Année universitaire 2021-2022
1ère année - 1er cycle - STPI

Analyse 2

Calcul intégral (Cours 12h00 - TD 12h00)

(Cours – Exercices de TD – Exercices d'entraînement – Exercices facultatifs)

Table des matières

1 Intégrale de Riemann

Définition 1.1 (Subdivision régulière d'un segment)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La subdivision *régulière de pas $\frac{b-a}{n}$ de $I = [a, b]$ est définie par*

$$X_n = \left\{x_k = a + k\,\frac{b-a}{n},\ k = 0, \dots, n\right\}.$$

Exercice 1.1 *Soit $I = [-1, 2]$. Représenter les subdivisions X_1, X_2, X_3, X_4 (faire un dessin).*

Définition 1.2 (Somme de Riemann associée à une subdivision régulière)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un ensemble $T_n = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ de n points intercalés dans la subdivision X_n :

$$x_0 \leqslant t_1 \leqslant x_1 \leqslant t_2 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_{n-1} \leqslant t_n \leqslant x_n.$$

La somme de Riemann *associée à f, à la subdivision régulière X_n, et enfin à la famille de points intercalés T_n, est définie par :*

$$\boxed{R(f, X_n, T_n) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\left(x_i - x_{i-1}\right) = \tfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)}$$

Dans la suite on notera pour simplifier $R(f, T_n) = R(f, X_n, T_n)$.

Exercice 1.2 *On considère la fonction $f(x) = \cos(x)$.*

1. *Dessiner le graphe de f sur $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et représenter graphiquement (sous forme d'aires de rectangles) les sommes de Riemann $R(f, T_8)$ lorsque $T_8 = \{t_k = -\frac{\pi}{2} + k\,\frac{\pi}{8},\ k = 0, \ldots, 7\}$, puis lorsque $T_8 = \{t_k = -\frac{\pi}{2} + k\,\frac{\pi}{8},\ k = 1, \ldots, 8\}$, et enfin lorsque T_8 est défini par les points milieux de la subdivision régulière X_8 (effectuer un dessin pour chaque cas).*
2. *Intuitivement, que représente graphiquement la limite de $R(f, T_n)$ quand $n \to +\infty$ (ceci quelque soit le choix des points intercalés T_n) ?*
3. *Mêmes questions quand on considère f sur $I = [-\frac{\pi}{2}, \pi]$ (attention, pour la question 2, bien comprendre qu'on doit tenir compte ici de la valeur algébrique des aires).*

Théorème 1.1 (admis) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction* **continue**. *Il existe un nombre $\mathcal{I}$, dépendant de f, a et b, tel que, pour tout choix de points intercalés T_n dans la subdivision régulière X_n de $[a, b]$, on ait*

$$\lim_{n \to +\infty} R(f, T_n) = \mathcal{I}.$$

Le nombre $\mathcal{I}$, noté $\mathcal{I} = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$, est appelé l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$.

Exercice 1.3 *Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.*

1. *Calculer $R_n = R(f, T_n)$ lorsque $T_n = \{t_k = \frac{k-1}{n},\ k = 1, \ldots, n\}$ (après avoir explicité R_n, on utilisera une formule classique du formulaire pour simplifier R_n).*
2. *Calculer $R'_n = R(f, T'_n)$ lorsque $T'_n = \{t_k = \frac{k}{n},\ k = 1, \ldots, n\}$.*
3. *Quelle est la limite des suites $(R_n)_n$ et $(R'_n)_n$?*

Remarque 1.1 *Une subdivision (générale) du segment $[a, b]$ est une famille quelconque de la forme $X = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, où $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Pour toute famille $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ de n points intercalés dans la subdivision X on peut alors définir la somme de Riemann associée*

$$R(f, X, T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\big(x_i - x_{i-1}\big).$$

Le théorème 1.1 s'étend à ce cas général : si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors les sommes de Riemann $R(f, X, T)$ convergent vers $\int_a^b f(x)\, dx$ lorsque le pas de la subdivision X tend vers 0, où le pas de X est défini par

$$\delta(X) := \max\{x_i - x_{i-1},\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Pour une fonction bornée quelconque $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on peut bien sûr définir $R(f, X, T)$, mais l'existence d'une limite pour $R(f, X, T)$ quand $\delta(X) \to 0$ n'est pas garantie ; en outre, si la limite existe, elle doit être indépendante du choix des subdivisions X choisis pour pouvoir définir sans ambiguïté l'intégrale de f. La continuité de f sur $[a, b]$ est une hypothèse simple, et suffisamment générale pour la suite du cours, permettant de définir l'intégrale de Riemann de f.

Définition 1.3 (intégrale d'une fonction continue par morceaux)

On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux si f est continue en tout point de $[a,b]$, sauf éventuellement en un nombre fini de points $a \leq a_1 < \dots < a_{s-1} \leq b$ en lesquels f admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite (faire un dessin). Noter qu'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$. Pour une telle fonction il est naturel de définir l'intégrale de f sur $[a,b]$ par

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{a_{s-1}}^{b} f(x)\,dx.$$

La construction de l'intégrale de Riemann conduit au résultat suivant :

Théorème 1.2 (Intégrale de Riemann et aire définie par f)

1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux* **positive**. *L'aire du domaine D délimité par le graphe de f, l'axe $0x$ et les deux verticales $x = a$ et $x = b$, est donnée par l'intégrale :*

$$\mathcal{A}(D) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Si f change de signe un nombre fini de fois sur $[a,b]$, l'aire totale du domaine D délimité par la courbe représentative de f, l'axe $0x$ et les deux verticales $x = a$ et $x = b$, est donnée par l'intégrale*

$$\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

3. *Soient f_1, f_2 des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux et telles que $f_1 \leq f_2$. L'aire du domaine : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}$ est égale à*

$$\mathcal{A}(D) = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx.$$

2 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Théorème 2.1 (Linéarité de l'intégrale de Riemann)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \lambda\, f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exercice 2.1 (Preuve) *Pour établir les formules du théorème, on peut considérer des fonctions f et g continues, pourquoi ? Quelles formules simples peut-on écrire pour les sommes de Riemann $R(f+g, T_n)$ et $R(\lambda f, T_n)$? Conclusion ?*

Remarque 2.1 *Attention, en général $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$. Par exemple*

$$1/4 = \int_0^1 x^3 dx \neq \left(\int_0^1 x dx\right)\left(\int_0^1 x^2 dx\right) = (1/2)(1/3) = 1/6.$$

Le théorème suivant est une application immédiate de la définition de l'intégrale de Riemann :

Théorème 2.2 (Relation de Chasles) *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux et si c est un réel tel que $a < c < b$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Théorème 2.3 (Monotonie de l'intégrale)

1. *Si $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux telle que $\phi \geq 0$, alors*

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \geq 0.$$

2. *Si f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$ et si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Exercice 2.2 (Preuve) *Soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et positive ou nulle. Que dire du signe de $R(\phi, T_n)$? Conclusion sur $\int_a^b \phi(x)\,dx$? L'extension à ϕ continue par morceaux sur $[a, b]$ s'obtient facilement, pourquoi ? Déduire l'assertion 2. de l'assertion 1 en considérant la fonction $g - f$.*

Corollaire 1 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors :*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Exercice 2.3 (Preuve) *On a : $-|f| \leq f \leq |f|$. Conclure en utilisant les théorèmes précédents.*

Théorème 2.4 (1er théorème de la moyenne) *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est* **continue**, *alors il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\ f(c).}$$

Le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ est appelé la valeur moyenne de f sur $[a, b]$. Cette valeur est donc l'image par f d'au moins un point de $[a, b]$.

Exercice 2.4 (Preuve) *Puisque $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, elle est bornée et atteint ses bornes. Soit*

$$m := \min\{f(x),\ x \in [a, b]\} \quad \text{et} \quad M := \max\{f(x),\ x \in [a, b]\}.$$

On a donc $m \leq f \leq M$ sur $[a, b]$. Que vaut $\int_a^b m\,dx$ et $\int_a^b M\,dx$? En utilisant la monotonie de l'intégrale, démontrer que

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Utiliser un théorème classique vu en Analyse 1 pour conclure.

Théorème 2.5 (2d théorème de la moyenne) *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est* **continue** *et si* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est continue par morceaux et* **de signe constant** *sur* $[a,b]$*, alors il existe* $d \in [a,b]$ *tel que*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(d) \int_a^b g(x)\, dx.}$$

Exercice 2.5 (Preuve) *Considérer le cas* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue positive pour fixer les idées (avec* g *non identiquement nulle). En s'inspirant de la méthode précédente, encadrer le nombre*

$$y := \frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx}.$$

Conclure avec le même théorème classique.

3 Intégrales et primitives des fonctions continues

Dans la section 1, nous avons vu la définition géométrique de l'intégrale de Riemann, et nous en avons déduit les propriétés de l'intégrale dans la section 2. Pour la partie calculatoire, la définition de $\int_a^b f(x)\, dx$ comme limite de sommes de Riemann peut difficilement être utilisée en pratique. L'exemple 1.2 montre en effet qu'en général le calcul d'une intégrale (même d'une fonction usuelle comme $\cos(x)$) sera difficile, voire impossible, à faire en essayant de déterminer la limite de ses sommes de Riemann (noter que le cas de l'exercice 1.3 est très particulier !!!). Le théorème 3.1 ci-dessous, appelé théorème fondamental du calcul intégral, qui fait le lien entre les notions d'intégrale et de primitive, permet de faire des calculs d'intégrales.

Dans les sections 3-4-5-6 consacrées au calcul d'intégrales, la construction de l'intégrale de Riemann de la section 1 n'est pas explicitement utilisée, seules les propriétés vues dans la section 2 joueront un rôle. Cependant la construction de l'intégrale de Riemann ne doit pas être négligée car elle sera utilisée à nouveau, d'une part dans les applications géométriques de la section 7, d'autre part dans les méthodes d'approximations d'une intégrale de la section 8.1 (en effet on ne sait pas toujours calculer une intégrale).

3.1 Théorème fondamental du calcul intégral

Rappelons qu'une primitive de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue est une fonction $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $G' = f$.

Théorème 3.1 *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est continue, alors la fonction* $F_a : [a,b] \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall x \in [a,b], \quad F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

est dérivable sur $[a,b]$ *et* $F_a' = f$.

Exercice 3.1 (Preuve) *Soient* x_0 *et* $x_0 + h$ *des points de* $[a,b]$.

1. *Écrire* $F_a(x_0+h) - F_a(x_0)$ *sous forme d'une intégrale en précisant le théorème utilisé.*
2. *Déduire de la question 1. et d'un théorème (à préciser) qu'il existe un point* c_h *compris entre* x_0 *et* x_0+h *tel que*
$$\frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} = f(c_h).$$
3. *Conclusion ?*

Remarque 3.1 *Deux primitives quelconques d'une fonction continue* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *diffèrent d'une constante. En effet, si* G_1 *et* G_2 *sont deux primitives de* f*, alors la dérivée de la différence* $G_1 - G_2$ *est nulle sur* $[a,b]$*. Donc la fonction* $G_1 - G_2$ *est constante sur* $[a,b]$*. La fonction* F_a *du théorème 3.1 est donc l'unique primitive de* f *qui s'annule en* a*.*

Théorème 3.2 (Théorème fondamental du calcul intégral) *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est continue, alors pour toute primitive* G *de* f*, on a :*
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)}$$

Exercice 3.2 (Preuve) *On a* $\int_a^b f(x)\,dx = F_a(b) - F_a(a)$*. Si* G *est une primitive de* f*, ...*

Remarque 3.2 *Lorsque* f *est continue par morceaux, on pourra appliquer le théorème précédent sur chaque sous-segment de* $[a,b]$ *considéré dans la définition 1.3.*

3.2 Intégration par parties

Théorème 3.3 *Soient* f *et* g *deux fonctions continûment dérivables sur* $[a,b]$*. On a alors la formule suivante, dite d'intégration par parties :*
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx &= [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx \\ \text{où } [f(x)\,g(x)]_a^b &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a). \end{aligned}$$

Exercice 3.3 (Preuve) *Considérer la formule de dérivation de la fonction* $f \cdot g$ *et intégrer...*

La formule d'intégration par parties est utile pour calculer certaines intégrales, voir la liste d'exercices de TD. Elle peut être utile aussi pour l'étude de suites définies par des intégrales. En voici un exemple :

Exercice 3.4 *On définit*
$$I(n) = \int_0^{\pi/2} e^{nx} \cos x dx \quad \text{et} \quad J(n) = \int_0^{\pi/2} e^{nx} \sin x dx.$$
Montrer que
$$I(n) = e^{n\pi/2} - nJ(n) \quad \text{et} \quad J(n) = 1 + nI(n).$$
En déduire que
$$I(n) = \frac{e^{n\pi/2} - n}{n^2+1} \quad \text{et} \quad J(n) = \frac{ne^{n\pi/2} + 1}{n^2+1}.$$

3.3 Intégration par changement de variable

Théorème 3.4 *Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Alors on a pour toute fonction f continue*

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \Big[F\big(\varphi(x)\big)\Big]_\alpha^\beta} \tag{1}$$

où F est une primitive quelconque de f.

Exercice 3.5 (Preuve) *Considérer la dérivée de la fonction $F \circ \phi$, et intégrer...*

L'égalité (1) admet les deux lectures (et donc les deux applications) suivantes :

— 1ère lecture : si l'intégrale à calculer se présente sous la forme

$$I = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$$

alors l'égalité $I = [F(\varphi(x))]_\alpha^\beta$ du théorème fournit un calcul direct de I. En pratique, ceci revient simplement à remarquer qu'une primitive de $u \mapsto f(\varphi(u))\,\varphi'(u)$ est donnée par $u \mapsto F(\varphi(u))$ lorsque F est une primitive quelconque de f.

— 2de lecture **(Méthode de changement de variable)** : la première égalité dans (1) peut être intéressante pour intégrer $f(x)$ si l'on peut trouver une fonction φ telle que $u \mapsto f(\varphi(u))\,\varphi'(u)$ soit plus simple à intégrer que $x \mapsto f(x)$. Ceci revient à effectuer le changement de variable $x = \varphi(u)$, comme explicité dans l'exemple 3.1 ci-dessous.

Exemple 3.1 *Calcul de*

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

La méthode ci-dessous est fondée sur la formule (1), mais nous la présentons sous une forme usuelle plus pratique (à retenir). On pose

$$\forall x \in \Big[1/2, \sqrt{3}/2\Big], \quad x = \sin u \quad (\textit{donc } u \in J := [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]).$$

On obtient

- $$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = |\cos u| = \cos u > 0 \ \textit{car } u \in J \tag{2a}$$
- $$\frac{dx}{du}(u) = \cos(u) \qquad \textit{ce qu'on écrit sous le forme : } dx = \cos(u)\,du \tag{2b}$$
- $$\begin{cases} x = \frac{1}{2} & \longrightarrow \quad u = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} & \longrightarrow \quad u = \frac{\pi}{3}. \end{cases} \tag{2c}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin^2(u)}{\cos(u)}\,\cos(u)\,du \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^2 u\,du \\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\cos 2u)\,du = \frac{1}{2}\left[u - \frac{\sin 2u}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{12}\ .\end{aligned}$$

Il existe un autre type de changement de variable fondé sur le théorème suivant.

Théorème 3.5 *Soit ψ une fonction continûment dérivable et strictement monotone sur $[a,b]$, dont la dérivée ne s'annule pas sur $[a,b]$ (donc ψ est une bijection de $[a,b]$ sur son image J, et sa fonction réciproque ψ^{-1} est continûment dérivable). Alors on a pour toute fonction g continue*

$$\int_a^b g\big(\psi(x)\big)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(t)\,(\psi^{-1})'(t)\,dt.$$

Preuve. Soit H une primitive de $g \circ \psi$. Alors

$$\int_a^b g\big(\psi(x)\big)\,dx = \int_a^b (g\circ\psi)(x)\,dx = \Big[H(x)\Big]_a^b = H(b) - H(a).$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\forall t \in J, \quad (H\circ\psi^{-1})'(t) &= H'\big(\psi^{-1}(t)\big)\cdot(\psi^{-1})'(t) \\ &= (g\circ\psi)(\psi^{-1}(t))\cdot(\psi^{-1})'(t) \\ &= g(t)\cdot(\psi^{-1})'(t).\end{aligned}$$

Donc $H\circ\psi^{-1}$ est une primitive de $g(t)\,(\psi^{-1})'(t)$, de sorte que

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(t)\,(\psi^{-1})'(t)\,dt = \Big[(H\circ\psi^{-1})(t)\Big]_{\psi(a)}^{\psi(b)} = H(b) - H(a).$$

Ceci démontre l'égalité du théorème. □

L'égalité du théorème 3.5 peut être intéressante pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$ lorsque $f(x)$ se présente comme une fonction d'une certaine expression $\psi(x)$, c'est-à-dire si $f(x) = g\big(\psi(x)\big)$. En fait ce sera intéressant si l'intégrale $\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(t)\,(\psi^{-1})'(t)\,dt$ est plus simple à calculer. Dans ce cas on effectue le changement de variable $t = \psi(x)$ selon le schéma de l'exemple 3.2 suivant :

Exemple 3.2 *Calcul de*

$$\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx.$$

Comme la fonction à intégrer est une fonction de e^x, on pose

$$\forall x \in [0,1], \quad t = e^x,$$

en remarquant que la fonction exponentielle est bien une bijection dérivable de $[0,1]$ *dans* $[1,e]$ *dont la dérivée ne s'annule pas. On obtient*

- $$\frac{1}{e^{2x}+1} = \frac{1}{t^2+1} \tag{3a}$$
- $$x = \ln(t), \quad \frac{dx}{dt}(t) = \frac{1}{t}, \qquad \text{ce qu'on écrit sous le forme : } dx = \frac{1}{t}\,dt \tag{3b}$$
- $$\begin{cases} x = 0 & \Longrightarrow & t = 1 \\ x = 1 & \Longrightarrow & t = e. \end{cases} \tag{3c}$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx = \int_1^e \frac{1}{t^2+1}\,\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt.$$

Il reste à calculer cette dernière intégrale, la question générale étant : comment calculer une intégrale (ou les primitives) d'une fraction rationnelle ? Ce sera l'objet de la section 4.

Remarque 3.3 (importante en pratique)
Pour appliquer un changement de variable, il n'est pas utile de connaître par coeur les formules des théorèmes 3.4-3.5. Il faut plutôt retenir le bilan suivant :

(i) Si vous devez intégrer une fonction qui se présente sous la forme $\varphi'(u)\,f(\varphi(u))$ *et si* F *est une primitive de* f*, alors une primitive de* $\varphi'(u)\,f(\varphi(u))$ *est donnée par* $F(\varphi(u))$*. Typiquement, une primitive de* $\varphi'(u)\,(\varphi(u))^\alpha$ *est donnée par* $(\varphi(u))^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ *pour tout réel* α, $\alpha \neq 1$ *; une primitive de* $\varphi'(u)/\varphi(u)$ *est donnée par* $\ln|\varphi(u)|$ *...etc...*

(ii) Si vous devez intégrer une fonction $f(x)$ *et si le fait de remplacer* x *par* $x = \varphi(u)$ *semble intéressant, alors vous pouvez tenter le changement de variable* $x = \varphi(u)$ **selon la procédure de l'exemple 3.1 fondée sur les trois étapes (2a) (2b) (2c)***. Attention la nouvelle fonction à intégrer n'est pas simplement* $f(\varphi(u))$ *car la transformation de "dx" (cf. (2b)) induit aussi une fonction de* u*.*

(iii) Si vous devez intégrer une fonction $f(x)$ *qui se présente comme une fonction d'une certaine expression* $\psi(x)$*, c'est-à-dire si* $f(x) = g\big(\psi(x)\big)$*, alors vous pouvez tenter le changement de variable* $t = \psi(x)$ **selon la procédure de l'exemple 3.2 fondée sur les trois étapes (3a) (3b) (3c)***. Attention la nouvelle fonction à intégrer n'est pas simplement* $g(t)$ *car la transformation de "dx" (cf. (3b)) induit aussi une fonction de* t*.*

(iv) Pour f *donnée, trouver l'éventuelle "bonne" fonction* φ *du (ii) ou l'éventuelle "bonne" fonction* ψ *du (iii) n'est pas facile, et seule la pratique (cf. TD et les exemples des sections suivantes) vous permettent de progresser sur la méthode de changement de variable.*

(v) Les théorèmes, exemples et explications ci-dessus sont donnés avec un choix arbitraire de notations pour les variables (ie. x*,* u *ou* t*) : en pratique les variables d'intégration peuvent être notées différemment. D'où l'importance de comprendre la méthode sans apprendre les formules par coeur.*

Enfin il est à noter que l'exemple 3.2 est assez typique, à savoir : les changements de variable conduisent assez souvent à calculer l'intégrale d'une fraction rationnelle. D'où l'importance de la section suivante.

4 Calcul des primitives des fractions rationnelles.

Définition 4.1 (Fraction rationnelle à coefficients réels)

Une fraction rationnelle (FR) à coefficients réels est le quotient de deux fonctions polynomiales à coefficients réels. Dans la suite une FR générique F sera notée $F = P/Q$ et il sera donc implicite que P et Q sont deux fonctions polynomiales à coefficients réels. Les racines réelles de Q sont appelées les pôles de F, et l'on considère la fonction F sur l'ensemble $\mathbb{R}$ privé des pôles de F. En particulier les primitives de F sont calculées ci-dessous sur un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun des pôles de F.

On rappelle que les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont, ou bien les polynômes de degré 1, ou bien les polynômes de degré 2 n'admettant pas de racines réelles. D'après le théorème de décomposition en produit de polynômes irréductibles (cf. Algèbre 1), toute fonction polynomiale Q à coefficients réels se décompose comme suit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = C\left(\prod_{i=1}^{r}(x-a_i)^{p_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{s}P_j(x)^{q_j}\right), \tag{4}$$

avec $C \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $r, s \in \mathbb{N}$ et avec enfin $P_j \in \mathbb{R}[X]$ irréductible unitaire. Autrement dit, P_j est de la forme $P_j(x) = x^2 + b_j\,x + c_j$ avec $b_j, c_j \in \mathbb{R}$ et $b_j^2 - 4c_j < 0$ (i.e. P_j n'a pas de racine réelle).

Théorème 4.1 (Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle)

Soit $F = P/Q$ une FR avec Q de la forme (4). Alors F se décompose de manière unique comme suit

$$F(x) = A(x) \;+\; \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p_i}\frac{\alpha_{ik}}{(x-a_i)^k} \;+\; \sum_{j=1}^{s}\sum_{\ell=1}^{q_j}\frac{\beta_{j\ell}\,x+\gamma_{j\ell}}{P_j(x)^\ell}, \tag{5}$$

où A est une fonction polynomiale à coefficient réels, et où $\alpha_{ik}, \beta_{j\ell}, \gamma_{j\ell} \in \mathbb{R}$.

Le polynôme A est le quotient dans la division euclidienne de P par Q (il est donc nul si le degré de P est strictement inférieur au degré de Q). Les réels $\alpha_{ik}, \beta_{j\ell}, \gamma_{j\ell}$ se calculent selon des techniques qui seront illustrées à travers des exemples ci-dessous. Les fractions rationnelles $\alpha_{ik}/(x-a_i)^k$ dans (5) sont appelées les éléments simples de 1ère espèce de F. Les fractions rationnelles $(\beta_{j\ell}\,x+\gamma_{j\ell})/P_j(x)^\ell$ dans (5) sont appelées les éléments simples de 2de espèce de F.

Exercice 4.1 *Sans faire le calcul du polynôme A et des constantes de (5), donner la forme de la décomposition en éléments simples des fractions suivantes :*

$$F(x) = \frac{2}{3x-1} \quad F(x) = \frac{4x-1}{x^2+x+1} \quad F(x) = \frac{3x^2+x-2}{(x-3)(x^2+x+1)} \quad F(x) = \frac{-4x^5+3x^4-2x}{(x-3)(x^2+x+1)}$$

$$F(x)=\frac{-4x^5+3x^4-2x}{(x-3)^3(x^2-2x+1)^4(x^2+x+1)^5} \quad F(x)=\frac{x^{2014}+1}{(x-3)^3(x^2-1)^8(x^2+x+1)^5(x^2+1)^2}$$

Exercice 4.2 *Soit $m\in\mathbb{R}$ et $\delta>0$. Vérifier la formule suivante, qu'il peut être utile d'apprendre par coeur (sinon, savoir la retrouver rapidement) :*

$$\int \frac{dx}{(x+m)^2+\delta}=\frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\arctan\left(\frac{x+m}{\sqrt{\delta}}\right).$$

La formule (5) et la linéarité de l'intégrale montrent que, pour intégrer une fraction rationnelle, il suffit de savoir intégrer les fractions (simples) suivantes :

$$f(x)=\frac{1}{(x-a)^k} \qquad \text{(élément simple de 1ère espèce)}$$

$$g(x)=\frac{\beta\,x+\gamma}{(x^2+bx+c)^\ell} \qquad \text{(élément simple de 2ème espèce)}$$

où $a\in\mathbb{R}$, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, et où b et c sont des réels tels que $b^2-4c<0$.

a) *Primitive de $f(x)$ par intégration directe* :

$$\text{pour} \quad k=1, \quad \int f(x)\,dx=\int\frac{1}{x-a}\,dx=\ln|x-a|$$

$$\text{pour} \quad k\geq 2, \quad \int f(x)\,dx=\int(x-a)^{-k}\,dx=\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}=\frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}}$$

b) *Primitive de $g(x)$ dans le cas $\ell=1$:* **le calcul ci-dessous est effectué dans le cas $\ell=1$ uniquement, et à constantes multiplicatives près, le but étant de faire apparaître les termes principaux rencontrés dans le calcul de $\int g(x)\,dx$.**

b1) *Transformer le numérateur $\beta\,x+\gamma$ de $g(x)$ en faisant apparaître la dérivée de x^2+bx+c :*

$$\beta\,x+\gamma=\frac{1}{2}\,\beta\big(2x+b\big)+(\gamma-\frac{1}{2}\,\beta b)$$

d'où

$$\int g(x)dx=\frac{1}{2}\,\beta\int\underbrace{\frac{(2x+b)}{x^2+bx+c}}_{G_1(x)}dx \;+\; (\gamma-\frac{1}{2}\,\beta b)\int\underbrace{\frac{1}{x^2+bx+c}}_{G_2(x)}dx$$

On est donc conduit maintenant à calculer, d'une part $\int G_1(x)\,dx$, d'autre part $\int G_2(x)\,dx$:

b2) *Calcul de $\int G_1(x)\,dx$ par intégration directe :*

$$\int G_1(x)\,dx=\ln(x^2+bx+c)$$

b3) *Calcul de $\int G_2(x)\,dx$: on écrit x^2+bx+c sous sa forme canonique :*

$$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right).$$

De l'exercice 4.2, en notant $\delta := c - \frac{b^2}{4} > 0$, il vient que

$$\int G_2(x)\,dx = \int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{\delta}}\right).$$

Remarque 4.1 *Pour $\ell \geq 2$, on utilise la même méthode.*

— *L'étape b1) donne*

$$\int g(x)dx = \frac{1}{2}\beta \int \underbrace{\frac{(2x+b)\,dx}{(x^2+bx+c)^\ell}}_{G_1(x)} + (\gamma - \frac{1}{2}\beta b) \int \underbrace{\frac{dx}{(x^2+bx+c)^\ell}}_{G_2(x)}$$

— *L'étape b2) donne (toujours par intégration directe) :*

$$\int G_1(x)\,dx = \int (2x+b)\big(x^2+bx+c\big)^{-\ell}\,dx = \frac{1}{(1-\ell)(x^2+bx+c)^{\ell-1}}.$$

— *Pour l'étape b3), voir l'exercice 12 de TD.*

Exercice 4.3 *Calculer $\int F(x)\,dx$ lorsque $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{2x^2-x+5}{x^3-3x-2}$.*

1. *Vérifier que Q admet $x=-1$ comme racine, puis que $Q(x) = (x+1)^2(x-2)$.*
2. *Calcul des réels A, B et C tels que (décomposition en éléments simples de F)*

$$\frac{2x^2-x+5}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \tag{6}$$

   a) *Pour A, multiplier l'égalité (6) par $(x-2)$ puis prendre $x=2$.*
   b) *Pour C, multiplier l'égalité (6) par $(x+1)^2$ puis prendre $x=-1$*
   c) *Pour B, prendre $x=0$ dans (6) (ou encore, multiplier (6) par x et faire $x \to +\infty$).*

3. *En déduire $\int F(x)\,dx$.*

Exercice 4.4 *Calculer $\int F(x)\,dx$ lorsque $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{-3x^2+x+1}{x^3+x-2}$.*

1. *Vérifier que $Q(x) = (x-1)(x^2+x+2)$.*
2. *Calculer A, B et C tels que (s'inspirer de l'exercice précédent)*

$$\frac{-3x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+2} \tag{7}$$

3. *En déduire $\int F(x)\,dx$.*

5 Primitives de fonctions trigonométriques et hyperboliques.

5.1 Intégration des polynômes trigonométriques

— Pour intégrer $(\cos x)^m(\sin x)^n$ où l'un (au moins) des entiers m ou n est impair, on peut procéder par intégration directe (en utilisant au préalable la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$). Voir Exercice 5.1.

— Pour intégrer $(\cos x)^m(\sin x)^n$ avec m et n entiers pairs, on utilise les formules d'Euler ($\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ et $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$) pour se ramener à des produits du type $\cos(kx)\sin(\ell x)$. Ensuite, pour intégrer $\cos(kx)\sin(\ell x)$, on utilise les formules de linéarisation (cf. formulaire). Voir Exercice 5.2.

Exercice 5.1 *Calculer* $\int(\sin x)^4(\cos x)^3\,dx$ *en remarquant que cette intégrale peut être écrite sous la forme* $\int Fct(\sin x)\,\cos x\,dx$ *et en effectuant ensuite une intégration directe.*

Exercice 5.2 *Calculer* $\int(\cos x)^6\,dx$ *en linéarisant* $(\cos x)^6$.

5.2 Intégration des "fractions rationnelles trigonométriques"

On veut calculer

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}\,dx \tag{8}$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont de forme polynômiale.

Proposition 5.1 *On admet la règle suivante : si* $\boxed{f(x)dx}$ *est invariant quand on change* x *en :*

$$\begin{cases} -x, & \textit{alors on pose : } \quad u = \cos x \\ \pi - x, & \textit{alors on pose : } \quad u = \sin x \\ \pi + x, & \textit{alors on pose : } \quad u = \tan x. \end{cases}$$

Si cette proposition ne peut pas être appliquée, on utilise le changement de variable

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

c'est-à-dire $x = 2\arctan t$, donc

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Le problème d'intégration posé dans (8) conduira alors à intégrer une fraction rationnelle en t grâce aux formules classiques suivantes (cf. formulaire) à connaître par coeur :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Exercice 5.3 *Calculer* $\int f(x)dx$ *avec* $f(x) = \dfrac{3-\sin x}{2\cos x + 3tgx}$.

1. *Vérifier que, en changeant* x *en* $\pi - x$*, l'expression* $f(x)dx$ *reste invariante (attention : bien prendre en compte* $f(x)dx$ *et pas seulement* $f(x)$ *dans le changement proposé).*
2. *En posant* $u = \sin x$*, vérifier que*
$$\int \frac{3-\sin x}{2\cos x + 3tgx} dx = \int \frac{u-3}{2u^2-3u-2} du = \int \frac{u-3}{(2u+1)(u-2)} du.$$
3. *En utilisant une décomposition en éléments simples, calculer cette dernière primitive.*
4. *En déduire* $\int f(x)dx$.

Exercice 5.4 *En utilisant le changement de variable* $t = \tan(x/2)$*, calculer* $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$.

5.3 Calcul des primitives de fonctions hyperboliques.

Pour calculer $\int f(e^x, \mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)dx$ avec f de forme rationnelle, on pourra effectuer le changement de variable $t = e^x$ pour se ramener à l'intégration d'une fraction rationnelle en t.

Exercice 5.5 *Calculer* $\displaystyle\int \frac{dx}{chx}$ *et* $\dfrac{dx}{\mathrm{sh}x}$.

6 Fonctions non rationnelles

Exercice 6.1 *En posant* $x = \sin t$*, calculer* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$.

Exercice 6.2 *En posant* $x = \mathrm{sh}t$*, calculer* $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.

Exercice 6.3 *En posant* $x = \mathrm{ch}t$*, calculer* $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$ *pour tout* $a \geq 1$.

Exercice 6.4 *En posant* $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$*, calculer* $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx$.

7 Applications géométriques de l'intégrale

Théorème 7.1 (Longueur d'un arc de courbe) *Soit* $f \in C^1([a,b])$ *et soit* $\mathcal{C}$ *la partie du graphe de* f *comprise entre les points* $A = (a, f(a))$ *et* $B = (b, f(b))$*. Alors la longueur de* $\mathcal{C}$ *est donnée par l'intégrale :*
$$\boxed{\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx.}$$

Exercice 7.1 (Preuve) *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k = 0 \ldots, n$, on note $a_k = a + k(b-a)/n$ et l'on définit le point du plan $A_k = (a_k, f(a_k))$. Soit $\ell_{k,n}$ la longueur du segment de droite $[A_k, A_{k+1}]$.*

1. *Donner une formule reliant $\ell_{k,n}$ avec $f(a_k)$, $f(a_{k+1})$ et n.*
2. *En utilisant un théorème classique démontrer que*

$$\ell_{k,n} = \frac{b-a}{n} \sqrt{1 + (f'(c_k))^2},$$

   où c_k est un point de $[a, b]$ dont on précisera la position.

3. *Quelle est la limite de la suite $(R_n)_n$ définie par $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ell_{k,n}$?*
4. *Conclusion ?*

Exercice 7.2 (Périmètre du cercle) *On considère le cercle unité $\mathcal{C}$ du plan (i.e. le cercle centré en l'origine, de rayon 1).*

1. *Rappeler l'équation cartésienne du cercle unité (i.e. la condition nécessaire et suffisante portant sur les coordonnées (x, y) de M pour que $M \in \mathcal{C}$.)*
2. *Déterminer $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que la longueur de $\mathcal{C}$ soit égale à 4 fois la longueur de la courbe $\mathcal{C}_f$.*
3. *Conclusion ?*

Théorème 7.2 (Aire d'une surface de révolution) *Soit $f \in C^1([a, b])$ une fonction positive sur $[a, b]$ et soit Σ la surface de révolution obtenue en faisant tourner l'arc de courbe $C = AB$ autour de l'axe $0x$. Alors l'aire de la surface de révolution Σ est donnée par :*

$$\boxed{\mathcal{A}(\Sigma) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.}$$

Exercice 7.3 (Aire latérale d'une paraboloïde) *Calculer l'aire latérale du paraboloïde de révolution engendré par l'arc de parabole $y = \sqrt{x}$, pour $0 \leq x \leq 1$.*

Théorème 7.3 (Volume d'un corps de révolution)) *Soit $f \in C^1([a, b])$ une fonction positive sur $[a, b]$. Soit K le corps de révolution obtenu en faisant tourner l'arc de courbe $C = AB$ autour de l'axe $0x$. Alors le volume de K est donné par :*

$$\boxed{V(K) = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx.}$$

Exercice 7.4 (Volume de la sphère de rayon 1.) *Calculer le volume de la sphère unité de l'espace (i.e. la sphère centrée à l'origine, de rayon 1) en considérant celle-ci comme un corps de révolution obtenue par rotation du demi-cercle autour de l'axe $0x$.*

Exercice 7.5 (Volume d'une paraboloïde.) *Calculer le volume du paraboloïde de révolution engendré par $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$.*

8 Compléments

8.1 Calcul approché d'intégrales (méthode des points milieux)

Malgré toutes les techniques du calcul intégral, il existe des fonctions dont on ne sait pas calculer les primitives. Par exemple, en théorie des probabilités (cf. Terminale et cours de 2ème année), on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ si elle admet la densité suivante

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \textit{(fonction de Gauss).}$$

Ceci signifie que

$$\mathbb{P}\big(X \in [a,b]\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx.$$

Cette loi est importante, notamment pour faire des statistiques (intervalles de confiance ou tests). Cependant on ne sait pas calculer les primitives de $e^{-x^2/2}$. On utilise alors des tables de la loi normale qui ont été calculées en appliquant des méthodes de calcul approché d'intégrales (plus compliquées que la méthode abordée ci-dessous).

Méthode des points milieux.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et, pour $0 \leqslant i \leqslant n$, soit $x_i = a + i(b-a)/n$ les points de la subdivision régulière X_n de $[a,b]$. La méthode des points milieux consiste à approcher l'intégrale $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ par les sommes de Riemann particulières suivantes :

$$\boxed{R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)} \quad \text{où } m_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{ milieu de } [x_{i-1}, x_i]$$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \mathcal{I}(f)$. Cependant, comme pour toute méthode d'approximation, il faut savoir en pratique majorer l'erreur commise en fonction de l'entier n quand on approxime $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ par $R_n(f)$. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 8.1 *Si* $f \in C^2([a,b])$, *alors*

$$\boxed{\big|\mathcal{I}(f) - R_n(f)\big| \leq \frac{M\,(b-a)^3}{24\, n^2}}$$

où $M := \max\{|f''(x)|,\ x \in [a,b]\}$.

Exercice 8.1 (Preuve)

1. *Vérifier que*
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx \;-\; \frac{b-a}{n} f(m_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(m_i)\big)\, dx.$$
2. *En appliquant à f la formule de Taylor d'ordre 1 (avec reste d'ordre 2) au point m_i, vérifier que*
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(m_i)\big) dx = f'(m_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - m_i)\, dx + \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''\big(c_i(x)\big)(x-m_i)^2\, dx,$$
où $c_i(x)$ est un point de $[a,b]$ dont on précisera la position.

3. *Que vaut* $\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-m_i)\,dx$ *? (faire un dessin, la réponse est simple !)*
4. *On suppose que la fonction* $x \mapsto f''(c_i(x))$ *est continue sur* $[a,b]$*. En appliquant un théorème du cours (de ce chapitre), montrer qu'il existe* $\gamma_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *tel que :*
$$\frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''\big(c_i(x)\big)(x-m_i)^2\,dx = \frac{1}{2}\,f''(\gamma_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-m_i)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{24\,n^3}f''(\gamma_i).$$
5. *En utilisant la relation de Chasles et la définition de* $R_n(f)$*, déduire des questions précédentes que*
$$\mathcal{I}(f) - R_n(f) = \frac{(b-a)^3}{24\,n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\gamma_i)$$
6. *Démontrer que la quantité suivante*
$$y := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\gamma_i)$$
est une valeur intermédiaire pour la fonction f'' *sur* $[a,b]$ *(Indication : montrer que* y *est compris entre* $m'' = \min\{f''(x),\, x \in [a,b]\}$ *et* $M'' = \max\{f''(x),\, x \in [a,b]\}$*).*
7. *Conclure.*

8.2 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 8.1 *Soit* f *une fonction* $n+1$ *fois continûment dérivable sur* $[a,b]$*. Alors on a, pour tout* $x \in [a,b]$ *:*
$$\boxed{f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\; f^{(n+1)}(t)\,dt.}$$

Exercice 8.2 (Preuve) *Procéder par récurrence en utilisant une intégration par partie.*

Exercice 8.3 *En utilisant le 2d théorème de la moyenne, retrouver la formule de Taylor classique (cf. Analyse 1) à partir de la formule de Taylor avec reste intégral.*

8.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 8.2 *Si* f *et* g *sont continues par morceaux sur* $[a,b]$*, alors*
$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g(x)^2\;dx\right)^{1/2}.$$

Exercice 8.4 (Preuve) *On note*
$$\alpha = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx, \quad \beta = \int_a^b f(x)^2\,dx, \quad \gamma = \int_a^b g(x)^2\,dx.$$
et pour $\lambda \in \mathbb{R}$ *quelconque on pose*
$$P(\lambda) = \int_a^b \big(f(x) + \lambda\,g(x)\big)^2\,dx.$$

1. *Exprimer P comme un polynôme du second degré en λ, avec des coefficients donnés en fonction de α, β, γ.*
2. *Que dire du signe du polynôme P ?*
3. *Conclure.*

Exercice 8.5 (extrait du DS de mars 2015) *Démontrer l'inégalité suivante :*

$$\left| \int_0^{\pi/4} \tan(x)\, e^x \, dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)}.$$

8.4 Comparaison intégrale et série pour fonction positive décroissante

Exercice 8.6 *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue positive, décroissante. On définit les suites $(I_n)_n$ et $(S_n)_n$ par*

$$I_n = \int_1^n f(x)\, dx \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

1. *Les suites $(I_n)_n$ et $(S_n)_n$ sont croissantes, pourquoi ?*
2. *Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comparer $\int_k^{k+1} f(x)\, dx$ avec $f(k)$ d'une part et $f(k+1)$ d'autre part.*
3. *Soit $n \geq 2$. En sommant de $k = 1$ à $n - 1$ les encadrements obtenus dans la question précédente, montrer que*
$$S_n - f(1) \leq I_n \leq S_{n-1}.$$
4. *Conclure que les suites $(I_n)_n$ et $(S_n)_n$ sont de même nature, à savoir : si l'une converge, l'autre aussi ; si l'une diverge, l'autre aussi.*

9 Exercices de TD

9.1 Exercices utilisant des propriétés de l'intégrale (3h00)

Exercice 1 *Soit* $f \in C(\mathbb{R})$ *et* $F(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$.

1. *Montrer que* $F(x)$ *est la valeur moyenne de* f *sur l'intervalle* $[x-1, x+1]$.
2. *Si l'on suppose que* $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l$, *que peut-on dire de* $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ *?*

Exercice 2 *Pour* n *entier non nul, soit* $g_n : I = [0,1] \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$g_n(x) = n + x \text{ si } x < \frac{1}{n} \text{ et } g_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

1. *Calculer l'intégrale* $\int_0^1 g_n(x)dx$.
2. *Soit* $f \in C(I)$ *et* $u_n = \int_0^1 f(x)g_n(x)dx$. *A l'aide d'un théorème de la moyenne, démontrer que* $\lim_n u_n = f(0)$.

Exercice 3 *On rappelle que* $\ln(1+u) \leq u$ *pour tout* $u \geq 0$.

1. *Montrer que pour tout entier* $n \geq 1$, *on a l'inégalité* $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$.
2. *A l'aide d'un théorème de la moyenne, étudier la convergence de la suite*

$$u_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n}\, dx.$$

Exercice 4 *Soit* u *et* v *deux fonctions dérivables sur un segment* I *et* $f \in C(J)$ *où* J *est un intervalle contenant* $u(I) \cup v(I)$. *Montrer que la fonction*

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

est dérivable sur I *et calculer sa dérivée.*

Exercice 5 (extrait du DS mars 2015) *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue, soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *et soient* $a < x$ *des réels. Démontrer qu'il existe* $\gamma \in \mathbb{R}$, *dont on précisera la position, tel que l'on ait :*

$$\int_a^x f(t)\,(x-t)^n\,dt = \frac{f(\gamma)\,(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Exercice 6 *Soit* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

1. *Démontrer que* $\lim S_n = +\infty$.
2. *En encadrant* S_n *par deux intégrales, montrer que* $S_n \sim Cn^{\alpha}$ *où* α *est un réel positif et* C *une constante que l'on déterminera. Indication : considérer l'intégrale* $I_n := \int_0^n \sqrt{x}\,dx$ *et des encadrements simples de* $f(x) := \sqrt{x}$ *sur chaque segment* $[k, k+1]$ *pour* $0 \leq k \leq n$.

9.2 Calculs d'intégrales et de primitives (4h00)

Pour le calcul de primitives, indiquer les intervalles sur lesquels l'intégration convient.

Exercice 7 *Calculer les intégrales et primitives suivantes en précisant le(s) intervalle(s) de définition :*

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3} \quad ; \qquad \int (2t - \frac{1}{t^2})(t^2 + \frac{1}{t})^{1/2} dt \quad ; \quad \int \frac{1+\tan^2(\ln(x))}{x}\,dx.$$

Exercice 8 *Calculer les intégrales et primitives suivantes :*

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+4}}\,dx, \qquad \int x^2 e^x dx, \qquad \int x^2\,\sin(x)\,dx \quad .$$

$$\int \ln(x)\,dx, \qquad \int \arctan(x)\,dx, \qquad \int \cos\big(\ln(x)\big)\,dx, \qquad \int \arcsin(x)\,dx \quad .$$

Exercice 9 *Soit $I = [a,b]$ et $f \in C^1(I)$. Pour $n \geq 1$ on pose : $u_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)dx$.*

1. *Le 2d théorème de la moyenne s'applique-t-il dans l'intégrale ci-dessus ?*
2. *En appliquant la formule d'intégration par parties, calculer $\lim u_n$.*

Exercice 10 *Calculer les intégrales et primitives suivantes :*

$$\int \frac{4x+3}{x^2-3x+2}\,dx, \qquad \int_1^2 \frac{6x+3}{x^2+2x+1}\,dx, \qquad \int \frac{2x+1}{x^2+4x+6}\,dx.$$

Exercice 11 *Calculer les intégrales et primitives suivantes :*

$$\int \frac{dx}{5x^2-2x+1}, \qquad \int_0^{1/2} \frac{3x+2}{4x^2+1}dx, \qquad \int \frac{x^2-2}{x^3-4x}\,dx.$$

Exercice 12

1. *En posant $x = \tan(u)$, calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$.*
2. *Pourquoi ce changement de variable permet-il de calculer la primitive $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^\ell}$ pour tout entier $\ell \geq 2$? (On ne demande pas de détailler les calculs.)*
3. *Déterminer une méthode (sans détailler les calculs) pour calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^\ell}$ lorsque $\ell \geq 2$ et $b^2 - 4c < 0$.*
4. *Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2+4x+6)^2}$.*

9.3 Primitives de fonctions trigonométriques et hyperboliques (2h00)

Exercice 13 *Calculer les primitives suivantes :*

$$\int \cos^2(x)dx, \qquad \int \sin^2(x)dx, \qquad \int \cos^4(x)dx, \qquad \int \cos^3(x)\,\sin^8(x)\,dx.$$

Exercice 14 *En posant $t = \tan(x/2)$, calculer l'intégrale suivante :* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx.$

Exercice 15 *En posant $t = \tan x$, calculer l'intégrale suivante :* $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx.$

Exercice 16 *Vérifier que, si $t = th(\frac{x}{2})$, alors $sh\,x = \frac{2t}{1-t^2}$ et $ch\,x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$. En déduire la primitive suivante :* $\displaystyle\int \frac{1+shx}{1+chx}\,dx.$

9.4 Calculs de primitives de fonctions non rationnelles (1h00)

Exercice 17 *Calculer l'intégrale suivante :* $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx.$

Indication : transformer cette intégrale à l'aide d'un changement de variable naturel. Pour obtenir la nouvelle intégrale, calculer au préalable la dérivée de la fonction $coth(t) := \frac{ch(t)}{sh(t)}$ ...

Exercice 18 *Calculer*

1. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{x+2}\,dx$ *(poser $t = \sqrt{x+1}$)*
2. $\displaystyle\int \frac{\left(\frac{x}{1-x}\right)^{3/2}}{x+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/2}}\,dx$ *(en s'inspirant de l'idée utilisée en 1.)*

9.5 Calculs de longueurs, d'aires et volumes (2h00)

Exercice 19

1. *Soit $a > 0$. Calculer la longueur $L_1(a)$ de la chainette d'équation $f_1(x) = ch(x)$ pour $x \in I = [-a, a]$.*
2. *Calculer la longueur de la parabole $f_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$ sur le même intervalle I.*

Exercice 20 *Calculer l'aire intérieure de l'ellipse d'équation* $\displaystyle\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Exercice 21 (volume et aire latérale d'un entonnoir infini.)

Soit $f(x) = 1/x$ pour $x \in [1, X]$, $X \geq 1$. L'entonnoir $E(X)$ est obtenu par la rotation de cet arc d'hyperbole autour de l'axe Ox.

1. *Calculer le volume $V(X)$ de $E(X)$ et $\lim_{X\to+\infty} V(X)$.*
2. *Sans calculer explicitement l'aire latérale $A(X)$ de $E(X)$, montrer que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} A(X) = +\infty$*

Exercice 22 (Aire latérale d'un ellipsoïde de révolution.)

On considère le solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$. C'est un ellipsoïde de révolution.

1. *Calculer le volume de l'ellipsoïde.*
2. *Déterminer l'aire latérale de l'ellipsoïde, en l'exprimant en fonction de $\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \in [0, 1]$.*

10 Exercices supplémentaires (d'entraînement)

Exercice 23 *Calculer les intégrales et primitives suivantes :*

$$\int_1^3 \frac{x+3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx, \qquad \int \big(\tan(x)+\tan^3(x)\big)\,dx.$$

Exercice 24 *Calculer les intégrales et primitives suivantes :*

$$\int Argsh\,(x)\,dx, \qquad \int_{-1}^1 x\arctan(x)\,dx.$$

Exercice 25 (extrait du DS juin 2011) *On considère la fonction*

$$f(x) = \frac{3(x^2+1)}{x^3+x^2+2x+2}.$$

1. *Décomposer f en éléments simples dans $\mathbb{R}$.*
2. *Calculer une primitive F de f et déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$.*

Exercice 26 (extrait du DS juin 2012) *Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.*

Exercice 27 (extrait du DS de mars 2015) *Pour $n \geq 1$ on considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in [0,1/n]$, $|f_n(x)| \leq 1$ et $\forall x \in [1/n,1]$, $|f_n(x)| \leq x$. On définit $J_n := \int_0^1 (f_n(x))^n\,dx$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.*

Exercice 28 (extrait du DS de mars 2015) *Calculer l'intégrale $\int_3^4 \frac{x+2}{(x-2)(x^2+x+2)}\,dx$.*

Exercice 29 *Calculer les primitives suivantes : $\displaystyle\int \cos^6(x)dx$ et $\displaystyle\int \cos^3(x)\sin^3(x)dx$.*

Exercice 30 *À l'aide du changement de variable $u = \cos x$, transformer l'intégrale suivante en une intégrale d'une fraction rationnelle :*

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^3 x\big(1+\cos^2 x\big)} \qquad \Big(\textit{Réponse : } I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(1-u^2)^2(1+u^2)}\Big).$$

Exercice 31 *Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\cos(x)}$.*

Exercice 32 (extrait du DS de mars 2015) *Dans cet exercice on ne demande pas de calculer les intégrales.*

1. *À l'aide du changement de variable $t = \tan(x/2)$, écrire l'intégrale $I = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{2\cos^2(x)+\tan(x)}\,dx$ sous la forme $\int_a^b F(t)\,dt$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et F une fraction rationnelle, que l'on déterminera.*
2. *À l'aide d'un changement de variable, écrire l'intégrale $J := \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^3}{(1+x^2)^{1/2}}\,dx$ sous la forme $\int_\alpha^\beta G(u)\,du$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et G une fonction de type hyperbolique, que l'on déterminera.*

Exercice 33 *Retrouver le calcul de l'exercice 16 avec le changement de variable $u = e^x$.*

Exercice 34 *À l'aide d'un changement de variable (à déterminer), transformer le calcul de primitive suivant*

$$\int \frac{dx}{1 + (\frac{x+1}{x})^{1/3}}$$

en un calcul de primitive d'une fraction rationnelle.
Réponse. Fraction rationnelle : $\frac{3\,t^2}{(t+1)(t^3-1)^2}$.

Exercice 35 (Extrait du DS de juin 2012)
On considère le solide de révolution (S) engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) de l'arc définie par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, pour $-1 \leq x \leq 1$.

1. *Calculer le volume de (S).*
2. *Calculer l'aire latérale de (S).*

11 Exercices facultatifs

Exercice 36 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$I = \int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+6}}\,dx.$$

Indication : écrire la fonction intégrée sous la forme $u'/\sqrt{u}+C/\sqrt{u}$. Pour intégrer $1/\sqrt{u}$, utiliser la mise sous forme canonique...

Exercice 37 (Application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (DS de juin 2012)

1. *Soit $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que*
$$\forall x \in [0,1], \quad \Big(\int_0^x \phi(t)\,dt\Big)^2 \leq x \int_0^x \phi(t)^2\,dt.$$
2. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Déduire de la question précédente que*
$$\forall x \in [0,1], \quad f(x)^2 \leq x \int_0^x f'(t)^2\,dt.$$
3. *Sous les hypothèses de la question 2, montrer que*
$$\int_0^1 f(x)^2\,dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2\,dt.$$
4. *Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N},\ g^{(k)}(0) = 0$. On suppose en outre qu'il existe une constante M telle que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |g^{(k)}(x)| \leq M$. Que dire de g ?*
5. *Retrouver le résultat de la question 4. à partir de la formule de Taylor.*

Exercice 38 (Approximation d'intégrales, extrait du DS de mars 2012)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction 4-fois dérivable, avec $f^{(4)}$ continue sur $[a,b]$. On admet qu'il existe un polynôme P de degré inférieur à 3, à coefficients réels, tel que

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \quad P(b) = f(b), \quad P'(b) = f'(b).$$

Pour $x \in]a,b[$ fixé, on définit la fonction $\phi_x : [a,b] \to \mathbb{R}$ comme suit :

$$\forall t \in [a,b], \quad \phi_x(t) = f(t) - P(t) - \lambda_x (t-a)^2(t-b)^2,$$

avec $\lambda_x \in \mathbb{R}$ choisi tel que $\phi_x(x) = 0$.

1. *Calculer $\phi_x(t)$ et $\phi_x'(t)$ pour $t = a$ et $t = b$?*
2. *Démontrer que la dérivée ϕ_x' de ϕ_x s'annule en 4 points distincts de $[a,b]$, puis qu'il existe $u := u_x \in]a,b[$ tel que $\phi_x^{(4)}(u) = 0$, où $\phi_x^{(4)}$ est la dérivée 4-ème de ϕ_x.*
3. *En déduire que $\lambda_x = f^{(4)}(u)/24$ et que*
$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(4)}(u)}{24}(x-a)^2(x-b)^2.$$
4. *En déduire que $\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P(x)dx \right| \le M(b-a)^5/24$, où $M = \sup_{u\in[a,b]} |f^{(4)}(u)|$.*

Exercice 39 (Comparaison Intégrales et séries) *Pour cet exercice, on pourra s'inspirer de la méthode utilisée dans l'exercice 8.6.*

1. *Etudier la convergence des suites suivantes :*
$$U_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad V_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad W_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$
2. *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(\alpha) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$
Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la suite $(S_n(\alpha))_{n\ge1}$ converge (justifier votre réponse).

Exercice 40 *La suite $(S_n)_{n\ge2}$ définie par $S_n := \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ converge-t-elle ? (Justifier votre réponse).*

Exercice 41

1. *Soit $\alpha > \beta > 1$. Démontrer qu'il existe une constante positive C telle que*
$$\forall k \ge 1, \quad \frac{\ln(k)}{k^\alpha} \le \frac{C}{k^\beta}.$$
(Indication : utiliser le fait que $k^\beta \ln(k)/k^\alpha$ admet une limite quand $k \to +\infty$, et qu'une suite convergente est bornée.)

2. *Soit $\alpha > 1$. Déduire de la question précédente que la suite $(B_n(\alpha))_{n\geq 2}$ définie par*

$$\forall n \geq 1, \quad B_n(\alpha) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k^\alpha}$$

converge. Indication : utiliser un argument de monotonie, la question 1 et les résultats de l'exercice 39.

Exercice 42 *Le but de cet exercice est de prouver la propriété suivante :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}, \qquad \textit{propriété qu'on écrit aussi} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}. \tag{9}$$

Cette formule (appelée série de Madhava-Leibniz) a été l'une des premières utilisées pour calculer π. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{2k+1}.$$

1. *Démontrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

2. *En déduire que*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx.$$

3. *Calculer la première intégrale ci-dessus.*
4. *En majorant très simplement le quotient $x^{2n+2}/(1+x^2)$ pour $x \in [0,1]$, établir que la seconde intégrale ci-dessus tend vers 0 quand $n \to +\infty$.*
5. *En déduire la propriété (9).*

Exercice 43 *Soit $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan x)^n\, dx$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.*

a) *Calculer I_0 et I_1.*

b) *Etablir une formule de récurrence entre I_n et I_{n-2}, pour $n \geq 2$.*
En déduire la valeur de I_n pour $n \in \mathbb{N}$.

c) *A partir de la relation de récurrence, montrer que la suite (I_n) tend vers 0.*

d) *En déduire que*

$$\ln 2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \qquad \textit{et} \qquad \frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1}.$$

Exercice 44 *Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$. L'exercice a pour but le calcul de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$.*

1. *Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et 1.*
2. *A l'aide du théorème des accroissements finis , montrer que $1 \leq \dfrac{\ln(x)}{x-1} \leq \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in]0,1[$.*
3. *En déduire un encadrement de $R_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{x^2-1} dx$, puis $\lim_{n\to+\infty} R_n$.*
4. *Soit $0 < \varepsilon < 1$; calculer $\int_\varepsilon^1 x^n \ln(x) dx$ en intégrant par parties. En déduire , en faisant tendre ε vers 0, la valeur de $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x) dx$ pour tout entier $n \geq 1$.*
5. *Montrer que $\dfrac{1}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} + \frac{x^{2n}}{1-x^2}$. En déduire l'expression de l'intégrale I en fonction des intégrales $I_1, I_3, \ldots, I_{2n+1}, R_{2n+1}$ pour $n \geq 2$.*
6. *Démontrer la convergence de la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et exprimer l'intégrale I en fonction de $\ell = \lim u_n$.*
7. *Euler a démontré que $\ell = \dfrac{\pi^2}{6}$. En déduire la valeur de l'intégrale I.*

Exercice 45 (Un pas vers la transcendance du nombre e) *On désigne par* exp *la fonction exponentielle, et par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels. Il est bien connu que le nombre $e := \exp(1)$ est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers (concernant les nombres transcendants, on pourra par exemple consulter le site de wikipedia). On pourra vérifier qu'un nombre transcendant ne peut être rationnel (raisonner par l'absurde). On pourra aussi démontrer aisément que, si t est transcendant, alors, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, le nombre t^r n'est pas rationnel (poser $r = p/q$ et raisonner encore par l'absurde). Cependant la réciproque est fausse (le fait que $t^r \notin \mathbb{Q}$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$ n'implique pas que t est transcendant). L'objectif de cet exercice ci-dessous est d'établir que*

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad e^r := \exp(r) \notin \mathbb{Q}. \tag{10}$$

Il suffit évidemment de traiter le cas $r > 0$ (pourquoi ?). Le résultat (10) est loin de suffire pour obtenir la transcendance de $e := \exp(1)$, mais c'est un bon début !

Soit $r := p/q \in \mathbb{Q}$, avec $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ quelconque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit le polynôme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) := \frac{1}{n!}\, x^n\, (qx-p)^n.$$

1. *En développant $P_n(x)$ d'une part, et en utilisant la formule de Taylor pour le polynôme P_n d'autre part, établir que P_n et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en 0 et en p/q (démontrer d'abord le résultat en 0, puis poser $Q_n(x) := P_n(x + p/q)$ pour obtenir le résultat en p/q).*

2. *Pour établir (10), on va procéder par l'absurde en supposant que $e^r \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire que*

$$\exists (u,v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad e^r = \frac{u}{v}. \tag{11}$$

Sous l'hypothèse (11), on définit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n := v \displaystyle\int_0^{p/q} P_n(x)\, \exp(x)\, dx$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégration par parties successives, démontrer que $J_n \in \mathbb{Z}$.

b) Soient $P(x) := x(qx - p)$ et $M := \max\{|P(x)|, x \in [0, p/q]\}$. Établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |J_n| \leq \frac{M^n}{n!}\, v\,(e^r - 1).$$

c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$. Pour cette question, on admettra que, si pour une suite $(u_n)_n$, on a $\lim_n \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$, alors $(u_n)_n$ converge vers 0.

d) Conclure (i.e. trouver la contradiction !).