslant f$. Soit $\alpha \in \,]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $E_n = \{f_n \geqslant \alpha\varphi\} \in \mathscr{A}$. La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ car, si $x \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x) > \alpha\varphi(x)$. Par le lemme précédent, on a alors

$$\int_{E_n} \alpha\varphi \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_E \alpha\varphi \, \mathrm{d}\mu.$$

Comme $\alpha\varphi\mathbb{1}_{E_n} \leqslant f_n$, la croissance de l'intégrale donne

$$\int_{E_n} \alpha\varphi \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu, \quad \text{donc} \quad \alpha \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu \leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Ceci est vrai pour tout $\alpha \in \,]0,1[$. En laissant tendre α vers 1, on obtient

$$\int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu \leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

On passe à la borne supérieure sur les fonctions $\varphi \in \mathscr{E}_+$ vérifiant $\varphi \leqslant f$ et on obtient

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) montrent l'égalité voulue. ☐

◇ REMARQUE. Le résultat est faux pour les suites décroissantes. Par exemple, si $f_n = \mathbb{1}_{[n,+\infty[}$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}\lambda = \lambda([n,+\infty[) = +\infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} 0 \, \mathrm{d}\lambda = 0.$$

PROPOSITION 4.6. Soient $f, g \in \mathscr{M}_+$ et $\alpha \geqslant 0$. Alors

$$\int_E (\alpha f + g) \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \, \mathrm{d}\mu + \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

Preuve On sait qu'il existe deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissantes de $\mathscr{E}_+$ qui convergent simplement respectivement vers f et g. Comme la suite $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante de $\mathscr{E}_+$, le théorème de Beppo LEVI donne

$$\alpha \int f_n \, \mathrm{d}\mu + \int g_n \, \mathrm{d}\mu = \int (\alpha f_n + g_n) \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int (\alpha f + g) \, \mathrm{d}\mu$$

et

$$\alpha \int f_n \, \mathrm{d}\mu + \int g_n \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow \alpha \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu.$$

D'où l'égalité. ☐

APPLICATION. • *Mesure de* DIRAC. Soient $x \in E$ et $f \in \mathscr{M}_+$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de $\mathscr{E}_+$ qui converge simplement vers f. D'après le théorème de Beppo LEVI, on a

$$f_n(x) = \int f_n \,\mathrm{d}\delta_x \longrightarrow \int f \,\mathrm{d}\delta_x.$$

Or $f_n(x) \to f(x)$, donc $\int f \,\mathrm{d}\delta_x = f(x)$.

◇ REMARQUE. Si $f, g \in \mathscr{M}_+$ vérifient $f \leqslant g$ et $\int f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, alors

$$\int (g - f) \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

PROPOSITION 4.7. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{M}_+$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathscr{M}_+$ et

$$\int_E \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve La fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ étant une limite de fonctions mesurables positives, elle est elle-même mesurable positive. De plus, la suite $(\sum_{n=0}^{N} f_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc on peut appliquer le théorème de Beppo LEVI, *i. e.*

$$\sum_{n=0}^{N} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \sum_{n=0}^{N} f_n \,\mathrm{d}\mu \longrightarrow \int \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Or

$$\sum_{n=0}^{N} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

□

PROPOSITION 4.8 *(mesure à densité)*. Soit $g \in \mathscr{M}_+$. Pour $A \in \mathscr{A}$, on pose

$$\nu(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\mu.$$

Alors ν est une mesure sur $(E, \mathscr{A})$, appelée la mesure à densité g par rapport à μ. Par ailleurs, si $f \in \mathscr{M}_+$, alors

$$\int_E f \,\mathrm{d}\nu = \int_E fg \,\mathrm{d}\mu.$$

▷ EXEMPLE. Cette notion a déjà été utilisée en probabilité. Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on dit que X suit la loi normale $\mathscr{N}(\mu, \sigma)$ si sa loi $\mathbb{P}_X$ est la mesure à densité

$$x \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

i. e. pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\lambda(x).$$

4.2.2 Inégalité de MARKOV et conséquences

LEMME 4.9 *(inégalité de MARKOV)*. Soient $f \in \mathscr{M}_+$ et $a > 0$. Alors

$$\mu(\{f \geqslant a\}) \leqslant \frac{1}{a} \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve On a $a\mathbb{1}_{\{f \geqslant a\}} \leqslant f$. Par croissance, on a

$$a\mu(\{f \geqslant a\}) = a \int \mathbb{1}_{\{f\geqslant a\}} \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

D'où l'inégalité. □

COROLLAIRE 4.10. Si $f \in \mathscr{M}_+$ vérifie $\int f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, alors $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

Preuve Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mu(\{f = +\infty\}) \leqslant \mu(\{f \geqslant n\}) \leqslant \frac{1}{n} \int f \,\mathrm{d}\mu \longrightarrow 0,$$

donc $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$. □

PROPOSITION 4.11. 1. Si $f \in \mathscr{M}_+$, alors $\int f \,\mathrm{d}\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-presque partout.
2. Si $f, g \in \mathscr{M}_+$ vérifie $f = g$ μ-presque partout, alors $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$.

◇ REMARQUE. Si $f \in \mathscr{M}_+$ et $A \in \mathscr{A}$ vérifie $\mu(A) = 0$, alors $\int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

4.2.3 Lemme de FATOU

LEMME 4.12 *(FATOU)*. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}_+$. Alors

$$\int_E \varliminf_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve Comme la suite $(\inf_{k\geqslant n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{M}_+$, le théorème de Beppo LEVI donne

$$\int \varliminf_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} f_k \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int \inf_{k\geqslant n} f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

Soit $m \geqslant n$. On a $\inf_{k\geqslant n} f_n \leqslant f_m$. Par croissance de l'intégrale, on a

$$\int \inf_{k\geqslant n} f_k \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int f_m \,\mathrm{d}\mu.$$

En passant à l'infimum pour $m \geqslant n$, on obtient que

$$\int \inf_{k\geqslant n} f_k \,\mathrm{d}\mu \leqslant \inf_{m\geqslant n} \int f_m \,\mathrm{d}\mu.$$

D'où le lemme. □

APPLICATION. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathscr{M}_+$ telle que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu < +\infty$$

et qui converge simplement vers une fonction f, alors $\int f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. En effet, par le lemme de FATOU, on a

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int \varliminf_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

◇ REMARQUE. – Il est essentiel que les fonctions soient positives. Un contre-exemple est le suivant. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n := \mathbb{1}_{[0,1]} - \mathbb{1}_{[n,n+1]}$. On verra que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \varliminf_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]} \,\mathrm{d}\lambda = \lambda([0,1]) = 1,$$

mais on a

$$\varliminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

– Les inégalités avec la limite supérieure ne sont pas vraies dans le cas général. En revanche, le résultat suivant est vrai.

LEMME 4.13. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}_+$ telle qu'il existe $g \in \mathscr{M}_+$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \leqslant g \qquad \text{et} \qquad \int g \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Alors

$$\int_E \varlimsup_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve On applique le lemme de FATOU à la suite $(g - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on obtient

$$\int \varliminf_{n\to+\infty} (g - f_n) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \int (g - f_n) \,\mathrm{d}\mu.$$

Or

$$\int \varliminf_{n\to+\infty} (g - f_n) = \int (g - \varlimsup_{n\to+\infty} f_n) \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu - \varlimsup_{n\to+\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

et

$$\varliminf_{n\to+\infty} \int (g - f_n) \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu - \varlimsup_{n\to+\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

D'où l'inégalité. □

4.3 Fonctions intégrables

4.3.1 L'espace $\mathscr{L}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$

Dans la suite, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Attention, le corps n'est pas le corps « rouc ».

DÉFINITION 4.14. On dit qu'une fonction $f\colon (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{K}, \mathscr{B}(\mathbb{K}))$ est *μ-intégrable* si elle est μ-mesurable et

$$\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

On note $\mathscr{L}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$ (ou $\mathscr{L}^1(E, \mu)$ ou encore $\mathscr{L}^1(E)$) l'ensemble des fonctions μ-mesurables de E dans $\mathbb{K}$. On étend cette définition aux fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou dans un sous-ensemble de $\mathbb{K}$.

NOTATION. Si $f\colon (E, \mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est mesurable, on note

$$f^+ := \max(f, 0) = f\mathbb{1}_{\{f \geqslant 0\}} \quad \text{et} \quad f^- := -\min(f, 0) = -f\mathbb{1}_{\{f \leqslant 0\}}.$$

On remarque que ce sont des fonctions positives telles que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$. Alors la fonction f est mesurable si et seulement si les fonctions f^+ et f^- le sont.

PROPOSITION 4.15. Soit $f\colon (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{K}, \mathscr{B}(\mathbb{K}))$.
1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors f est intégrable si et seulement si f^+ et f^- sont intégrables.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors f est intégrable si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont intégrables.

Preuve 1. D'après la remarque précédente, on sait déjà que f est mesurable si et seulement si f^+ et f^- le sont. D'autre part, on a $f^+ \leqslant |f| = f^+ + f^-$ et $f^- \leqslant |f| = f^+ + f^-$, donc

$$\int f^{\pm} \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int |f| \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int f^- \,\mathrm{d}\mu.$$

donc $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ si et seulement si $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ et $\int f^- \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.
2. L'équivalence est vraie pour la mesurabilité. On a $|\operatorname{Re} f| \leqslant |f| \leqslant |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$ et $|\operatorname{Im} f| \leqslant |f| \leqslant |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$. De même, on établit l'équivalence. ☐

DÉFINITION 4.16. Soit $f\colon (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{K}, \mathscr{B}(\mathbb{K}))$ une fonction μ-intégrable. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on pose

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu := \int_E f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_E f^- \,\mathrm{d}\mu.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on pose

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu := \int_E \operatorname{Re} f \,\mathrm{d}\mu + i \int_E \operatorname{Im} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Si $A \in \mathscr{A}$, alors $f\mathbb{1}_A \in \mathscr{L}^1(E)$ et on pose

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int_E f\mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu.$$

PROPOSITION 4.17. Soient $f, g\colon E \to \mathbb{K}$ mesurables tels que $f = g$ μ-presque partout. Alors $f \in \mathscr{L}^1(E)$ si et seulement si $g \in \mathscr{L}^1(E)$. Dans ce cas, on a $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$.

Preuve On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On a $\{f^+ \neq g^+\} \subset \{f \neq g\}$ et $\{f^- \neq g^-\} \subset \{f \neq g\}$, donc $f^+ = g^+$ et $f^- = g^-$ μ-presque partout, donc $f^+, f^- \in \mathscr{L}^1(E)$ si et seulement si $g^+, g^- \in \mathscr{L}^1(E)$. Dans ce cas, on a

$$\int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu = \int g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int g^- \,\mathrm{d}\mu, \quad \text{donc} \quad \int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu.$$

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On a $\{\operatorname{Re} f \neq \operatorname{Re} g\} \subset \{f \neq g\}$ et $\{\operatorname{Im} f f \neq \operatorname{Im} g\} \subset \{f \neq g\}$, donc $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} g$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ μ-presque partout, donc $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathscr{L}^1(E)$ si et seulement si $\operatorname{Re} g, \operatorname{Im} g \in \mathscr{L}^1(E)$. ☐

4.3.2 Propriétés de l'intégrale

PROPOSITION 4.18 *(linéarité)*. Soient $f, g \in \mathscr{L}^1(E)$. Alors
1. on a $f + g \in \mathscr{L}^1(E)$ et

$$\int (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu \;;$$

2. pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a $\alpha f \in \mathscr{L}^1(E)$ et
$$\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve 1. On a
$$\int |f+g| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int |f| \,\mathrm{d}\mu + \int |g| \,\mathrm{d}\mu < +\infty,$$
donc $f+g \in \mathscr{L}^1(E)$. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On a $f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, donc
$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+,$$
donc
$$\int (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu + \int f^- \,\mathrm{d}\mu + \int g^- \,\mathrm{d}\mu = \int (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu + \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int g^+ \,\mathrm{d}\mu,$$
En réarrangeant les termes, on obtient l'égalité. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On a
$$\begin{aligned}\int (f+g) \,\mathrm{d}\mu &= \int (\operatorname{Re} f + \operatorname{Re} g) \,\mathrm{d}\mu + i \int (\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int \operatorname{Re} f \,\mathrm{d}\mu + \int \operatorname{Re} g \,\mathrm{d}\mu + i \int \operatorname{Im} f \,\mathrm{d}\mu + i \int \operatorname{Im} g \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On a
$$\int |\alpha f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int |a|\,|f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant |\alpha| \int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty,$$
donc $\alpha f \in \mathscr{L}^1(E)$. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $a \geqslant 0$, alors
$$\begin{aligned}\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \int (\alpha f)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (\alpha f)^- \,\mathrm{d}\mu &= \int \alpha f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int \alpha f^- \,\mathrm{d}\mu \\ &= \alpha \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \alpha \int f^- \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$
Si $a < 0$, alors
$$\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \int (\alpha f)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (\alpha f)^- \,\mathrm{d}\mu = \int -\alpha f^- \,\mathrm{d}\mu - \int -\alpha f^+ \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu.$$
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on utilise la linéarité dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. □

Corollaire 4.19 *(relation de Chasles).* Soient $f \in \mathscr{L}^1(E)$ et $A, B \in \mathscr{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors
$$\int_{A \cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve On utilise la linéarité et le fait que $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$. □

Corollaire 4.20 *(croissance).* Soient $f, g \in \mathscr{L}^1(E)$ tels que $f \leqslant g$ sur E. Alors
$$\int f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int g \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve La fonction $g - f$ est mesurable et positive, donc $\int (g-f) \,\mathrm{d}\mu \geqslant 0$, d'où l'inégalité par linéarité. □

◇ Remarque. Le résultat est également vraie si $f \leqslant g$ μ-presque partout.

Proposition 4.21 *(inégalité triangulaire).* Soit $f \in \mathscr{L}^1(E)$. Alors
$$\left| \int f \,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On a
$$\left| \int f \,\mathrm{d}\mu \right| = \left| \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int f^- \,\mathrm{d}\mu = \int |f| \,\mathrm{d}\mu.$$
On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si $\int f \,\mathrm{d}\mu = 0$, l'inégalité est vraie. On suppose ainsi que $\int f \,\mathrm{d}\mu \neq 0$. On a
$$\left| \int f \,\mathrm{d}\mu \right| = \int \alpha f \,\mathrm{d}\mu \quad \text{avec} \quad \alpha := \frac{\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right|}{\int f \,\mathrm{d}\mu}.$$

On remarque que $|\alpha| = 1$. D'après l'inégalité triangulaire pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et comme $\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right|$ est un réel, on a

$$\begin{aligned}\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| &= \int \mathrm{Re}(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu + i \int \mathrm{Im}(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int |\mathrm{Re}(\alpha f)| \,\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int |\alpha f| \,\mathrm{d}\mu = \int |f| \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

□

4.3.3 Formule de transfert

Rappel. Si une fonction $\varphi \colon (E, \mathscr{A}) \to (F, \mathscr{B})$ est mesurable et l'application μ est une mesure sur $(E, \mathscr{A})$, alors

$$\mu_\varphi \colon \left|\begin{array}{l}\mathscr{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \\ B \longmapsto \mu(\varphi^{-1}(B))\end{array}\right.$$

est une mesure appelée mesure image de μ par φ.

Proposition 4.22. Soient $f \colon F \to \mathbb{K}$ mesurable. Alors la fonction f est μ_φ intégrable si et seulement si la fonction $f \circ \varphi$ est μ-intégrable. Dans ce cas, on a

$$\int_F f \,\mathrm{d}\mu_\varphi = \int_E f \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve On adopte la méthode de la *Standard Machine* pour montre cette propriété. On suppose que $f = \mathbb{1}_B$ avec $B \in \mathscr{B}$. Alors

$$\int_E f \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu = \mu(\{\varphi \in B\}) \quad \text{et} \quad \int_F f \,\mathrm{d}\mu_\varphi = \mu_\varphi(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \mu(\{\varphi \in B\}).$$

Par linéarité, c'est vrai pour des fonctions f étagées. On suppose que $f \geqslant 0$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_E f_n \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_F f_n \,\mathrm{d}\mu_\varphi.$$

Comme les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n \circ \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes, le théorème de Beppo Levi donne

$$\int_F f_n \,\mathrm{d}\mu_\varphi \longrightarrow \int_F f \,\mathrm{d}\mu_\varphi \quad \text{et} \quad \int_E f_n \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_E f \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu.$$

D'où l'égalité pour des fonctions f mesurables positives. Par linéarité, on montre que c'est vrai pour des fonctions f mesurables. Enfin, on traire le même dans le cas des fonctions f à valeurs dans $\mathbb{C}$. □

Application au calcul de l'espérance. Soit $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. L'espérance de X vérifie

$$\mathbb{E}(X) \coloneqq \int_\Omega X \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x \,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)$$

en prenant $\varphi = X$ et $f = \mathrm{Id}_\mathbb{R}$.

4.4 Théorème de convergence dominée et applications

4.4.1 Théorème de convergence dominée

Théorème 4.23. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables E dans $\mathbb{K}$ et $f \colon E \to \mathbb{K}$ mesurable telles que

– pour μ-presque tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$;
– il existe $g \colon E \to \mathbb{K}$ intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait μ-presque partout $|f_n| \leqslant g$.

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables et

$$\int_E |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En particulier, on a

$$\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve En notant $\{f_n \to f\} \coloneqq \{x \in E \mid f_n(x) \to f(x)\}$, soit

$$A \coloneqq \{f_n \to f\} \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{|f_n| \leqslant g\} \in \mathscr{A}.$$

Alors

$$\mu(A^{\mathrm{c}}) \leqslant \mu(\{f_n \nrightarrow f\}) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{|f_n| > g\}) = 0.$$

On applique le lemme 4.13 aux fonctions $|f - f_n|\,\mathbb{1}_A \in \mathscr{M}_+$. En effet, on a

$$|f - f_n|\,\mathbb{1}_A \leqslant (|f| + |f_n|)\mathbb{1}_A \leqslant 2g$$

car, si $x \in A$, alors $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ pour tout n et $f_n(x) \to f(x)$, donc $|f(x)| \leqslant g(x)$. Comme $2g \in \mathscr{L}^1(E)$, on a

$$0 = \int_E \varlimsup_{n\to+\infty} |f - f_n|\,\mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu \geqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \int_E |f - f_n|\,\mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu,$$

ce qui donne

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \int_A |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \int_A |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leqslant 0.$$

Ainsi, les limites supérieures et inférieures sont égales, donc la limite en nulle. Comme A^{c} est un ensemble négligeable, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_A |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0. \qquad \square$$

COROLLAIRE 4.24. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{K}$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E |f_n| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Alors la fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est définie μ-presque partout, intégrable et

$$\int_E \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve Par le théorème de Beppo LEVI, on a

$$\int_E \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu < +\infty,$$

donc la fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ est finie μ-presque partout, donc la série $\sum f_n(x)$ converge absolument pour μ-presque tout $x \in E$. On définit donc la fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ μ-presque partout. Soit $A \coloneqq \{\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n| < +\infty\} \in \mathscr{A}$. On pose $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = 0$ pour $x \notin A$. Alors la fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est mesurable et même intégrable car

$$\int_E \Big|\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

On applique le théorème de convergence dominée à la suite $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge μ-presque partout vers la fonction $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ et dont chaque terme est dominé par $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^n \int_E f_k \,\mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{k=0}^n f_k \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_E \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k \,\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

◇ REMARQUE. Lorsqu'une fonction est définie μ-presque partout et égale à une fonction intégrable μ-presque partout, on s'autorisera à parler de son intégrale.

4.4.2 Intégrales dépendant d'un paramètre

(i) Limite et continuité sous l'intégrale

Soient (Y, d) un espace métrique et $f \colon E \times Y \to \mathbb{K}$. On s'intéresse aux propriétés de la fonction

$$F : \left|\begin{array}{l} Y \longrightarrow \mathbb{K}, \\ y \longmapsto \displaystyle\int_E f(x,y) \,\mathrm{d}\mu(x) \end{array}\right.$$

lorsqu'elle est définie.

THÉORÈME 4.25 *(limite sous l'intégrale).* Soient $\overline{y} \in Y$ et $\ell\colon E \to \mathbb{K}$ mesurable. On suppose que
(i) pour tout $y \in Y$, la fonction $x \longmapsto f(x,y)$ est mesurable ;
(ii) pour μ-presque tout $x \in E$, on a $f(x,y) \to \ell(x)$ quand $y \to \overline{y}$;
(iii) il existe $g \in \mathscr{L}^1(E)$ telle que, pour μ-presque tout $x \in E$, on ait $|f(x,y)| \leqslant g(x)$ pour tout $y \in Y$.
Alors $\ell \in \mathscr{L}^1(E)$, la fonction F est bien définie sur tout Y et

$$F(y) = \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow[y\to\overline{y}]{} \int_E \ell(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Preuve Par (i) et (iii), la fonction F est définie sur tout Y. Soient $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Y telle que $y_n \to \overline{y}$. On considère la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\varphi_n\colon \left| \begin{aligned} &E \longrightarrow \mathbb{K}, \\ &x \longmapsto f(x,y_n) \end{aligned} \right.$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par (i), pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction φ_n est mesurable. Par (ii), pour μ-presque tout $x \in E$, on a $\varphi_n(x) \to \ell(x)$. Par (iii), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a μ-presque partout $|\varphi_n| \leqslant g$. Par le théorème de convergence dominée, on a $\ell \in \mathscr{L}^1(E)$ et

$$F(y_n) = \int_E f(x,y_n)\,\mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_E \ell(x)\,\mathrm{d}\mu(x). \qquad \square$$

COROLLAIRE 4.26 *(continuité sous l'intégrale).* En remplaçant l'hypothèse (ii) du théorème précédent par
(ii′) pour μ-presque tout $x \in E$, la fonction $y \longmapsto f(x,y)$ est continue en $\overline{y}$.
Alors la fonction F est définie sur Y et continue en $\overline{y}$.

Preuve Idem que celle du théorème avec $\ell\colon x \longmapsto f(x,\overline{y})$. $\square$

(ii) Dérivation sous l'intégrale

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f\colon E \times I \to \mathbb{R}$. On pose toujours

$$F\colon \left| \begin{aligned} &I \longrightarrow \mathbb{K}, \\ &y \longmapsto \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \end{aligned} \right.$$

THÉORÈME 4.27 *(dérivation sous l'intégrale).* On suppose que
(i) pour tout $y \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,y)$ est intégrable ;
(ii) pour μ-presque tout $x \in E$, la fonction $y \longmapsto f(x,y)$ est dérivable sur I, de dérivée notée $y \longmapsto \partial_y f(x,y)$;
(iii) il existe $g \in \mathscr{L}^1(E)$ telle que, pour μ-presque tout $x \in E$, on ait $|\partial_y f(x,y)| \leqslant g(x)$ pour tout $y \in I$.
Alors la fonction F est dérivable sur I et, pour tout $y \in I$, on a

$$F'(y) = \int_E \partial_y f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Preuve Soient $\overline{y} \in I$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $I \setminus \{\overline{y}\}$ telle que $y_n \to \overline{y}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\varphi_n\colon \left| \begin{aligned} &E \longrightarrow \mathbb{K}, \\ &x \longmapsto \frac{f(x,y_n) - f(x,\overline{y})}{y_n - \overline{y}}. \end{aligned} \right.$$

Par (i), les fonctions φ_n sont mesurables. Par (ii), pour μ-presque tout $x \in E$, on a $\varphi_n(x) \to \partial_y f(x,\overline{y})$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour μ-presque tout $x \in E$, le théorème des accroissements finis puis (iii) donnent

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \left| \frac{f(x,y_n) - f(x,\overline{y})}{y_n - \overline{y}} \right| \leqslant \sup_{y\in[y_n,\overline{y}]} |\partial_y f(x,y)| \leqslant g$$

Le théorème de convergence dominée affirme alors

$$\frac{F(y_n) - F(\overline{y})}{y_n - \overline{y}} = \int_E \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_E \partial_y f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Ceci est vrai pour tout $\overline{y} \in I$, donc la fonction F est dérivable en $\overline{y}$ et cette dernière limite permet de conclure. $\square$

◇ REMARQUE. Si on remplace « dérivable » par « de classe C^1 » dans (ii), on obtient que la fonction F est de classe C^1 sur I. En effet, il suffit d'appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale à $\int_E \partial_y f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$.

4.5 Lien entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue

4.5.1 Intégrale de Riemann

Définition 4.28. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est en *escalier* si elle est de la forme

$$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{I_i}$$

où les ensembles I_1, ..., I_n sont des intervalles de $[a, b]$. On note Esc l'ensemble des fonctions en escalier. Avec ces mêmes notations, on note alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \coloneqq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \ell(I_i).$$

où la notation $\ell(I)$ désigne la longueur d'un intervalle I.

◇ Remarque. Toute fonction en escalier est une fonction étagée. La réciproque est fausse.

Définition 4.29. Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée. On pose

$$I_-(f) \coloneqq \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \;\middle|\; \varphi \in \mathrm{Esc}, \varphi \leqslant f \right\} \quad \text{et} \quad I_+(f) \coloneqq \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \;\middle|\; \varphi \in \mathrm{Esc}, \varphi \geqslant f \right\}.$$

Lorsque ces deux quantités sont égales, on dit que la fonction f est Riemann-intégrable.

▷ Exemple. L'indicatrice $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas Riemann-intégrable car $I_-(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}) = 0$ et $I_+(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}) = 1$.

Théorème 4.30. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions Riemann-intégrable qui converge uniformément vers une fonction f. Alors la fonction f est Riemann-intégrable et

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Définition 4.31. On dit qu'une fonction $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée est réglée si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

◇ Remarque. Par le dernier théorème, toute fonction réglée est Riemann-intégrable. On peut montrer qu'une fonction f est réglée si et seulement si elle admet en tout point une limite à gauche et une limite à droite et que, si f est réglée, alors elle admet un nombre dénombrable de discontinuité.

▷ Exemple. Les fonctions continues, continues par morceaux et monotones sont réglées. On peut montrer le théorème suivant.

Théorème 4.32 *(critère de Lebesgue)*. Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée. Alors la fonction f est Riemann-intégrable si et seulement si elle est continue λ-presque partout.

4.5.2 Comparaison entre les deux intégrales

Théorème 4.33. Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable. Alors il existe $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ intégrable telle que

$$f = g \quad \lambda\text{-presque partout} \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} g\,\mathrm{d}\lambda.$$

Preuve Par définition, il existe deux suites $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telles que $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^b \psi_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On peut supposer la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante quitte à remplacer φ_n par $\max(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$. De même, on peut supposer la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. On pose alors $g \coloneqq \lim_{n\to+\infty} \varphi_n$. Elle est mesurable comme limite de fonctions mesurables. La suite $(\varphi_n - \varphi_0)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{M}_+$. Le théorème de Beppo Levi donne

$$\int_{[a,b]} (\varphi_n - \varphi_0)\,\mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[a,b]} (g - \varphi_0)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Or comme les fonctions φ_n sont en escaliers, on a

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} \varphi_n\,\mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[a,b]} g\,\mathrm{d}\lambda.$$

D'où

$$\int_{[a,b]} g\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad g \leqslant f.$$

De même, en notant note $h := \lim_{n\to+\infty} \psi_n$, on a

$$\int_{[a,b]} h\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad f \leqslant h.$$

La fonction $h - g$ est positive et d'intégrale nulle, donc $g = h$ λ-presque partout. Comme $\{f \neq g\} \subset \{g \neq h\}$, on en déduit l'égalité $f = g$ λ-presque partout. ☐

◇ REMARQUE. Dans la suite, lorsque f est RIEMANN-intégrable et mesurable, on écrira indifféremment

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda \quad \text{et} \quad \int_a^b f\,\mathrm{d}\lambda.$$

On peut montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4.34. Si une fonction $f\colon\,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ est mesurable, localement RIEMANN-intégrable et d'intégrale de RIEMANN absolument convergente, alors

$$f \in \mathscr{L}^1_\lambda([a,b]) \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve On applique le théorème de convergence dominée à la suite $f\mathbb{1}_{[a_n,b_n]}$ où les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement décroissante et croissante et tendent respectivement vers a et b. ☐

Chapitre 5

Construction de mesures, unicité

5.1 Construction de mesures

Problématique. Par exemple, on peut facilement construire la mesure de Lebesgue sur les intervalles de $\mathbb{R}$: on associe un intervalle I à sa longueur, notée $\ell(I)$. On souhaite prolonger ça aux boréliens de $\mathbb{R}$.

5.1.1 Mesures extérieures

Dans toute la sous-section, la lettre E désignera un ensemble quelconque.

Définition 5.1. On appelle *mesure extérieure* sur E toute application $\mu^*\colon \mathscr{P}(E) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant
- $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, alors $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$,
- si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathscr{P}(E)$, alors $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$.

◇ Remarque. Toute mesure sur $(E, \mathscr{P}(E))$ est en particulier une mesure extérieure.

Définition 5.2. Soit μ^* un mesure extérieure sur E. On dit qu'une partie A de E est μ^**-mesurable* si, pour toute partie B de E, on a $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$. On note $\mathscr{M}_{\mu^*}$ l'ensemble des parties μ^*-mesurables.

Proposition 5.3. Soit μ^* est mesure extérieure sur E. Alors
1. la classe de parties $\mathscr{M}_{\mu^*}$ est une tribu sur E ;
2. la mesure extérieure μ^* définit une mesure sur l'espace mesurable $(E, \mathscr{M}_{\mu^*})$.

Preuve 1. On a bien $\emptyset \in \mathscr{M}_{\mu^*}$. Si $A \in \mathscr{M}_{\mu^*}$, alors

$$\forall B \subset E, \quad \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B \setminus A^{\mathrm{c}}) + \mu^*(B \cap A^{\mathrm{c}}),$$

donc $A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{M}_{\mu^*}$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}_{\mu^*}$. Il suffit de montrer que

$$\forall B \subset E, \quad \mu^*(B) \geqslant \mu^*\Big(B \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) + \mu^*\Big(B \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

Soit $B \subset E$. Par récurrence, on montre que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\mu^*(B) &= \sum_{n=0}^{N} \mu^*\Big(B \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \cap A_n\Big) + \mu^*\Big(B \setminus \bigcup_{n=0}^{N} A_n\Big) \\
&\geqslant \sum_{n=0}^{N} \mu^*\Big(B \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \cap A_n\Big) + \mu^*\Big(B \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).
\end{aligned}$$

En laissant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mu^*(B) &\geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*\Big(B \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \cap A_n\Big) + \mu^*\Big(B \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \\
&\geqslant \mu^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \cap A_n\Big) + \mu^*\Big(B \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \\
&\geqslant \mu^*\Big(B \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) + \mu^*\Big(B \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'union des A_n est dans $\mathscr{M}_{\mu^*}$. Donc $\mathscr{M}_{\mu^*}$ est bien une tribu sur E.

2. On a bien $\mu^*(\emptyset)=0$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{M}_{\mu^*}$ deux à deux disjoints. Montrons que

$$\mu^*\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a

$$\mu^*\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \geqslant \mu^*\Big(\bigsqcup_{n=0}^{N} A_n\Big) = \mu^*(A_N) + \mu^*\Big(\bigsqcup_{n=0}^{N-1} A_n\Big) = \cdots = \sum_{n=0}^{N} \mu^*(A_n).$$

En laissant tendre N vers $+\infty$, on obtient bien l'inégalité voulue. □

5.1.2 Mesure de Lebesgue

On traite le cas $d=1$. On note $\mathscr{I}$ l'ensemble des intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$. Pour $A\subset\mathbb{R}$, on introduit

$$\lambda^*(A) \coloneqq \inf\Big\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) \ \Big|\ A\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,\ (I_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{I}^{\mathbb{N}}\Big\}.$$

Proposition 5.4. L'application λ^* ainsi définie est une mesure extérieure sur $(\mathbb{R},\mathscr{P}(\mathbb{R}))$.

Preuve Comme $\emptyset\subset I$ pour tout $I\in\mathscr{I}$, on a $\lambda^*(\emptyset)=\emptyset$. Soient $A,B\subset\mathbb{R}$ telles que $A\subset B$. Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathscr{I}$ vérifiant $B\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, alors $A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Donc $\lambda^*(B)\geqslant\lambda^*(A)$. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$. Montrons que

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_k).$$

Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe une suite $(I_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{I}$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n^k) \leqslant \lambda^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \quad\text{et}\quad A_k\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n^k.$$

On a donc

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n^k \quad\text{et}\quad \lambda^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n^k) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_k)+\varepsilon.$$

En laissant tendre ε vers 0, on obtient bien l'inégalité voulue. Donc λ^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$. □

Proposition 5.5. 1. On a $\lambda^*([0,1])=1$.
2. La mesure extérieure λ^* est invariante par translation.

Preuve 1. Montrons l'égalité par double inégalité. Pour $\varepsilon>0$, on a $[0,1]\subset\,]-\varepsilon,1+\varepsilon[$, donc $\lambda^*([0,1])\leqslant 1+2\varepsilon$ et, en laissant tendre ε vers 0^+, on obtient que $\lambda^*([0,1])\leqslant 1$.

Montrons l'autre inégalité. Soient $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux suites telles que $[0,1]\subset\bigcup_{i\in\mathbb{N}}]a_i,b_i[$. Par la propriété de Borel-Lebesgue, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $[0,1]\subset\bigcup_{i=0}^{n}]a_i,b_i[$. Soit $i_1\in\mathbb{N}$ tel que $0\in\,]a_{i_1},b_{i_1}[$. Si $b_{i_1}\in[0,1]$, il existe $i_2\in\mathbb{N}$ tel que $b_{i_2}\in\,]a_{i_1},b_{i_1}[$. On répète ensuite l'opération pour créer des entiers i_k vérifiant $b_{i_{k+1}}\in\,]a_{i_k},b_{i_k}[$ jusqu'à obtenir $b_{i_N}>1$. On a alors

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i-a_i) \geqslant \sum_{k=1}^{N}(b_{i_k}-a_{i_k}) \geqslant \sum_{k=2}^{N}(b_{i_k}-b_{i_{k-1}}) + b_{i_1}-a_{i_1} = b_{i_N}-a_{i_1}\geqslant 1.$$

En passant à la borne inférieure, on obtient que $\lambda^*([0,1])\geqslant 1$.
2. Soient $A\subset\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A) &= \inf\Big\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) \ \Big|\ A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,\ (I_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{I}^{\mathbb{N}}\Big\} \\
&= \inf\Big\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(J_n-x) \ \Big|\ A+x\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,\ (I_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{I}^{\mathbb{N}}\Big\} \\
&= \inf\Big\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(J_n) \ \Big|\ A+x\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,\ (I_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{I}^{\mathbb{N}}\Big\} = \lambda^*(A+x).
\end{aligned}$$
□

Proposition 5.6. Les boréliens de $\mathbb{R}$ sont λ^*-mesurables.

Preuve Il suffit de montrer que $]-\infty, a]$ est λ^*-mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$. Soit $I \coloneqq\,]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Il suffit de montrer que, pour toute $B \subset \mathbb{R}$, on a $\lambda^*(B) \geqslant \lambda^*(B \cap I) + \lambda^*(B \setminus I)$. Soit $B \subset \mathbb{R}$. Si une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{I}$ vérifie $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, alors

$$B \cap I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \cap I \quad \text{et} \quad B \setminus I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \setminus I,$$

donc

$$\lambda^*(B \cap I) + \lambda^*(B \setminus I) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n \cap I) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n \setminus I) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n).$$

En passant à la borne inférieure sur les recouvrements $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B, on obtient l'inégalité. D'où la proposition. □

◇ Remarque. On vient de montrer que l'application λ^* est une mesure sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant
(i) $\lambda^*([0,1]) = 1$,
(ii) λ^* est invariante par translation

ce qui montre l'existence de la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Sur $\mathbb{R}^d$, on définit de même la mesure extérieure de Lebesgue d-dimensionnelle par

$$\lambda_d^*(A) \coloneqq \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}(P_n) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n,\, (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{P}^{\mathbb{N}} \right\}$$

où $\mathscr{P}$ est l'ensemble des pavés ouverts bornées de $\mathbb{R}^d$. De même que précédemment, on montre que λ_d^* est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que
(i) $\lambda_d^*([0,1]^d) = 1$,
(ii) λ_d^* est invariante par translation

On retrouve alors la propriété de régularité 2.9 de la mesure de Lebesgue : pour tout $A \in \mathscr{M}_{\lambda_d^*}$, on a

$$\lambda_d^*(A) = \inf \{\lambda_d(\Omega) \mid \Omega \supset A,\, \Omega \text{ ouvert}\} \quad \text{et}$$
$$\lambda_d^*(A) = \sup \{\lambda_d(K) \mid K \subset A,\, K \text{ compact}\}.$$

5.2 Unicité des mesures

Problématique. Soit $(E, \mathscr{A})$ un espace mesure dont la tribu $\mathscr{A}$ est engendrée par une classe de parties $\mathscr{C}$. Si deux applications μ et ν sont deux mesures sur $(E, \mathscr{A})$ telles que $\mu = \nu$ sur $\mathscr{C}$, a-t-on $\mu = \nu$? En général non ! Par exemple, on prend $E \coloneqq \{0,1\}$ et $\mathscr{A} \coloneqq \mathscr{P}(E) = \sigma(\{0\})$. On prend deux mesures μ et ν vérifiant

A	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\mu(A)$	0	0	0	0
$\nu(A)$	0	0	1	1

5.2.1 Lemme des classes monotones

Définition 5.7. On appelle *classe monotone* sur E toute classe de parties $\mathscr{M}$ de E telle que
- $E \in \mathscr{M}$,
- si A et B sont des éléments de $\mathscr{M}$ tels que $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathscr{M}$
- si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{M}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{M}$.

◇ Remarques. 1. Une tribu sur E est une classe monotone. La réciproque est fausse.
2. Une intersections quelconques de classes monotones est encore une classe monotone. Pour tout $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(E)$, il existe une plus petite classe monotone $m(\mathscr{C})$ contenant $\mathscr{C}$. Elle vérifie

$$m(\mathscr{C}) = \bigcap_{\substack{\mathscr{M} \text{ classe monotone de } E \\ \mathscr{C} \subset \mathscr{M}}} \mathscr{M}.$$

Lemme 5.8. Si $\mathscr{M}$ est une classe monotone sur E stable par intersection finie, alors $\mathscr{M}$ est une tribu sur E.

Preuve On a $\emptyset = E \setminus E \in \mathscr{M}$ et, si $A \in \mathscr{M}$, alors $A^c = E \setminus A \in \mathscr{M}$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}$. Alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k^c \Big)^c \in \mathscr{M}.$$ □

LEMME 5.9 *(des classes monotones).* Si $\mathscr{C}$ est une classe de parties de E stable par intersection finie, alors on a $m(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$.

Preuve La tribu $\sigma(\mathscr{C})$ est une classe monotone qui contient $\mathscr{C}$, donc $\sigma(\mathscr{C}) \supset m(\mathscr{C})$. Montrons que $m(\mathscr{C})$ est une tribu ce qui permettra de conclure. Il suffit de montrer que $m(\mathscr{C})$ est stable par intersection finis. Montrons que, si $A \in m(\mathscr{C})$ et $C \in \mathscr{C}$, alors $A \cap C \subset m(\mathscr{C})$. On montre que la classe de parties

$$\mathscr{M}_1 \coloneqq \{A \in m(\mathscr{C}) \mid \forall C \in \mathscr{C}, A \cap C \in m(\mathscr{C})\}$$

est une classe monotone contenant $\mathscr{C}$, donc $\mathscr{M}_1 \supset m(\mathscr{C})$ et même $\mathscr{M}_1 = m(\mathscr{C})$. Montrons que, si $A, B \in m(\mathscr{C})$, alors $A \cap B \in m(\mathscr{C})$. De même, on montre que la classe de parties

$$\mathscr{M}_2 \coloneqq \{A \in m(\mathscr{C}) \mid \forall B \in m(\mathscr{C}), A \cap B \in m(\mathscr{C})\}$$

est une classe monotone contenant $\mathscr{C}$ par ce dernier point et on conclut identiquement que $\mathscr{M}_2 = m(\mathscr{C})$. On a montré que $m(\mathscr{C})$ est stable par intersection finie. D'où le résultat. ☐

5.2.2 Théorème d'unicité des mesures

THÉORÈME 5.10. Soient μ et ν deux mesures sur $(E, \mathscr{A})$ qui coïncident sur une classe de parties $\mathscr{C}$ telle que
- $\mathscr{C}$ stable par intersection finie,
- $E \in \mathscr{C}$,
- $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C})$.

Alors
1. si μ et ν sont finies, alors $\mu = \nu$ sur $\mathscr{A}$;
2. s'il existe une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{C}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(E_n) = \nu(E_n) < +\infty \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E,$$

alors $\mu = \nu$ sur $\mathscr{A}$.

Preuve 1. On suppose que μ et ν sont finies. On considère la classe de parties

$$\mathscr{M} \coloneqq \{A \in \mathscr{A} \mid \mu(A) = \nu(A)\}.$$

Montrons que $\mathscr{M}$ est une classe monotone sur E. On a $E \in \mathscr{M}$ car $\mu(E) = \nu(E)$. Si $A, B \in \mathscr{M}$ sont telles que $A \subset B$, alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A)$ car les mesures sont finies, donc $B \setminus A \in \mathscr{M}$. Enfin, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{M}$, alors la continuité donne

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \nu(A_n) = \nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big),$$

donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{M}$. Comme $\mathscr{M}$ est une classe monotone contenant $\mathscr{C}$, on a $\mathscr{M} \supset m(\mathscr{C})$. Par le lemme des classes monotones, on obtient que $m(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$, donc $\mathscr{M} \supset \mathscr{A}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathscr{A}$, on pose

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n) \quad \text{et} \quad \nu_n(A) = \nu(A \cap E_n).$$

Alors les applications μ_n et ν_n définissent des mesures finis sur $(E, \mathscr{A})$ et elles coïncident sur $\mathscr{C}$, *i. e.* pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathscr{C}$, on a $\mu(C \cap E_n) = \nu(C \cap E_n)$. Finalement, si $A \in \mathscr{A}$, on a

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap E_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A \cap E_n) = \lim_{n\to+\infty} \nu(A \cap A_n) = \nu(A).$$ ☐

5.2.3 Unicité de la mesure de LEBESGUE

RAPPEL. Si μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, invariante par translation et telle que $\mu([0,1]) = 1$, alors $\mu(I) = \ell(I)$ pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 5.11 *(unicité).* Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ invariante par translation telle que

$$\lambda([0,1]) = 1.$$

Preuve D'après le rappel, si λ et λ' sont deux telles mesures sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, alors $\lambda = \lambda'$ sur $\mathscr{C} \coloneqq \mathscr{I}$. Or $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie et on a $\mathbb{R} \in \mathscr{C}$. De plus, en posant $E_n = [-n, n] \in \mathscr{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \quad \text{et} \quad \lambda(E_n) = 2n < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par le théorème d'unicité, on a $\lambda = \lambda'$ sur $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ ce qui montre l'unicité de la mesure de LEBESGUE. ☐

◇ REMARQUE. On montre de la même façon l'unicité de la mesure de LEBESGUE d-dimensionnelle λ_d sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ en considérant $\mathscr{C} := \{P \subset \mathbb{R}^d \mid P \text{ pavé}\}$.

5.3 Tribu complétée, mesure complétée

5.3.1 Définition

NOTATION. Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. On note $\mathscr{N}_\mu$ l'ensemble des parties de E qui sont μ-négligeables. Si $\mathscr{N}_\mu \subset A$, on dit que $(E, \mathscr{A}, \mu)$ est complet.

DÉFINITION 5.12. On appelle *tribu complétée* de $\mathscr{A}$ la classe de parties

$$\overline{\mathscr{A}} := \{B \cup N \mid B \in \mathscr{A}, N \in \mathscr{N}_\mu\}.$$

C'est une tribu sur E.

Preuve On a $\emptyset \in \overline{\mathscr{A}}$. Si $B \cup N \in \overline{\mathscr{A}}$, alors $(B \cup N)^c = (B^c \setminus A) \cup (A \setminus N \cap B^c) \subset \overline{\mathscr{A}}$ avec $A \in \mathscr{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = \emptyset$. Enfin, si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{N}_\mu$, alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [B_n \cup N_n] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \in \overline{\mathscr{A}}.$$

Ce qui montre que $\overline{\mathscr{A}}$ est une tribu sur E. □

DÉFINITION-PROPOSITION 5.13. Pour $B \cup N \in \overline{\mathscr{A}}$, on pose

$$\overline{\mu}(B \cup N) := \mu(B).$$

Alors l'application $\overline{\mu}$ est une mesure sur $(E, \overline{\mathscr{A}})$.

Preuve Montrons que la définition est cohérente. Si $B \cup N = B' \cup N'$, alors on peut écrire $B \subset B \cup N \subset B \cup A$ et $B' \subset B' \cup N' \subset B' \cup A'$ avec $\mu(A) = \mu(A') = 0$, donc $\mu(B) \leqslant \mu(B' \cup A') \leqslant \mu(B')$ et de même $\mu(B') \leqslant \mu(B)$, d'où $\mu(B) = \mu(B')$. On montre ensuite que c'est bien une mesure. □

PROPOSITION 5.14. L'espace mesuré $(E, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ est complet.

Preuve Il faut montrer que $\mathscr{N}_{\overline{\mu}} \subset \overline{\mathscr{A}}$. Si $N \in \mathscr{N}_{\overline{\mu}}$, alors $N \subset B \cup N'$ avec $\overline{\mu}(B \cup N') = 0$ où $B \in \mathscr{A}$ et $N \in \mathscr{N}_\mu$, donc $N \subset B \cup A'$ avec $\mu(A') = 0$, donc $B \in \mathscr{N}_\mu \subset \overline{\mathscr{A}}$. □

5.3.2 Complétion de $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$

DÉFINITION 5.15. On appelle *tribu de* LEBESGUE sur $\mathbb{R}^d$ la tribu complétée de $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ et on la note

$$\mathscr{L}(\mathbb{R}^d) := \overline{\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)}.$$

On définit aussi $\overline{\lambda_d}$ la mesure complétée de λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{L}(\mathbb{R}^d))$. Généralement, on la note toujours λ_d.

PROPOSITION 5.16. 1. On a $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d) = \mathscr{M}_{\lambda_d^*}$.
2. La mesure $\overline{\lambda_d}$ coïncide avec λ_d^* sur $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve 1. Montrons que $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{M}_{\lambda_d^*}$. Comme $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{M}_{\lambda_d^*}$, il suffit de montrer que $\mathscr{N}_{\lambda_d} \subset \mathscr{M}_{\lambda_d^*}$. Soit $N \in \mathscr{N}_{\lambda_d}$. Il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que $N \subset A$ et $\lambda_d(A) = 0$. Soit $B \subset \mathbb{R}^d$. Montrons que $\lambda_d^*(B) = \lambda_d^*(B \cap N) + \lambda_d^*(B \setminus N)$. Il suffit de montrer l'inégalité $\geqslant$. On a $\lambda_d^*(B \cap N) \leqslant \lambda_d^*(N) \leqslant \lambda_d(A) = 0$, donc l'inégalité est vraie.

Réciproquement, montrons que $\mathscr{M}_{\lambda_d^*} \subset \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$. Soit $A \in \mathscr{M}_{\lambda_d^*}$. Par régularité de la mesure de LEBESGUE, il existe $B, C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ tels que $B \subset A \subset C$ et $\lambda_d(C \setminus B) = 0$. On a alors $A = B \cup (A \setminus B) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$.
2. Soit $B \cup N \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$. On note $A \in \mathscr{N}_\lambda$ tel que $N \subset A$. Alors $\overline{\lambda_d}(B \cup N) = \lambda_d(B) = \lambda_d^*(B)$. Or

$$\lambda_d^*(B) \leqslant \lambda_d^*(B \cup N) \leqslant \lambda_d^*(B \cup A) = \lambda_d^*(B).$$

On en déduit que

$$\lambda_d^*(B \cup N) = \lambda_d^*(B) = \lambda_d(B) = \overline{\lambda_d}(B \cup N).$$ □

PROPOSITION 5.17. On a $\operatorname{Card} \mathscr{L}(\mathbb{R}) = \operatorname{Card} \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Preuve On note K l'ensemble de CANTOR. On a montré en TD que $K \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(K) = 0$ et $\operatorname{Card} K = \operatorname{Card} \mathbb{R}$. On a donc $\operatorname{Card} \mathscr{P}(\mathbb{R}) = \operatorname{Card} \mathscr{P}(K) \leqslant \operatorname{Card} \mathscr{N}_\lambda \leqslant \operatorname{Card} \mathscr{L}(\mathbb{R})$ car $\mathscr{P}(K) \subset \mathscr{N}_\lambda$ et $\mathbb{N}_\lambda \subset \mathscr{L}(\mathbb{R})$. L'autre inégalité est clairement vraie car $\mathscr{L}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$. D'où l'égalité □

Chapitre 6

Mesure produit

6.1 Tribu produit

6.1.1 Définition

Définition 6.1. Soient $(E, \mathscr{A}, \mu)$ et $(F, \mathscr{B}, \mu)$ deux espaces mesurés. On note

$$\mathscr{A} \times \mathscr{B} := \{A \times B \mid A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}.$$

On appelle *tribu produit* de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ la tribu $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} := \sigma(\mathscr{A} \times \mathscr{B})$ sur $E \times F$.

On étend la définition au cas d'un nombre fini d'espaces mesurables $(E_i, \mathscr{A}_i)$ avec $i \in [\![1, k]\!]$. On note

$$\mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_k = \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_k \mid A_i \in \mathscr{A}_i, \forall i \in [\![1, k]\!]\}).$$

Proposition 6.2. Si $(E, \mathscr{A})$, $(F, \mathscr{B})$ et $(G, \mathscr{C})$ sont trois espaces mesurables, alors

$$\mathscr{A} \otimes (\mathscr{B} \otimes \mathscr{C}) = (\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) \otimes \mathscr{C}$$

qu'on note alors $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \otimes \mathscr{C}$.

Proposition 6.3. On définit les projections

$$\pi_1 : \left| \begin{array}{l} E \times F \longrightarrow E, \\ (x, y) \longmapsto x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \pi_2 : \left| \begin{array}{l} E \times F \longrightarrow E, \\ (x, y) \longmapsto y \end{array} \right.$$

les projections sur E et F. Alors

1. les projections π_1 et π_2 sont respectivement $(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \mathscr{A})$-mesurable et $(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \mathscr{B})$-mesurable ;
2. la tribu $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ est la plus petite tribu telle que π_1 et π_2 soient mesurables, *i. e.* si $\mathscr{X}$ est un tribu sur $E \times F$ telle que les projections π_1 et π_2 soit mesurables, alors $\mathscr{X} \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$

Preuve 1. Soit $A \in \mathscr{A}$. Alors $\pi_1^{-1}(A) = A \times F \in \mathscr{A} \times \mathscr{B} \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Donc π_1 est mesurable. De même pour π_2.
2. Soit $\mathscr{X}$ un tribu comme dans l'énoncé. Soit $A \times B \subset \mathscr{A} \times \mathscr{B}$. Alors

$$A \times B = A \times F \cap E \times B = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) \in \mathscr{X},$$

donc $\mathscr{A} \otimes B \subset \mathscr{X}$. ☐

Proposition 6.4 *(cas des boréliens de $\mathbb{R}^d$).* On a

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \underbrace{\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})}_{d \text{ fois}}.$$

Preuve Si I_1, …, I_d sont des intervalles de $\mathbb{R}$, alors $I_1 \times \cdots \times I_d \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$. D'où

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{I_1 \times \cdots \times I_d \mid I_i \text{ intervalle de } \mathbb{R}\}) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Réciproquement, pour $i \in [\![1, d]\!]$, la projection sur la i-ième composante est continue, donc elle est $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurables. D'où l'inclusion réciproquement. ☐

6.1.2 Sections

Définition 6.5. Soit $C \subset E \times F$. Pour $x \in E$ et $y \in F$, on pose

$$C_x = \{y \in F \mid (x, y) \in C\} \quad \text{et} \quad C^y = \{x \in E \mid (x, y) \in C\}.$$

◇ Remarques. – Pour tout $C \subset E \times F$ et pour tout $(x, y) \in E \times F$, on a $\mathbb{1}_C(x, y) = \mathbb{1}_{C_x}(y) = \mathbb{1}_{C^y}(x)$.
– Pour tout $C := A \times B \subset E \times F$ et $(x, y) \in E \times F$, alors

$$C_x = \begin{cases} B & \text{si } x \in A, \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad C_y = \begin{cases} A & \text{si } y \in B, \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 6.6. Soit $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Alors
1. pour tout $x \in E$, on a $C_x \in \mathscr{B}$;
2. pour tout $y \in F$, on a $C^y \in \mathscr{A}$;

Preuve Soit $x \in E$. On pose
$$\mathscr{X}_x := \{C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \mid C_x \in B\}.$$
Par la remarque précédente, on a $\mathscr{A} \times \mathscr{B} \subset \mathscr{X}_x$. Montrons que $\mathscr{X}_x$ est une tribu sur $E \times F$. On a $\emptyset_x = \emptyset \in \mathscr{B}$, donc $\emptyset \in \mathscr{X}_x$. Si $C \in \mathscr{X}_x$, alors
$$(C^{\mathrm{c}})_x = \{y \in F \mid (x,y) \in C^{\mathrm{c}}\} = \{y \in F \mid (x,y) \in C\}^{\mathrm{c}} = (C_x)^{\mathrm{c}} \in \mathscr{X}_x.$$
Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathscr{X}_x$, alors
$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\Big)_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (C_n)_x \in \mathscr{B}.$$
Finalement, c'est une tribu contenant $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, donc $\mathscr{X}_x = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ ce qui conclut. De même pour le point 2. □

◇ Remarque. Pour tout $C := A \times B \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$ et pour tout $(x,y) \in E \times F$, on a
$$\nu(C_x) = \nu(B)\mathbb{1}_A(x) \quad \text{et} \quad \mu(C^y) = \mu(A)\mathbb{1}_B(y).$$

Proposition 6.7. Soient $(E, \mathscr{A})$, $(F, \mathscr{B})$ et $(G, \mathscr{D})$ trois espaces mesurables et $f\colon E \times F \to G$. On suppose que f est $(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \mathscr{D})$-mesurable. Alors
1. pour tout $x \in E$, la fonction $f_x\colon y \in F \longmapsto f(x,y)$ est $(\mathscr{B}, \mathscr{D})$-mesurable ;
2. pour tout $y \in E$, la fonction $f^y\colon x \in E \longmapsto f(x,y)$ est $(\mathscr{A}, \mathscr{D})$-mesurable.

◇ Remarque. Attention : la réciproque est fausse.

Preuve Pour tout $x \in E$ et pour tout $D \in \mathscr{D}$, la proposition précédente donne $f_x^{-1}(D) = f^{-1}(D)_x \in \mathscr{B}$ car $f^{-1}(D) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$. De même pour le point 2. □

Lemme 6.8. On suppose que μ et ν sont des mesures σ-finies. Alors pour tout $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, les fonctions
$$x \in E \longmapsto \nu(C_x) \quad \text{et} \quad y \in F \longmapsto \mu(C^y)$$
sont mesurables.

Preuve On suppose que μ et ν sont finies. On montre aisément que la classe de parties
$$\mathscr{M} := \{C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \mid x \longmapsto \nu(C_x) \text{ est mesurable}\}$$
est une classe monotone. De plus, elle contient $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$. En effet, pour tous $(A, B) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$ et $x \in E$, on a
$$\nu((A \times B)_x) = \nu(B)\mathbb{1}_A(x),$$
donc la fonction $x \longmapsto \nu((A \times B)_x)$ est mesurable. Alors $\mathscr{M} \supset m(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$. Mais comme $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ est stable par intersection finie, le lemme des classes monotones donne $m(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) = \sigma(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$. Finalement, on montré que
$$\mathscr{M} = \sigma(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}).$$

On suppose que μ et ν sont σ-finies. Alors il existe une suite croissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{B}$ vérifiant $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et $\nu(F_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathscr{B}$, on pose alors
$$\nu_n(B) := \nu(B \cap F_n).$$
Alors pour tout $B \in \mathscr{B}$, on a $\nu(B) = \lim_{n\to+\infty} \nu_n(B)$, donc la fonction $x \longmapsto \nu(C_x)$ est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables. On raisonne de même pour montrer que $x \in E \longmapsto \mu(C^y)$ est mesurable. □

6.2 Mesure produit

Théorème 6.9. Soient $(E, \mathscr{A}, \mu)$ et $(F, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finies. Il existe une unique mesure $\mu \otimes \nu$ sur $(E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ telle que
$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad \forall (A,B) \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}.$$
De plus, la mesure $\mu \otimes \nu$ est σ-finie et, pour tout $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, on a
$$\mu \otimes \nu(C) = \int_E \nu(C_x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_F \mu(C^y) \,\mathrm{d}\nu(y). \tag{6.1}$$

Preuve Pour $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, on pose

$$\mu \otimes \nu(C) := \int_E \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Montrons que l'application $\mu \otimes \nu$ est bien une mesure de $(E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$. On a

$$\mu \otimes \nu(\emptyset) = \int_E \nu(\emptyset_x)\,\mathrm{d}\mu_x = 0.$$

Soient $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ d'éléments deux à deux disjoints. Le théorème de Beppo Levi donne

$$\begin{aligned}
\mu \otimes \nu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\Big) &= \int_E \nu\Big(\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\Big)_x\Big)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \int_E \nu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (C_n)_x\Big)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \int_E \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu((C_n)_x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E \nu((C_n)_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu \otimes \nu(C_n).
\end{aligned}$$

Donc c'est bien une mesure. Montrons qu'elle vérifie (6.1). Pour tous $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{B}$, on a

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \int_E \nu((A \times B)_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_E \nu(B)\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu = \nu(B)\mu(A).$$

Montrons l'unicité. Soit m une autre mesure sur $(E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ vérifiant (6.1). Alors $\mu \otimes \nu$ et m coïncident sur $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ qui est stable par intersection finie et contient $E \times F$. De plus, soient $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites croissantes de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ telle que

$$\begin{cases} E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mu(E_n) < +\infty \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mu(F_n) < +\infty. \end{cases}$$

Alors $(E_n \times F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ vérifiant

$$E \times F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n \times F_n) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \mu \otimes \nu(E_n \times F_n) = \mu(E_n)\nu(F_n) < +\infty.$$

Ainsi le théorème d'unicité des mesures affirme que $m = \mu \otimes \nu$.

Enfin, pour $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, on pose

$$m(C) = \int_F \mu(C^y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Alors m est une mesure sur $(E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ vérifiant (6.1). Par unicité, on a conclut également que $m = \mu \otimes \nu$. □

◇ Remarque. Par le théorème d'unicité, si μ, ν et ξ sont des mesures sur $(E, \mathscr{A})$, $(F, \mathscr{B})$ et $(G, \mathscr{C})$, alors

$$\mu \otimes (\nu \otimes \xi) = (\mu \otimes \nu) \otimes \xi = \mu \otimes \nu \otimes \xi$$

car les mesures coïncident sur $\mathscr{A} \times \mathscr{B} \times \mathscr{C}$.

Proposition 6.10. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Alors $\lambda_d = \lambda^{\otimes d}$.

Preuve Procédons par récurrence sur d. C'est évident pour $d = 1$. Soit $d \geqslant 2$. Supposons que $\lambda_{d-1} = \lambda^{\otimes(d-1)}$. Soit $P := \sum_{k=1}^d I_k$ un pavé de $\mathbb{R}^d$. Alors

$$\lambda^{\otimes d}(P) = \lambda^{\otimes d-1}\Big(\prod_{k=1}^{d-1} I_k\Big)\lambda(I_d) = \prod_{k=1}^{d-1} \lambda(I_k)\lambda(I_d) = \prod_{k=1}^{d} \lambda(I_k) = \lambda_d(P).$$

Les mesures coïncident sur les pavés. Par le théorème d'unicité, on en déduit que $\lambda^{\otimes d} = \lambda_d$. D'où la proposition. □

6.3 Théorèmes de Fubini

Théorème 6.11 *(Fubini-Tonelli).* Soient $(E, \mathscr{A}, \mu)$ et $(F, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et $f : E \times F \to \mathbb{R}_+$ une fonction $(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurables. Alors les fonctions

$$x \longmapsto \int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \qquad \text{et} \qquad y \longmapsto \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

sont mesurables et

$$\int_{E\times F} f \,\mathrm{d}\mu\otimes\nu = \int_E \left(\int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_F \left(\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y). \tag{6.2}$$

Preuve Soit $C \in \mathscr{A}\times\mathscr{B}$. Le résultat pour $f := \mathbb{1}_C$ a déjà été démontré (cf. lemme 6.8). Par linéarité, c'est vrai si $f\in\mathscr{E}_+$. On suppose que $f\in\mathscr{M}_+$. Il existe une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{E}_+$ qui converge simplement vers f. On applique le théorème de Beppo Levi à la suite $((f_n)_x)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x\in E$. On obtient que

$$\forall x\in E,\quad \int_F f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \longrightarrow \int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Donc la fonction

$$x\longmapsto \int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables. De même pour l'autre fonction. On applique maintenant le théorème de Beppo Levi à la suite croissante $(x\longmapsto \int_F f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y))_{n\in\mathbb{N}}$ et on obtient que

$$\int_E\left(\int_F f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\longrightarrow \int_E\left(\int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x).$$

De plus, par ce même théorème, on a

$$\int_E\left(\int_F f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{E\times F} f_n\,\mathrm{d}\mu\otimes\nu \longrightarrow \int_{E\times F} f\,\mathrm{d}\mu\otimes\nu$$

car les fonctions f_n sont en escalier. Ce qui montre le première égalité de l'égalité (6.2). De même pour l'autre. □

◇ Remarque. L'hypothèse σ-finie est cruciale. On considère les espaces mesurés $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $(\mathbb{R},\mathscr{P}(\mathbb{R}),m)$. On pose $C := \{(x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}$. On a

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\underbrace{\mathbb{1}_C(x,y)}_{\mathbb{1}_{\{y\}}(x)}\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}m(y) = \int_{\mathbb{R}}\lambda(\{y\})\,\mathrm{d}m(y) = 0,$$

mais

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_C(x,y)\,\mathrm{d}m(y)\right)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} m(\{y\})\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 1\,\mathrm{d}\lambda(x) = +\infty.$$

Or $\mathbb{1}_C$ est $(\mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{P}(\mathbb{R}),\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable car $C\in\mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R})\subset\mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

▷ Exemple. Soient $(E,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré et $f\colon E\to\mathbb{R}_+$ mesurable. Alors

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}_+}\mu(\{f>t\})\,\mathrm{d}t.$$

Preuve En effet, en justifiant plus tard l'interversion, il vient que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+}\mu(\{f>t\})\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_E \mathbb{1}_{\{f>t\}}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_E\left(\int_{\mathbb{R}_+}\mathbb{1}_{\{f>t\}}(x)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_E\left(\int_{\mathbb{R}_+}\mathbb{1}_{[0,f(x)[}(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_E \lambda([0,f(x)[)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_E f\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Justifions l'interversion. Si $\pi_1\colon\mathbb{R}_+\times E\to\mathbb{R}_+$ et $\pi_2\colon\mathbb{R}_+\times E\to E$ sont les projections sur $\mathbb{R}_+$ et E, la fonction

$$(t,x)\longmapsto \mathbb{1}_{\{f>t\}}(x) = \mathbb{1}_{\{(s,y)\in\mathbb{R}_+\times E\mid f(y)>s\}}(t,x) = \mathbb{1}_{\{f\circ\pi_2-\pi_1>0\}}(t,x)$$

est mesurable puisque les fonctions f, π_1 et π_2 le sont. On peut donc appliquer le théorème de Fubini. □

Théorème 6.12 *(Fubini-Lebesgue).* Soient $(E,\mathscr{A},\mu)$ et $(F,\mathscr{B},\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et $f\colon E\times F\to\mathbb{K}$ une fonction $\mu\otimes\nu$-intégrable. Alors

(i) la fonction f_x est ν-intégrable pour μ-presque tout $x\in E$;

(ii) la fonction f^y est μ-intégrable pour ν-presque tout $y\in E$;

(iii) la fonction $x\longmapsto\int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ est μ-intégrable ;

(iv) la fonction $y \longmapsto \int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est ν-intégrable ;
(v) l'égalité (6.2) est vérifiée.

Preuve On peut appliquer le théorème de FUBINI-TONELLI à la fonction $|f|$ et on obtient que

$$\int_E \left(\int_F |f(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{E\times F} |f|\,\mathrm{d}\mu \otimes \nu < +\infty,$$

donc la fonction $x \longmapsto \int_F |f(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y)$ est fini μ-presque partout ce qui veut dire que la fonction f_x est ν-intégrable pour μ-presque tout $x \in E$. De même, on a montre le point (ii). De plus, on a

$$\int_E \left| \int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right| \mathrm{d}\mu(x) \leqslant \int_E \left(\int_F |f(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) < +\infty,$$

donc la fonction $x \longmapsto \int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ est μ-intégrable. De même, on montre le point (iv). Pour montrer le point (v), si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on écrit $f = f^+ - f^-$, on applique le théorème de FUBINI-TONELLI à f^+ et f^- et on obtient l'égalité (6.2) en soustrayant. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on écrit $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ et on applique le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. □

◇ REMARQUE. On peut avoir

$$\int_E \left(\int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_F \left(\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) < +\infty,$$

sans pour avoir $f \in \mathscr{L}^1_{\mu\otimes\nu}(E)$. Par exemple, on a

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}$$

et, pour cause, la fonction n'est pas λ_2-intégrable, *i. e.*

$$\int_{[0,1]^2} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = +\infty.$$

Chapitre 7
Changement de variable

Rappel. Soient $(E, \mathscr{A})$ et $(F, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables, μ une mesure sur $(E, \mathscr{A})$ et $\varphi \colon E \to F$ mesurable. On note μ_φ la mesure image par φ. Alors la formule de transfert donne, pour $f \colon F \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\int_F f \,\mathrm{d}\mu_\varphi = \int_E f \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu.$$

▷ Exemple. Soient $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ intégrable et $a \in \mathbb{R}^d$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \,\mathrm{d}\lambda_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+a) \,\mathrm{d}\lambda_d(x).$$

En effet, si on note $\varphi \colon x \in \mathbb{R}^d \longmapsto x + a \in \mathbb{R}^d$, alors

$$\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \quad (\lambda_d)_\varphi(B) = \lambda_d(\varphi^{-1}(B)) = \lambda_d(B - a) = \lambda_d(B).$$

7.1 Application C^1-difféomorphe et inversion globale

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi \colon U \to V$. Si φ est différentiable sur U, on appelle jacobienne de φ en un point $x \in U$ la matrice de l'application linéaire $d\varphi_x$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et on la note

$$\mathrm{J}_\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}).$$

Rappels.
- La fonction φ est classe C^1 si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues sur U.
- On dit que φ est un C^1-difféomorphisme si φ est classe C^1, bijective et de réciproque de classe C^1.

On rappel également le théorème d'inversion globale qui découle de sa version locale.

Théorème 7.1 *(d'inversion globale).* Soit $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^d$. Alors φ est un C^1-difféomorphisme si et seulement si
- φ est classe C^1 sur U,
- φ est injective,
- pour tout $x \in U$, on a $\mathrm{J}_\varphi(x) \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$, *i. e.* $\det \mathrm{J}_\varphi(x) \neq 0$.

7.2 Théorème de changement de variables, applications

7.2.1 Cas particulier : changement de variables affine

Lemme 7.2. Soient $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$. On pose $\varphi \colon x \in \mathbb{R}^d \longmapsto Ax + b$. Alors la mesure image de λ_d par φ est le mesure

$$(\lambda_d)_\varphi = \frac{\lambda_d}{|\det A|}.$$

Preuve Pour tout $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$(\lambda_d)_\varphi(B) = \lambda_d(\varphi^{-1}(B)) = \lambda_d(A^{-1}B - A^{-1}b) = \lambda_d(A^{-1}B).$$

Sans perte de généralité, on peut donc supposer $b = 0$. La mesure $(\lambda_d)_\varphi$ est invariante par translation. En effet, pour tous $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$, on a

$$(\lambda_d)_\varphi(B) = \lambda_d(\varphi^{-1}(B + a)) = \lambda_d(A^{-1}B + A^{-1}a) = \lambda_d(A^{-1}B) = (\lambda_d)_\varphi(B).$$

Par unicité de la mesure de Lebesgue, on a

$$\frac{(\lambda_d)_\varphi}{(\lambda_d)_\varphi([0,1])} = \lambda_d.$$

Il existe donc $\gamma > 0$ tel que $(\lambda_d)_\varphi = \gamma \lambda_d$. Montrons que $\gamma = 1/|\det A|$.

• *Cas particuliers.* On suppose que $A \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$. On pose $B \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leqslant 1\}$. Comme $A^{-1}B = B$, on a $(\lambda_d)_\varphi(B) = \lambda_d(B)$, donc $\gamma = 1 = 1/\det A$.

On suppose que $A \in \mathscr{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \geqslant 0$ tels que

$$A = {}^{\mathrm{t}}PDP \quad \text{avec} \quad D \coloneqq \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d).$$

On pose $B \coloneqq {}^{\mathrm{t}}PD[0,1]^d$. Alors

$$(\lambda_d)_\varphi = \lambda_d(A^{-1}B) = \lambda_d({}^{\mathrm{t}}PD^{-1}PB) = \lambda_d(D^{-1}PB) = \lambda_d([0,1]^d) = 1$$

et

$$\lambda_d(B) = \lambda_d({}^{\mathrm{t}}PD[0,1]^d) = \lambda_d(D[0,1]^d) = \prod_{i=1}^d \alpha_i = |\det A|,$$

donc

$$(\lambda_d)_\varphi(B) = \frac{\lambda_d(B)}{|\det A|}.$$

• *Cas général.* Soit $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$. Par décomposition polaire, on sait qu'il existe $P \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = PS$. Soit $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. D'après les cas particuliers, on obtient que

$$(\lambda_d)_\varphi(B) = \lambda_d(A^{-1}B) = \lambda_d(S^{-1}P^{-1}B) = \frac{\lambda_d(P^{-1}B)}{\det S} = \frac{\lambda_d(B)}{\det S}.$$

Or $|\det A| = \det S$, donc $\gamma = 1/|\det A|$ ☐

Corollaire 7.3. Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f(Ax+b)\,|\det A|\,\mathrm{d}x.$$

Preuve On applique la formule de transfert et le lemme précédent. ☐

7.2.2 Théorème

Théorème 7.4. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et φ un C^1-difféomorphisme de U dans V.

1. Si $f\colon V \to \mathbb{R}_+$ est mesurable, alors

$$\int_V f(y)\,\mathrm{d}y = \int_U f\circ\varphi(x)\,|\det \mathrm{J}_\varphi(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{$*$}$$

2. Si $f\colon V \to \mathbb{K}$, alors $f \in \mathscr{L}^1(V)$ si et seulement si $f\circ\varphi\,|\det \mathrm{J}_\varphi| \in \mathscr{L}^1(U)$ et, dans ce cas, on a $(*)$.

◇ Remarques. – En d'autres termes, l'égalité $(*)$ exprime que λ_d est la mesure image par φ de la mesure qui a pour densité $|\det \mathrm{J}_\varphi(\cdot)|$ par rapport à λ_d.

– Si V est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ s'écrivant $V = \varphi(U)$ où $\varphi\colon U \to V$ est un C^1-difféomorphisme, alors

$$\lambda_d(V) = \int_U |\det \mathrm{J}_\varphi(x)|\,\mathrm{d}\lambda_d(x).$$

7.2.3 Passage en coordonnées polaires

On pose

$$\varphi\colon \left|\begin{array}{rcl} U \coloneqq \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[& \longrightarrow & V \coloneqq \mathbb{R}^2 \setminus D, \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}\right.$$

Ici, on a « perdu » la demi-droite $D \coloneqq \mathbb{R}_- \times \{0\}$, mais ce n'est pas très grave car celle-ci est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$. L'application φ est de classe C^1 et c'est une bijection de U dans V. Pour tout $(r,\theta) \in U$, on a

$$|\det \mathrm{J}_\varphi(r,\theta)| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

Finalement, c'est un C^1-difféomorphisme de U dans V. Par la formule de changement de variables puis le théorème de Fubini, si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^2)$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2\setminus D} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}\lambda_2(r,\theta) \end{aligned}$$

$$= \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta.$$

7.2.4 Passage en coordonnées sphériques

On pose

$$\Phi \colon \left| \begin{array}{rcl} U := \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[& \longrightarrow & V := \mathbb{R}^2 \setminus P, \\ (r, \theta, \varphi) & \longmapsto & (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi). \end{array} \right.$$

On a « perdu » le demi-plan $P := \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}_-$. L'application Φ est de classe C^1 et c'est une bijection de U dans V car, pour tout $(r, \theta, \varphi) \in U$, on a

$$\begin{aligned} |\det \mathrm{J}_\Phi(r, \theta, \varphi)| &= \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix} \\ &= \left| -r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta - r^2\sin^3\varphi\sin^2\theta - r^2\cos\varphi(\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta + \sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta) \right| \\ &= \left| -r^2\sin^3\varphi - r^2\cos^2\varphi\sin\varphi \right| = r^2\sin\varphi \neq 0. \end{aligned}$$

Cela montre que Φ est un C^1-difféomorphisme de U dans V. Par la formule du changement de variables et le théorème de Fubini, si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^2)$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f \,\mathrm{d}\lambda_3 &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\lambda_3(r, \theta, \varphi) \\ &= \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Chapitre 8

ESPACES L^p

8.1 DÉFINITIONS

On se place dans un espace mesuré $(E, \mathscr{A}, \mu)$.

8.1.1 Espaces $\mathscr{L}^p(E)$ et $\mathrm{L}^p(E)$

DÉFINITION 8.1. Soit $p \in]0, +\infty[$. On note

$$\mathscr{L}^p(E, \mathscr{A}, \mu) \coloneqq \left\{ f \colon E \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \;\middle|\; \int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

On note également

$$\mathscr{L}^\infty(E, \mathscr{A}, \mu) \coloneqq \{ f \colon E \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \exists C \geqslant 0,\ |f \leqslant C| \ \ \mu\text{-presque partout} \}.$$

On notera souvent $\mathscr{L}^p_\mu(E)$ ou $\mathscr{L}^p(E)$ ces ensembles quand le contexte est clair. Les fonctions de $\mathscr{L}^\infty(E)$ sont appelées les fonctions *essentiellement bornées*. Si m est la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$, on note

$$\ell^p \coloneqq \mathscr{L}^p(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), m).$$

PROPOSITION 8.2. Soit $p \in]0, +\infty]$. L'ensemble $\mathscr{L}^p(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E, \mathbb{K})$.

Preuve On suppose que $p < +\infty$. On a clairement $0 \in \mathscr{L}^p(E)$. Soient $f, g \in \mathscr{L}^p(E)$. On a

$$|f + g|^p \leqslant (|f| + |g|)^p \leqslant (2 \max(|f|, |g|))^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p),$$

donc

$$\int_E |f + g|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant 2^p \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int |g|^p \,\mathrm{d}\mu \right) < +\infty$$

ce qui montre que $f + g \in \mathscr{L}^p(E)$. De même, on montre que $\alpha f \in \mathscr{L}^p(E)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Cela montre que $\mathscr{L}^p(E)$ est un sous-espace vectoriel. De la même façon, on montre que $\mathscr{L}^\infty(E)$ est un sous-espace vectoriel. □

◇ REMARQUE. Soit $p \in]0, +\infty]$. L'ensemble $\{ f \in \mathscr{L}^p(E) \mid f = 0 \ \mu\text{-presque partout}\}$ est un sous-espace vectoriel.

DÉFINITION 8.3. Soit $p \in]0, +\infty]$. On note

$$\mathrm{L}^p(E, \mathscr{A}, \mu) \coloneqq \mathscr{L}^p(E, \mathscr{A}, \mu) / \{ f \in \mathscr{L}^p(E, \mathscr{A}, \mu) \mid f = 0 \ \mu\text{-presque partout}\}.$$

On le notera souvent $\mathrm{L}^p_\mu(E)$ ou $\mathrm{L}^p(E)$.

◇ REMARQUE. De manière équivalente, on peut définir $\mathrm{L}^p(E)$ comme $\mathrm{L}^p(E) = \mathscr{L}^p(E)/\!\sim$ où la relation d'équivalence $\sim$ est définie par $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ μ-presque partout.

À partir de maintenant, on fait l'abus d'identifier un élément de $\mathrm{L}^p(E)$, *i. e.* une classe d'équivalence, à l'un de ses représentants. On s'autorisera à dire que $\overline{f} \in \mathrm{L}^p(E)$ vérifie une propriété (P) si l'un de ses représentants pour la relation $\sim$ la vérifie.

◇ REMARQUES. – L'ensemble $\mathrm{L}^p(E)$ possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des lois définies, pour toutes $f, g \in \mathrm{L}^p(E)$ et tous $\alpha \in \mathbb{K}$, par $\overline{f} + \overline{g} = \overline{f + g}$ et $\alpha \overline{f} = \overline{\alpha f}$.
– En toute généralité, si $p < q$, on a ni $\mathrm{L}^p(E) \subset \mathrm{L}^q(E)$ ni $\mathrm{L}^q(E) \subset \mathrm{L}^p(E)$. Par exemple, on a

$$\left(x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,1]} \right) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \left(x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[1,+\infty[} \right) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$$

PROPOSITION 8.4. Soit $p, q \in]0, +\infty[$ tels que $p < q$.
1. On suppose que $\mu(E) < +\infty$. Alors $\mathrm{L}^q(E) \subset \mathrm{L}^p(E)$.
2. On a $\ell^p \subset \ell^q$.

Preuve 1. Soit $f \in \mathrm{L}^q(E)$. On a

$$\begin{aligned}\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_{\{|f|\leqslant 1\}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{\{|f|>1\}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \mu(E) + \int |f|^q \,\mathrm{d}\mu < +\infty\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire $f \in \mathrm{L}^p(E)$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad |u_n| \leqslant 1.$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^q &= \sum_{n=0}^{N} |u_n|^q + \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n|^q \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n|^q + \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n|^p \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n|^q + \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^q < +\infty.\end{aligned}$$

□

8.1.2 Norme p

NOTATION. Pour $p \in]0, +\infty[$ et $f : E \to \mathbb{K}$ mesurable, on pose

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \inf\{C \geqslant 0 \mid |f| \leqslant C \ \mu\text{-presque partout}\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

◇ REMARQUES. – Soient $f, g : E \to \mathbb{K}$ mesurables. Si $f = g$ μ-presque partout, alors $\|f\|_p = \|g\|_p$ pour tout $p \in]0, +\infty]$. C'est clair pour $p < +\infty$. Si $p = +\infty$, on remarque que $\mu(\{|f| > C\}) = \mu(\{|g| > C\})$ pour $C \geqslant 0$.
– Si $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$, alors $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^d} |f|$.

LEMME 8.5. Soient $f : E \to \mathbb{K}$ mesurable et $p \in]0, \infty[$. Alors $|f| \leqslant \|f\|_p$ μ-presque partout.

Preuve On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mu(\{f > \|f\|_\infty + 1/n\}) = 0$. Or

$$\{|f| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{|f| > \|f\|_\infty + 1/n\},$$

donc la continuité de la mesurable donne

$$\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{|f| > \|f\|_\infty + 1/n\}) = 0.$$

On en déduit que $|f| \leqslant \|f\|_p$ μ-presque partout. □

◇ REMARQUE. Soient $f : E \to \mathbb{K}$ et $p \in]1, \infty]$. Alors $f \in \mathrm{L}^p(E)$ si et seulement si $\|f\|_p < +\infty$.

PROPOSITION 8.6. Soient $p_0 \in]1, \infty[$ et $f \in \mathrm{L}^{p_0}(E)$. Alors $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ quand $p \to +\infty$.

8.2 INÉGALITÉS DE HÖLDER ET MINKOWSKI

8.2.1 Inégalité de HÖLDER

DÉFINITION 8.7. Soient $p, q \in [1, \infty]$. On dit que p et q sont conjugués si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 0$$

avec la convention $1/\infty = 0$.

THÉORÈME 8.8 *(inégalité de HÖLDER).* Soient $f, g \in E \to \mathbb{K}$ mesurables et $p, q \in [1, \infty]$ conjugués.

1. Si f et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors
$$\int_E fg \, \mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$
2. Si $f \in \mathrm{L}^p(E)$ et $g \in \mathrm{L}^q(E)$, alors $fg \in \mathrm{L}^1(E)$ et $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q$.

Preuve 1. On suppose d'abord que $p = 1$ et donc $q = \infty$. On a $g \leqslant \|g\|_\infty$ μ-presque partout, donc
$$\int_E fg \, \mathrm{d}\mu \leqslant \|g\|_\infty \int_E f \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_1 \, \|g\|_\infty \, .$$

On suppose désormais que p et q ne valent pas ∞. Si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$, alors $fg = 0$ μ-presque partout et l'inégalité est triviale. Supposons alors que $\|f\|_p \neq 0$ et $\|g\|_q \neq 0$. Par concavité du logarithme, on montre que
$$\forall u, v \geqslant 0, \quad u^{1/p} v^{1/q} \leqslant \frac{u}{p} + \frac{v}{q}.$$
Pour $x \in E$, en appliquant cette inégalité à $u = f^p(x)/\|f\|_p^p$ et $v = g^q(x)/\|g\|_q^q$, on obtient
$$\frac{f(x)g(x)}{\|f\|_p \, \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q}.$$
En intégrant, on obtient que
$$\int_E \frac{fg}{\|f\|_p \, \|g\|_q} \, \mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
En multipliant par $\|f\|_p \, \|g\|_q$, l'inégalité est démontrée.

2. On applique le point 1 à $|f|$ et $|g|$. □

◇ REMARQUE *(cas d'égalité).* L'inégalité $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q$ est une égalité si et seulement si $g = 0$ μ-presque partout ou il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|f|^p = \alpha \, |g|^p$ μ-presque partout

8.2.2 Inégalité de MINKOWSKI

THÉORÈME 8.9 *(inégalité de MINKOWSKI).* Soient $p \in [1, \infty]$ et $f, g \in \mathrm{L}^p(E)$. Alors $f + g \in \mathrm{L}^p(E)$ et
$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \, .$$

Preuve On suppose que $p = \infty$. Alors $|f + g| \leqslant |f| + |g| \leqslant \|f\|_p + \|g\|_\infty$. On obtient l'inégalité triangulaire en passant à la borne inférieure. On suppose désormais que $p < \infty$. Alors $|f + g|^p \leqslant (|f| + |g|)|f + g|^{p-1}$, donc l'inégalité de HÖLDER pour $q = p/(p-1)$ donne
$$\begin{aligned} \int_E |f+g|^p &\leqslant \int_E |f| \, |f+g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu + \int_E |g| \, |f+g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \left(\int_E |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \left(\int_E |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{(p-1)/p} + \left(\int_E |g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \left(\int_E |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{(p-1)/p}, \end{aligned}$$
donc
$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f\|_p \, \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \, \|f+g\|_p^{p-1} \, .$$
Si $\|f + g\|_p = 0$, l'inégalité est triviale. Sinon, on divise par $\|f + g\|_p^{p-1}$ ce qui conclut. □

COROLLAIRE 8.10 *(inégalité de MINKOWSKI généralisée).* Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors
$$\Big\| \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \Big\|_p \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_p \, .$$

Preuve La suite $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, donc l'inégalité de MINKOWSKI donne
$$\Big\| \sum_{k=0}^n f_k \Big\|_p \leqslant \sum_{k=0}^n \|f_k\|_p \longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_p$$

et le théorème de Beppo-Levi donne

$$\Big\|\sum_{k=0}^{n} f_k\Big\|_p = \Big(\int\Big|\sum_{k=0}^{n} f_k\Big|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} \longrightarrow \Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}} f_k\Big\|_p$$

ce qui montre l'inégalité. □

Proposition 8.11. Soit $p \in [1,\infty]$. Alors le couple $(\mathrm{L}^p(E), \|\ \|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Preuve Il suffit de montrer que l'application $\|\ \|_p$ est une norme sur $\mathrm{L}^p(E)$. On suppose que $p<\infty$. Si $\|f\|_p = 0$, alors $f=0$ μ-presque partout, donc $f=0$ dans $\mathrm{L}^p(E)$. L'inégalité de Minkowski donne l'inégalité triangulaire et on a bien l'homogénéité. On montre également le cas $p=\infty$. □

8.3 Les espaces de Banach L^p

8.3.1 Théorème de Riesz-Fischer

Théorème 8.12 *(Riesz-Fischer).* Soit $p \in [1,\infty]$. L'espace $\mathrm{L}^p(E)$ muni de la norme $\|\ \|_p$ est complet.

Preuve On suppose que $p<\infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de Cauchy de $\mathrm{L}^p(E)$. Il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad \|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p \leqslant 1/2^n.$$

En effet, on peut construire l'extraction $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ par récurrence. Montrons que la série $\sum|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|$ converge absolument μ-presque partout. En effet, l'inégalité de Minkowski généralisée donne

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}}|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|\Big\|_p \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}}\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^n} < +\infty. \tag{$*$}$$

On en déduit que

$$\int_E\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}}|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|\Big)^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}}|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}| < +\infty.$$

On définit alors μ-presque partout

$$f \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{N}}(f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}) + f_{\varphi(0)}.$$

Alors la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque partout vers f. L'inégalité $(*)$ nous donne que $f\in\mathrm{L}^p(E)$. De plus, elle tend vers f pour la norme $\|\ \|_p$ puisque, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\|f - f_{\varphi(n)}\|_p = \Big\|\sum_{k=n}^{+\infty}(f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)})\Big\|_p \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\|_p \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^k} \longrightarrow 0.$$

Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\mathrm{L}^p(E)$, donc elle converge dans $\mathrm{L}^p(E)$. D'où la complétude de $\mathrm{L}^p(E)$.

On suppose que $p=\infty$. On se ramène à la complétude de l'ensemble $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(E,\mathbb{K})$ des fonctions bornées de E dans $\mathbb{K}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathrm{L}^\infty(E)$. On considère

$$A \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{|f_n| \leqslant \|f_n\|_\infty\} \cap \bigcap_{m,n\in\mathbb{N}}\{|f_n - f_m| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty\}.$$

On remarque que $\mu(A^{\mathrm{c}}) = 0$. De plus, la suite $(f_n\mathbb{1}_A)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(E,\mathbb{K})$ qui est de Cauchy, donc elle converge vers une fonction $f\in\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(E,\mathbb{K})$. Alors

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\mathbb{1}_A - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

ce qui montre la complétude de $\mathrm{L}^\infty(E)$. □

8.3.2 Lien entre convergences μ-presque partout et L^p

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{L}^p(E)$. La convergence simple μ-presque partout de cette suite n'implique pas la convergence $\mathrm{L}^p(E)$: il suffit de considérer la suite $(n\mathbb{1}_{[0,1/n]})_{n\in\mathbb{N}}$. Mais la réciproque est-elle vraie ? Encore une fois, c'est faux : des fonctions créneaux qui se décalent de gauche à droite et qui rétrécissent. En revanche, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 8.13. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(E)$ convergeant dans $L^p(E)$ vers f. Alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant μ-presque partout vers f.

Preuve Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de CAUCHY. On peut donc construire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ comme dans la preuve du théorème précédent qui converge μ-presque partout vers une fonction $g \in L^p(E)$. La sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge *a fortiori* vers f dans $L^p(E)$. Par unicité de la limite, on en déduit que $f = g$. □

8.3.3 Théorème de convergence dominée L^p

THÉORÈME 8.14 *(de convergence dominée* L^p*).* Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(E)$ et $f\colon E \to \mathbb{K}$ mesurable telles que

(i) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque partout vers f,

(ii) il existe $g \in L^p(E)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait μ-presque partout $|f_n| \leqslant g$.

Alors $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Preuve On applique le théorème de convergence dominée à la suite $(|f_n - f|^p)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après les hypothèse (i) et (ii), on a $\|f\| \leqslant g$ μ-presque partout, donc

$$\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int g^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty,$$

donc $f \in L^p(E)$. De plus, on a $|f_n - f|^p \to 0$ et

$$|f_n - f|^p \leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant (2g)^p \quad \mu\text{-presque partout}$$

avec $(2g)^p \in L^1(E)$. Par le théorème de convergence dominée, on obtient que $\|f_n - f\|_p \to 0$. □

8.4 Densité des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

DÉFINITION 8.15. On dit qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ est à *support compact* si elle est nulle en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^d$. On note $C_c(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}$.

THÉORÈME 8.16. Soit $p \in [1, \infty[$. Alors $C_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|\ \|_p$. En d'autres termes, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\|f - \varphi\|_p < \varepsilon.$$

◇ REMARQUE. Le résultat est faux pour $p = \infty$. En fait, l'adhérence de $C_c(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|\ \|_\infty$ est l'ensemble des fonctions continues $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ telle que $f(x) \to 0$ quand $\|x\| \to +\infty$.

LEMME 8.17. On note $\mathscr{E}^1(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions étagées intégrables sur $\mathbb{R}^d$. Alors

$$\overline{\mathscr{E}^1(\mathbb{R}^d)}^{\|\ \|_p} = L^p(\mathbb{R}^d).$$

Preuve Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors il existe une suite croissante $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathscr{E}^+$ qui converge simplement vers f. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi_n \leqslant f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Le théorème de convergence dominée L^p donne $\|f - \varphi_n\|_p \to 0$ ce qui conclut. Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on conclut en écrivant $f = f^+ - f^-$ et en utilisant l'inégalité de MINKOWSKI. De même si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$. □

Preuve du théorème Il suffit de montrer que

$$\overline{C_c(\mathbb{R}^d)}^{\|\ \|_p} \supset \mathscr{E}^1(\mathbb{R}^d).$$

Le lemme donnera alors la conclusion. On se place dans le cas $d = 1$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

D'abord, supposons que $f = \mathbb{1}_I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors I est borné. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n\colon x \in \mathbb{R} \longmapsto n\max(0, 1 - d(x, I)).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|f - f_n\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f - f_n|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^{1/p} \longrightarrow 0.$$

Supposons que $f = \mathbb{1}_\Omega$ ou Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors $\lambda(\Omega) < +\infty$. On peut écrire

$$\Omega = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$$

où les ensembles I_k sont des intervalles ouverts (bornés). Alors

$$\mathbb{1}_\Omega = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{I_k}.$$

donc la suite $(\sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{I_k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbb{1}_\Omega$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{I_k} \leqslant \mathbb{1}_\Omega \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}).$$

Le théorème de convergence dominée donne alors

$$\Big\|\mathbb{1}_\Omega - \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{I_k}\Big\|_p \longrightarrow 0.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|\mathbb{1}_\Omega - \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{I_k}\|_p < \varepsilon/2$. D'après le cas précédent, pour $k \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi_k \in \mathrm{C_c}(\mathbb{R})$ telle que $\|\mathbb{1}_{I_k} - \varphi_k\|_p < \varepsilon/2^{k+2}$. Par l'inégalité de Minkowski, on obtient que

$$\Big\|\mathbb{1}_\Omega - \sum_{k=0}^n \varphi_k\Big\|_p \leqslant \Big\|\mathbb{1}_\Omega - \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{I_k}\Big\|_p + \Big\|\sum_{k=0}^n (\mathbb{1}_{I_k} - \varphi_k)\Big\|_p < \varepsilon$$

ce qui conclut.

Supposons que $f = \mathbb{1}_B$ où B est un borélien de $\mathbb{R}$. Alors $\lambda(B) < +\infty$. Par la régularité de la mesure de Lebesgue, il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}$ tel que

$$B \subset \Omega \quad \text{et} \quad \lambda(\Omega \setminus B) < (\varepsilon/2)^p.$$

Soit $\varphi \in \mathrm{C_c}(\mathbb{R})$ telle que $\|\mathbb{1}_\Omega - \varphi\| < \varepsilon/2$. Alors

$$\begin{aligned}\|\mathbb{1}_B - \Omega\|_p &\leqslant \|\mathbb{1}_\Omega - \mathbb{1}_B\|_p + \|\mathbb{1}_\Omega - \varphi\|_p \\ &\leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\Omega\setminus B}\,\mathrm{d}\lambda\Big)^{1/p} + \varepsilon/2 < \varepsilon.\end{aligned}$$

Supposons que $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \in \mathscr{E}^1(\mathbb{R})$. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, il existe $\varphi_i \in \mathrm{C_c}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|\mathbb{1}_{A_i} - \varphi_i\|_p < \varepsilon/n\,|\alpha_i|\,.$$

Alors

$$\Big\|f - \sum_{i=1}^n \alpha_i\varphi_i\Big\|_p \leqslant \sum_{i=1}^n |\alpha_i|\,\|\mathbb{1}_{A_i} - \varphi_i\|_p < \varepsilon \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i\varphi_i \in \mathrm{C_c}(\mathbb{R}).$$

Cela termine la preuve dans le cas $d = 1$.

• *Idée de la preuve pour $d > 1$.* Tout fonctionne sauf le point suivant. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ne s'écrit pas, en général, sous la forme d'une union disjointe dénombrable de pavés ouverts de $\mathbb{R}^d$. Cependant, on peut écrire

$$\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k$$

où les ensembles P_k sont des pavés ouverts et bornés. On peut réécrire cette réunion comme

$$\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$$

à un ensemble λ_d-négligeable près. Dans ce cas, on a

$$\mathbb{1}_\Omega = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{Q_k} \quad \lambda_d\text{-presque partout.}$$ □

Chapitre 9

CONVOLUTION & APPLICATIONS

9.1 OPÉRATEUR DE TRANSLATION

DÉFINITION 9.1. Soit $a \in \mathbb{R}^d$. On définit l'opérateur

$$\tau_a : \left| \begin{array}{l} \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d), \\ \qquad f \longmapsto \tau_a f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \\ x \longmapsto f(x-a). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

◇ REMARQUE. Cet opérateur est bien définie puisque la mesure de LEBESGUE est invariante par translation, *i. e.* deux fonctions f et g égales λ-presque partout vérifient bien $f(x-a) = g(x-a)$ pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. De plus, si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, alors un changement de variables affine donne $\tau_a f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$.

PROPOSITION 9.2. Soient $p \in [1, \infty]$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Alors l'opérateur τ_a est une isométrie, *i. e.*

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d), \quad \|\tau_a f\|_p = \|f\|_p .$$

Preuve Si $p < \infty$, il suffit d'appliquer le changement de variables $x \longmapsto x - a$. Si $p = \infty$, on remarque que, pour tout $C \geqslant 0$, on a $|f| \leqslant C$ presque partout si et seulement si $|\tau_a f| \leqslant C$ presque partout. □

THÉORÈME 9.3. Soient $p \in [1, \infty[$ et $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\|\tau_a f - f\|_p \xrightarrow[\|a\| \to 0]{} 0.$$

Preuve On suppose d'abord que $f \in \mathrm{C_c}(\mathbb{R}^d)$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^d$ telle que $\|a_n\| \to 0$. On souhaite montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-a_n) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \longrightarrow 0.$$

À partir d'un certain rang N, on a $|a_n| \leqslant 1$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ tel que f soit nulle sur K^{c}. Si $n \geqslant N$, alors la fonction $x \longmapsto f(x-a_n) - f(x)$ est nulle sur K_1^{c} où $K_1 := K + \mathrm{B_f}(0,1)$ est un compact. Comme f est continue sur K', elle y est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \|x - y\| < \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Finalement, en reprenant les mêmes arguments, pour n assez grand, on peut écrire que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-a_n) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{K'} |f(x-a_n) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \int_{K'} \frac{\varepsilon}{\lambda_d(K')} \,\mathrm{d}x = \varepsilon$$

Revenons au cas général. Soient $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathrm{C_c}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon/3$. D'après le cas précédent, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall a \in \mathrm{B}(0, \delta), \quad \|\tau_a \varphi - \varphi\|_p < \varepsilon/3.$$

Alors pour tout $a \in \mathrm{B}(0,\delta)$, il vient que

$$\begin{aligned} \|\tau_a f - f\|_p &\leqslant \|\tau_a(f - \varphi)\|_p + \|\tau_a \varphi - \varphi\|_p + \|\varphi - f\|_p \\ &\leqslant 2\,\|f - \varphi\|_p + \|\tau_a \varphi - \varphi\|_p < 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui montre la limite dans le cas général. □

◇ REMARQUE. Le théorème est faux pour $p = \infty$. Il suffit de prendre $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et $a > 0$. On voit alors que

$$\|\tau_a f - f\|_\infty = \left\|\mathbb{1}_{[-a,1-a]} - \mathbb{1}_{[0,1]}\right\|_\infty = 1 \not\longrightarrow 0.$$

9.2 Convolution

9.2.1 Le cas mesurable positif

Définition 9.4. Soient $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ deux fonctions mesurables positives. On définit

$$f \star g \colon \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y. \end{array} \right.$$

Proposition 9.5. Soient $f, g \in \mathscr{M}_+$. Alors $f \star g$ est mesurable positive et

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \star g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve On note que les fonctions $(x,y) \longmapsto x-y$ et $(x,y) \longmapsto y$ sont continues, donc elles sont mesurables. On en déduit que la fonction $(x,y) \longmapsto f(x-y)g(y)$ est mesurable. Le théorème de Fubini-Tonelli assure alors que la fonction $f \star g$ est mesurable. □

Proposition 9.6. Soient $f, g, h \in \mathscr{M}_+$. Alors

1. on a $f \star g = g \star f$;
2. on a $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$;
3. on a $\{f \star g \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$.

Preuve 1. Ce point résulte du changement de variables $z = x - y$ dans l'intégrale.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, le théorème de Fubini-Tonelli donne

$$\begin{aligned} [(f \star g) \star h](x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f \star g(x-y)h(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(x-y-z)\,\mathrm{d}z \right) h(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-z-y)h(y)\,\mathrm{d}y \right) f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g \star h(x-z)f(z)\,\mathrm{d}z = [(g \star h) \star f](x) = [f \star (g \star h)](x). \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Supposons que $x \notin \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$. Alors pour tout $y \in \{f \neq 0\}$, on a $x - y \notin \{g \neq 0\}$. Autrement dit, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $f(y) \neq 0$, on a $g(x-y) = 0$. On en déduit que

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y = 0$$

et donc $x \notin \{f \star g \neq 0\}$. La contraposée de ce qu'on vient de montrer donne l'inclusion voulue. □

▷ Exemple. Soit $f \coloneqq \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f \star f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(y)\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-1/2,x+1/2]}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \lambda([-1/2,1/2] \cap [x-1/2,x+1/2]) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1, \\ \lambda([-1/2,x+1/2]) = x+1 & \text{si } x \in [-1,0], \\ \lambda([x-1/2,1/2]) = 1-x & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

9.2.2 Cas général

◇ Remarque. Soient $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ mesurables. Alors la convolution $f \star g$ existe en $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si la fonction $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable, *i. e.* $|f| \star |g|\,(x) < +\infty$.

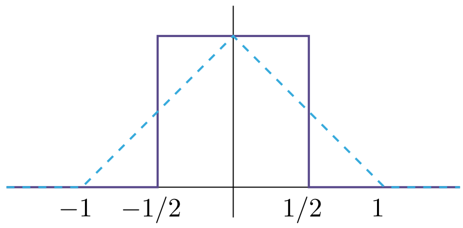

FIGURE 9.1 – Graphe de la fonction $f := \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}$ (gras) et de sa convolution par elle-même $f \star f$ (pointillé)

THÉORÈME 9.7 *(convolution* L^p-L^q*).* Soit $p, q \in [1, \infty]$ des exposants conjugués. Soient $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$. Alors $f \star g$ existe sur $\mathbb{R}$, est uniformément continue et

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |f \star g(x)| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

Preuve Soit $x \in \mathbb{R}^d$. L'inégalité de HÖLDER donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}y \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p \,\mathrm{d}y\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^q \,\mathrm{d}y\right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q < +\infty.$$

Montrons que $f \star g$ est uniformément continue. Soient $x, a \in \mathbb{R}^d$. On a

$$\begin{aligned} |f \star g(x+a) - f \star g(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} (f(x+a-y) - f(x-y))g(y) \,\mathrm{d}y\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} (\tau_{-a} f - f)(x-y)g(y) \,\mathrm{d}y\right| \\ &= |(\tau_{-a} f - f) \star g(x)| . \end{aligned}$$

Comme $\tau_a f - f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}^q(E)$. De ce qui précède, on obtient que

$$|f \star g(x+a) - f \star g(x)| \leqslant \|\tau_{-a} f - f\|_p \|g\|_q .$$

Quitte à échanger p et q, on peut supposer que p est fini. Alors

$$\|\tau_{-a} f - f\|_p \xrightarrow[\|a\| \to 0]{} 0,$$

donc

$$|f \star g(x+a) - f \star g(x)| \xrightarrow[\|a\| \to 0]{} 0$$

et ceci indépendamment de x. Finalement, la fonction $f \star g$ est uniformément continue. □

THÉORÈME 9.8 *(convolution* L^p-L^1*).* Soit $p \in [1, \infty[$. Soient $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $f \star g$ existe presque partout, appartient à $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|f \star g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1 .$$

Preuve Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On note $q \in [1, \infty[$ le conjugué de p. L'inégalité de HÖLDER donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g^{1/p}(y)||g^{1/q}(y)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)| \,\mathrm{d}y\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \,\mathrm{d}y\right)^{1/q} .$$

En utilisant le théorème de FUBINI, on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)| \,\mathrm{d}y \,\|g\|_1^{p-1} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p \,\mathrm{d}x \,|g(y)| \,\mathrm{d}y \,\|g\|_1^{p-1} = \|f\|_p^p \|g\|_1^p < +\infty. \end{aligned}$$

L'utilisation du théorème de FUBINI-TONELLI est valide puisque la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longmapsto |f(x-y)|^p |g(y)|$ est mesurable. On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}y < +\infty \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

De plus, la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longmapsto |f(x-y)|^p |g(y)|$ est intégrable par ce qui précède. Enfin, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f \star g(x)|^p \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} (|f| \star |g|(x))^p \,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p^p \|g\|_p^1$$

ce qui montre l'inégalité. □

PROPOSITION 9.9. L'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ muni de la loi de convolution $\star$ possède une structure de $\mathbb{K}$-algèbre commutative qui n'a pas d'unité.

Preuve La commutativité se montre à l'aide du changement de variables $z = x - y$. La distributivité de $\star$ par rapport à $+$ se déduit de la linéarité de l'intégrable. L'associativité découle du théorème de FUBINI. Montrons que cette algèbre ne possède pas d'unité. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad f \star \varphi = \varphi.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n \colon x \in \mathbb{R}^d \longmapsto e^{-n\|x\|^2} \in \mathbb{R}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors l'égalité $f_n \star \varphi = f_n$ est vraie dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, *i. e.* ces fonctions sont égales presque partout. Comme $f_n \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la fonction $f_n \star \varphi$ est continue. Alors $f_n \star \varphi(x) = f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. En particulier, on a $f_n \star \varphi(0) = f_n(0) = 1$. Cependant, comme $f_n(y) \to 0$ et $|f_n(y)| \leqslant |\varphi(y)|$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, le théorème de convergence dominée donne $f_n(0) \to 0$ ce qui est impossible. $\square$

9.2.3 Approximation de l'unité

DÉFINITION 9.10. On appelle *approximation de l'unité* une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\varphi_n \geqslant 0$ presque partout ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \ ;$$
- pour tout $\delta > 0$, on ait
$$\int_{B(0,\delta)^c} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

◇ REMARQUE. Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ presque partout positive telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$. Quitte à diviser φ par son intégrale sur $\mathbb{R}^d$, on peut supposer que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\varphi_n \colon x \in \mathbb{R}^d \longrightarrow n^d\varphi(nx).$$

Alors $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le changement de variables $y = nx$ donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(nx)n^d\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Soit $\delta > 0$. Le même changement de variables et le théorème de convergence dominée affirment

$$\int_{B(0,\delta)^c} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B(0,n\delta)^c}(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

THÉORÈME 9.11. Soit $p \in [1, \infty[$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Alors

$$\|f \star \varphi_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Preuve On note $q \in [1, \infty[$ le conjugué de p. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^d$. L'inégalité de HÖLDER donne

$$\begin{aligned}
|f \star \varphi_n(x) - f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y - f(x)\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|\,\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|\,\varphi_n^{1/p}(y)\varphi_n^{1/q}(y)\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p\,\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

On en déduit, avec le théorème de FUBINI-TONELLI, que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f \star \varphi_n(x) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p\,\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p\,\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Cassons l'intégrale en deux parties. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 9.3, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in \mathrm{B}(0,\delta), \quad \|\tau_y f - f\|_p^p < \varepsilon/2.$$

Comme la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad \int_{\mathrm{B}(0,\delta)^c} \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{(2\|f\|_p)^p}.$$

Alors pour tout $n \geqslant N$, on obtient que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f \star \varphi_n(x) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathrm{B}(0,\delta)} \|\tau_y f - f\|_p^p\, \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\mathrm{B}(0,\delta)^c} \|\tau_y f - f\|_p^p\, \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + (2\|f\|_p)^p \int_{\mathrm{B}(0,\delta)^c} \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y < \varepsilon\end{aligned}$$

ce qui montre la convergence de la suite $(f \star \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction f pour la norme $\|\ \|_p$. □

Théorème 9.12. Soient $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Alors

$$\|f \star \varphi_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Preuve Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Comme précédemment, on a

$$|f \star \varphi_n(x) - f(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|\, \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par l'uniforme continuité, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in \mathrm{B}(0,\delta), \quad |f(x-y) - f(x)| < \varepsilon/2.$$

En utilisant le même découpage que précédemment, on montre que $|f \star \varphi_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand. Cela montre que $\|f \star \varphi_n - f\| \longrightarrow 0$. □

9.2.4 Régularisation par convolution

Théorème 9.13. Soient $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$. Alors $f \star \varphi$ est classe C^1 et, pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, on a

$$\partial_{x_i}(f \star \varphi)(x) = f \star (\partial_{x_i}\varphi)(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Preuve On applique le théorème de convergence dominée en utilisant le fait que $\|\partial_{x_i}\varphi\|_\infty < +\infty$. □

◇ Remarques. – Par récurrence immédiate, on montre que, pour toute fonction $\varphi \in \mathrm{C}^k_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$, on montre que

$$\partial^{|\alpha|}_{x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}}(g \star \varphi) = f \star (\partial^{|\alpha|}_{x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}}\varphi)$$

pour tout $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \coloneqq \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqslant k$.

– On peut prendre f appartenant à $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, l'ensemble des fonctions intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.

Définition 9.14. On appelle *suite régularisante* une approximation de l'unité $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont des éléments de $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$.

▷ Exemple. On introduit la fonction

$$\psi\colon x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \begin{cases} \exp(-1/(1-\|x\|^2)) & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors on montre que $\psi \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$. En utilisant le procédé de la remarque page 45, on construit une suite régularisante ce qui montre leur existence.

Théorème 9.15. Soit $p \in [1,\infty[$. Alors l'ensemble $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$

Preuve Soit $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. On suppose d'abord que $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f \star \varphi_n \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$. Or $\|f \circ \varphi_n - f\|_p \longrightarrow 0$ où la suite $(f \circ \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$.

Revenons au cas général. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathrm{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon/2$. D'après le cas particulier, il existe $\psi \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|\varphi - \psi\|_p < \varepsilon/2$. Finalement, on a $\|f - \psi\| < \varepsilon$ ce qui montre le résultat. □

Application (lemme d'Urysohn). Soient K un compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tels que $K \subset \Omega$. Alors il existe une fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $f = 1$ sur K et $f = 0$ sur Ω^c.