E.N.S. de Rennes
U.F.R. de mathématiques de Rennes

Mémoire de M2 de préparation à l'agrégation

# Leçon 207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Théo Gherdaoui

*Encadré par :* Isabelle Gruais

Année scolaire 2020-2021

# Sommaire



# Introduction

Le prolongement est le procédé par lequel on étend le domaine d'applicabilité d'une application donnée ce qui a pour effet immédiat d'étendre son champ de compétences. Formellement, on peut aisément prolonger une fonction sur n'importe quel ensemble contenant la source par n'importe quelle valeur, ce qui n'est pas intéressant. Pour qu'un prolongement soit pertinent, il faut qu'il conserve des informations sur la fonction de départ. Dans une première partie, nous nous intéresserons à la préservation de la régularité. Dans une deuxième partie, nous illustrerons les prolongements des applications de la variable complexe à travers celui de la fonction $\Gamma$. Dans les deux parties suivantes, nous travaillerons dans les espaces fonctionnels, afin de conserver l'uniforme continuité ou la norme. En cinquième partie, nous porterons notre étude sur le prolongement des solutions des équations différentielles. Enfin, nous formulerons en dernier lieu une introduction à la notion de distribution. Dans la suite, on appelle prolongement la fonction résultant du procédé de prolongement, conformément à la définition suivante qui sera toujours sous-entendue :

**Définition**

Soient $E, F$ et $G$ trois ensembles, $f : E \to G$, $g : F \to G$ et $E \subseteq F$. On dit que $g$ prolonge $f$ si $g_{|E} = f$.

# 1 Prolongement de fonctions de la variable réelle

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $c \in I$, et $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$.

## 1.1 Par continuité

**Définition 1.1**

On dit que $f$ admet un prolongement continu en $c$ s'il existe $g : I \to \mathbb{R}$, continue en $c$, telle que $g_{|I\setminus\{c\}} = f$.

**Exemples.** *1)* $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x} \in \mathbb{R}$ *admet un prolongement par continuité en* $0$*, appelé sinus cardinal.*

*En effet, considérons* $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

$g$ *est continue en* $0$ *puisque,* $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$|g(x) - g(0)| = \left| \frac{\sin(x) - 0}{x - 0} - 1 \right| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} |\sin'(0) - 1| = |\cos(0) - 1| = 0.$$

*Par construction,* $g$ *coïncide avec* $f$ *sur* $\mathbb{R}^*$*. Donc,* $g$ *est un prolongement de* $f$ *en* $0$*. En utilisant le développement en série entière de* $\sin$*, on peut aussi prolonger* $f$ *par :*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \in \mathbb{R}.$$

*Ce prolongement est de classe* $\mathcal{C}^\infty$*.*

*2) Si* $a \in \mathbb{R}$*, alors* $f_a : x \in \mathbb{R} \setminus \{a\} \mapsto (x-a)\sin\left(\dfrac{1}{x-a}\right) \in \mathbb{R}$ *admet un prolongement par continuité en* $a$*. Considérons*

$$g_a : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} (x-a)\sin\left(\dfrac{1}{x-a}\right) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$g_a$ *est continue en* $a$ *car :* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\},\ |g_a(x) - g_a(a)| \leq |x - a| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$*. Néanmoins, ce prolongement n'est pas dérivable en* $a$*. En effet :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\},\ \frac{g_a(x) - g_a(a)}{x - a} = \sin\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

*qui n'admet pas de limite quand* $x$ *tend vers* $a$*.*

**Remarque.** *On identifiera désormais* $f$ *à son prolongement.*

## 1.2 De classe $\mathcal{C}^k, k \in \overline{\mathbb{N}}$

L'étude s'étend aux fonctions régulières à l'exception d'un point donné en considérant le prolongement par continuité des dérivées successives.

**Définition 1.2**

Soit $k \in \overline{\mathbb{N}}$, $f$ admet un prolongement $\mathcal{C}^k$ en $c$ s'il existe $g : I \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^k$ en $c$, telle que $g_{|I\setminus\{c\}} = f$.

**Exemple.** *La fonction sinus cardinal définie précédemment est un prolongement $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de l'application $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x} \in \mathbb{R}$.*

Établissons un critère pratique permettant de prolonger une fonction en un point :

**Proposition 1.1**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$. Si :

1) $f$ est continue sur $I$ et dérivable sur $I \setminus \{c\}$
2) $\lim\limits_{x\to c} f'(x) := l \in \mathbb{R}$ $(*)$

Alors, $f$ est $\mathcal{C}^1$ en $c$.

*Démonstration.* On applique l'inégalité des accroissements finis : soit $x \in I \setminus \{c\}$. Il existe $\xi_x$ compris strictement entre $x$ et $c$ tel que :

$$f'(\xi_x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Si $x$ tend vers $c$, alors $\xi_x$ tend vers $c$, donc,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} := l.$$

Ainsi, $f$ est dérivable en $c$, et $f'(c) = l$. L'hypothèse $(*)$ assure la continuité de $f'$ en $c$. □

**Corollaire 1.1**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si :

1) $f$ est continue sur $I$ et $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{c\}$
2) $\forall i \in \{0, \dots, k\}, \lim\limits_{x\to c} f^{(i)}(x) \in \mathbb{R}$

Alors, $f$ est $\mathcal{C}^k$ en $c$.

**Exemple.** *Soit* $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. *Montrons par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

*La propriété est vraie au rang $n = 0$ (avec $P_0 = 1$).*
*Supposons que la propriété soit vraie au rang $n$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi^{(n+1)}(x) \underset{H.R.}{=} \frac{d}{dx}\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{-1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)(P_n + P_n')\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\varphi^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \text{ avec } P_{n+1}(X) = -X^2(P_n + P_n')(X).$$

*Le résultat est vrai au rang $n = 0$, et est de surcroît héréditaire, il est donc vrai pour tout $n$, entier naturel. Par croissance comparée,*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to 0^+} \varphi^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0^+} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = \lim_{x\to 0^-} \varphi^{(n)}(x).$$

*Donc, $\varphi$ est $\mathcal{C}^\infty$ en 0.*

**Remarque.** *Cette application permet de construire les fonctions plateaux. Plus précisement, si* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *est un ouvert, et* $K \subseteq \Omega$*, un compact, alors* $\exists \chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *telle que :*

*1)* $0 \leq \chi \leq 1$

*2)* $\chi = 1$ *sur* $K$*.*

# 2 Prolongement de fonctions de la variable complexe

## 2.1 Rappels

Lorsque $\mathbb{C}$ est muni de la topologie de la valeur absolue, le sous-ensemble des fonctions complexes continues sur un ouvert de $\mathbb{C}$ formé des fonctions holomorphes, *i.e.* dérivables par rapport à la variable complexe, joue un rôle essentiel en analyse complexe du fait qu'il coïncide avec l'ensemble des fonctions analytiques. On rappelle deux résultats fondamentaux de la théorie des fonctions holomorphes, l'analyticité et le principe des zéros isolés.

**Proposition 2.1 (Analyticité des fonctions holomorphes)**

Soit $D$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Alors, $f$ est développable en série entière au voisinage de chacun de ses points. Plus précisement :
$\forall c \in D$, $\forall r > 0$ tel que $\overline{D(c,r)} \subseteq D$, $\exists! (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall z \in D(c,r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$$

avec, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(c,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{n+1}} \mathrm{d}\xi.$$

De l'analyticité et de l'unicité du développement en série entière donné par la formule de Cauchy, découle le principe des zéros isolés.

**Proposition 2.2 (Principe des zéros isolés)**

Soit $D$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f$ et $g$ deux fonctions holomorphes sur $D$, alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $f = g$ sur $D$
2) $\{z \in D | f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation
3) $\exists c \in D$ tel que $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c)$.

## 2.2 Prolongement ponctuel

Le prolongement des fonctions holomorphes est essentiellement motivé par le principe des zéros isolés qui les distingue du reste des fonctions différentiables après identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$. En particulier, le prolongement continu d'une fonction holomorphe est holomorphe. En plus d'être borné au voisinage de la singularité, il se caractérise par un résidu nul en cette singularité.

**Théorème 2.1 (Prolongement de Riemann)**

Soit $D$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $c \in D$, et $f : D \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $f$ admet un prolongement holomorphe sur $D$
2) $f$ admet un prolongement continu sur $D$
3) $f$ est bornée au voisinage de $c$
4) $\lim\limits_{z \to c} ((z-c)f(z)) = 0$.

*Démonstration.* On a trivialement 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4). Montrons 4) $\Rightarrow$ 1). On peut supposer, quitte à translater que $c = 0$.

On définit $g : z \in D \mapsto \begin{cases} z^2 f(z) \text{ si } z \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Montrons que $g$ est holomorphe sur $D$. Elle est holomorphe sur $D \setminus \{0\}$ comme produit de telles fonctions. Grâce à l'hypothèse 4), on a :

$$\forall z \in D \setminus \{0\}, \; \frac{g(z) - g(0)}{z - 0} = \frac{z^2 f(z)}{z} = z f(z) \underset{z \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Par suite, $g$ est holomorphe en 0 et $g'(0) = 0$. Elle est donc développable en série entière au voisinage de 0 : $\forall r > 0$, tel que $\overline{D(0,r)} \subseteq D$, $\forall z \in D(0,r)$, $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Remarquons que, $a_0 = g(0) = 0$ et $a_1 = g'(0) = 0$. Il vient donc :

$$\forall z \in D(0,r), \; g(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n = z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} z^n = z^2 f(z).$$

$z \in D(0,r) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} z^n$ est donc un prolongement holomorphe de $f$ autour de 0. D'où 1). $\square$

## 2.3 Exemple de prolongement : la fonction $\Gamma$ d'Euler

On se propose d'appliquer la théorie du prolongement des fonctions holomorphes à la fonction spéciale $\Gamma$ qui prolonge la fonction factorielle définie sur $\mathbb{N}$ après avoir vérifié qu'elle est holomorphe sur son domaine de définition.

**Définition 2.1 (Fonction $\Gamma$ d'Euler)**

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > 0$, on définit :

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

Montrons que cette application est bien définie, c'est-à-dire que l'intégrale converge :

1) Au voisinage de 0 : $\left|t^{z-1} e^{-t}\right| = t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} t^{\mathrm{Re}(z)-1} = \frac{1}{t^{1-\mathrm{Re}(z)}}$. Puisque $1 - \mathrm{Re}(z) < 1$, l'intégrale converge en vertu du critère de Riemann.
2) Au voisinage de $+\infty$ : $\left|t^2 t^{z-1} e^{-t}\right| = t^{\mathrm{Re}(z)+1} e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, $\left|t^{z-1} e^{-t}\right| = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. L'intégrale est absolument convergente, donc convergente.

**Remarque.** *On note* $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\}$.

**Proposition 2.3**

1) La fonction $\Gamma$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^+$.
1) Elle vérifie la relation fonctionelle : $\forall z \in \mathbb{C}^+,\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$.

*Démonstration.* Le premier point découle directement du théorème d'holomorphie sous l'intégrale. Pour le deuxième point, il s'agit d'effectuer proprement une intégration par partie. □

**Théorème 2.2 (Prolongement de Γ)**

La fonction $\Gamma$ peut être prolongée sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$. Ce prolongement définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant des pôles simples en chaque entier négatif, et,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Res}_{-n}(\Gamma) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Ce prolongement est unique. De plus,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N},\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

*Démonstration.* $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > -k$, on définit :

$$\Gamma_k(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)\dots(z+k-1)}.$$

Elle est holomorphe sur $\Omega_k := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > -k\} \setminus \{0, \dots, -(k-1)\}$. Elle définit une application méromorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > -k\}$ ayant des pôles simples en les $\{0, -1, \dots, -(k-1)\}$ dont les résidus valent : $\forall j \in \{0, 1, \dots, (k-1)\}$,

$$\mathrm{Res}_{-j}(\Gamma_k) = \lim_{z \to -j} (z+j)\Gamma_k(z) = \lim_{z \to -j} \frac{\Gamma(k-j)}{z(z+1)...(z+j-1)(z+j+1)...(z+k-1)}$$

$$\mathrm{Res}_{-j}(\Gamma_k) = \frac{(k-j-1)!}{(-j)(-j+1)...(-1)(1)...(k-j-1)} = \frac{(k-j-1)!}{(-1)^j j!(k-j-1)!} = \frac{(-1)^j}{j!}.$$

$$\forall z \in \mathbb{C}^+,\ \Gamma_k(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)\dots(z+k-1)} = \frac{\Gamma(z+k-1)}{z(z+1)\dots(z+k-2)} = \dots = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z),$$

donc $\Gamma_k$ est bien un prolongement de $\Gamma$. De plus, l'ouvert $\Omega_k$ étant connexe, le principe des zéros isolés assure l'unicité de ce prolongement, donc,

$$\forall k \leq l,\ \Gamma_l|_{\Omega_k} = \Gamma_k.$$

On définit donc

$$\tilde{\Gamma} : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \Gamma_k(z) \text{ où } \mathrm{Re}(z) > -k \end{cases}$$

Cette application est bien définie, par la remarque précédente. C'est une application méromophe sur $\mathbb{C}$, ayant des pôles simples dont les résidus sont donnés par la formule annoncée. Elle prolonge bien $\Gamma$ sur son domaine de définition. Par connexité de $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$, ce prolongement est unique.
Enfin $z \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N} \mapsto \tilde{\Gamma}(z+1)$ et $z \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N} \mapsto z\tilde{\Gamma}(z)$ sont deux applications holomorphes qui coïncident sur l'ouvert connexe $\mathbb{C}^+$, par le théorème des zéros isolés, elles sont égales. Ceci conclut. □

# 3 Prolongement dans les espaces métriques

Les espaces métriques sont naturellement munis de la topologie associée à la distance où tout point $x$ admet pour base de voisinages l'ensemble des boules ouvertes centrées en $x$. Un raisonnement analogue à celui de la Section 1 permet de construire des prolongements continus locaux. Dans cette section, abandonnant le point de vue local, on utilise les ressources de la topologie pour construire le prolongement par densité d'une fonction uniformément continue à condition de plonger son ensemble d'arrivée dans un complété le cas échéant.

## 3.1 Théorème de prolongement des applications uniformément continues

**Théorème 3.1 (Prolongement des applications uniformément continues)**

Soit $(E, d_E)$ un espace métrique, $(F, d_F)$ un espace métrique complet, $D \subseteq E$, une partie dense dans $(E, d_E)$, et $f : D \to F$, une application uniformément continue.
Alors, $f$ admet un unique prolongement $\tilde{f} : E \to F$, qui est uniformément continu.

**Remarque.** *L'hypothèse de complétude est indispensable : $f : x \in \mathbb{Q} \mapsto x \in \mathbb{Q}$ se prolonge en $\tilde{f} : x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.*

*Démonstration.* Soit $x \in E \setminus D$, par densité de $D$, $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ dans $(E, d_E)$. Alors, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(F, d_F)$ comme image d'une suite de Cauchy (car convergente) par une application uniformément continue. Par complétude de $(F, d_F)$, la suite converge dans $(F, d_F)$. On souhaiterait définir :

$$\tilde{f} : x \in E \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in D \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \text{ sinon, où } (x_n)_n \in D^{\mathbb{N}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \text{ dans } (E, d_E) \end{cases} \in F.$$

Montrons que cette limite ne dépend pas de la suite qui approxime $x$ dans $D$ :
Soient $(x_n)_n, (x'_n)_n \in D^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x'_n = x$. Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x'_n).$$

$f$ est uniformément continue donc,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x, y) \in D^2,\ d_E(x, y) \leq \delta \Longrightarrow d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \ (**).$$

Par définition, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \begin{cases} d_E(x_n, x) \leq \delta/2 \\ d_E(x'_n, x) \leq \delta/2 \end{cases}$, donc $d_E(x_n, x'_n) \leq \delta$.

Ainsi, par $(**)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $d_F(f(x_n), f(x'_n)) \leq \varepsilon$. Par continuité de la distance, on obtient l'égalité voulue, $\tilde{f}$ est bien définie. C'est par définition un prolongement de $f$.

Montrons que $\tilde{f}$ est uniformément continue : soit $\varepsilon > 0$, soient $x, y \in E$ avec $d_E(x, y) \leq \delta/2$ (où $\delta$ est le module d'uniforme continuité de $f$). Considérons $(x_n), (y_n) \in D^{\mathbb{N}}$, des suites d'approximation de $x$ et $y$. Alors,

$$d_F(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq d_F(\tilde{f}(x), f(x_n)) + d_F(f(x_n), f(y_n)) + d_F(f(y_n), \tilde{f}(y))$$

pusique $\tilde{f}|_D = f$. Les termes extrémaux sont majorés par $\varepsilon$ pour $n$ asssez grand, par définition de $\tilde{f}$. Pour le terme central, remarquons, que

$$d_E(x, y) \leq \delta/2 \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, d_E(x_n, y_n) \leq \delta.$$

L'uniforme continuité de $f$ donné en $(**)$ conclut. □

**Remarque.** *Si $E$ et $F$ sont des espaces vectoriel, et si $f : D \to F$ est linéaire, son prolongement demeure, par construction, une application linéaire.*

Le théorème 3.1 de prolongement est un outil essentiel de l'analyse. Par exemple, il intervient dans la construction de l'intégrale de Riemann, l'identification des compacts dans un ensemble de fonctions continues, la définition de la transformation de Fourier.

## 3.2 Applications du théorème de prolongement

### 3.2.1 Construction de l'intégrale de Riemann

Par définition, l'intégrale de Riemann d'une fonction définie sur un segment est l'aire algégrique de la surface limitée par le graphe de cette fonction. Le théorème 3.1 permet de théoriser l'idée que cette aire peut être approchée avec une erreur infiniment petite par la réunion disjointe de surfaces rectangulaires, à condition de montrer que l'ensemble des fonctions en escalier sur un segment de $\mathbb{R}$ est dense dans celui de fonctions intéressantes en analyse, par exemple celui des fonctions continues.

Soit $A := \{f : [a; b] \to \mathbb{R} \text{ en escalier}\}$. On définit $I_r : (A, \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |.|)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{R},\ \forall c, d \in \mathbb{R},\ a \leq c \leq d \leq b,\quad I_r(k\mathbb{1}_{[c;d]}) = k(d - c).$$

On étend la défintion par linéarité à $A$. Elle est uniformément continue :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall f, g \in A,\ \|f - g\|_\infty \leq \delta := \varepsilon/(b - a),\ |I_r(f - g)| \leq \varepsilon$$

$(\mathbb{R}, |.|)$ étant complet, on peut appliquer le théorème précédent, et prolonger de manière unique $I_r$ sur $\bar{A}$, et $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}) \subseteq \bar{A}$.

### 3.2.2 Théorème d'Ascoli

Le théorème d'Ascoli qui caractérise les compacts d'un ensemble de fonctions continues est une conséquence du théorème 3.1 de prolongement quand la topologie est celle d'un espace méttrique. La démonstration de ce résultat est un défi technique amplement justifié du fait que la compacité est une condition de clôture topologique difficile à identifier en-dehors du cas réel.

**Théorème 3.2 (Ascoli)**

Soit $(E, d_E)$ un espace métrique compact, $(F, d_F)$ un espace métrique complet. Considérons $A \subseteq \mathcal{C}^0(E, F)$, alors :

$$A \text{ est relativement compacte dans } (\mathcal{C}^0(E, F), d_\infty) \text{ ssi}$$

- $*$ $A$ est équicontinue, *i.e. :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in E,\ \forall f \in A,\ d_E(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

- $*$ $\forall x \in E, A(x) := \{f(x), f \in A\}$ est relativement compacte dans $(F, d_F)$.

**Remarques.** *1) Le théorème d'Ascoli reste vrai si on ne suppose plus $(F, d_F)$ complet mais il ne découle plus du théorème de prolongement des applications uniformément continues.*

*2) Dans le cas où $(F, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, la condition de relative compacité est équivalente au fait que la partie soit bornée.*

*3) Le théorème est mis en défaut si $(E, d_E)$ n'est plus compact : soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On définit :*

$$A := \{\tau_{-n}(f), n \in \mathbb{N}\}$$

*où,* $\forall n \in \mathbb{N},\ \tau_{-n}(f) := f(\cdot + n)$.

*Étape 1 : A est équicontinue : f est continue à support compact donc uniformément continue (Heine). Ainsi,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

*Or,* $\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x + n - (y + n)| = |x - y| \leq \delta$*, donc,*

$$|\tau_{-n}(f)(x) - \tau_{-n}(f)(y)| = |f(x + n) - f(y + n)| \leq \varepsilon.$$

*Étape 2 :* $\forall x \in \mathbb{R},\ A(x)$ *est relativement compacte dans* $(\mathbb{R}, |.|)$ *:*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\tau_{-n}(f)(x)| = |f(x + n)| \leq \|f\|_\infty .$$

*Étape 3 : montrons que la conclusion du théorème est mise en défaut : supposons qu'il existe une extractrice* $\varphi$ *telle que* $(\tau_{-\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers g dans* $(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$*. Ainsi :*

$$\|f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \left\|\tau_{-\varphi(n)}(f)\right\|_\infty = \|g\|_\infty .$$

*En particulier, la convergence est simple, donc,* $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \tau_{-\varphi(n)}(f)(x) = \lim_{n\to\infty} f(x + \varphi(n)) = 0.$$

*puisque f est à support compact. Par conséquent, g est nulle, d'où* $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 0$ *ce qui contredit l'hypothèse (*$(\mathbb{R}, |.|)$ *est non compact).*

**Lemme 3.1**

Toute espace métrique compact est séparable.

*Démonstration.* Soit $(E, d_E)$ espace compact, alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E \subseteq \bigcup_{x\in E} \mathcal{B}^\circ_{d_E}(x, 1/n)$. Par la propriété de compacité de Borel-Lebesgue, $\exists N_n \in \mathbb{N}, \exists x^n_1, \ldots, x^n_{N_n} \in E$ tel que $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_n} \mathcal{B}^\circ_{d_E}(x^n_i, 1/n)$. Posons $D := \{x^n_i,\ i \in \{1, \ldots, N_n\}, n \in \mathbb{N}^*\}$. C'est une partie dénombrable. Montrons qu'elle est dense dans $(E, d_E)$ : soit $x \in E$. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n_0} \leq \varepsilon$. Alors $x \in \bigcup_{i=1}^{N_{n_0}} \mathcal{B}^\circ_{d_E}(x^{n_0}_i, 1/n_0)$. Donc, $\exists i \in \{1, \ldots, N_{n_0}\}$ tel que, $d_E(x, x^{n_0}_i) \leq \dfrac{1}{n_0} \leq \varepsilon$, et $x^{n_0}_i \in D$. Ceci conclut. □

Nous pouvons désormais entreprendre la démonstration du théorème d'Ascoli :

*Démonstration.* ($\Leftarrow$) Pour le sens réciproque (sens utile en pratique), on se donne $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$. Montrons qu'elle admet une sous-suite convergente dans $A$ pour $d_\infty$. Par le lemme, $(E, d_E)$ admet une partie dénombrable dense, notée $D = \{d_n, n \in \mathbb{N}\}$. On procède par extraction diagonale :

- $(f_n(d_0))_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{A(d_0)}^{\mathbb{N}}$ qui est compacte dans $(F, d_F)$ par hypothèse, donc il existe $\varphi_0$ une extractrice, telle que $(f_{\varphi_0(n)}(d_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, d_F)$.
- $(f_{\varphi_0(n)}(d_1))_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{A(d_1)}^{\mathbb{N}}$ qui est compacte dans $(F, d_F)$, donc il existe $\varphi_1$ une extractrice, telle que $(f_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)}(d_1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, d_F)$.

- On construit ainsi par récurrence, pour tout entier naturel $k$, une extractrice $\varphi_k$ telle que : $(f_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_k(n)}(d_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, d_F)$.

Définissons alors l'extractrice $\psi$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \psi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$. Par construction, $\forall k \in \mathbb{N}$ $(f_{\psi(n)}(d_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, d_F)$.

On définit alors $f : d \in D \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} f_{\psi(n)}(d) \in F$. On souhaite appliquer le théorème de prolongement des applications uniformément continues, $(F, d_F)$ étant complet et $D$ dense dans $(E, d_E)$, il suffit de montrer que $f$ est uniformément continue ; on utilise l'équicontinuité de $A$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{\psi(n)} \in A$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x, y \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ d_E(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_F(f_{\psi(n)}(x), f_{\psi(n)}(y)) \leq \varepsilon.$$

En passant à la limite quand $n$ tend vers l'infini, on obtient (par continuité de la distance) l'uniforme continuité de $f$.
Ainsi, il existe un unique prolongement de $f$ à $E$, noté $\tilde{f}$, uniformément continu. Nous avons donc exhibé un "bon candidat".

$$\text{Montrons que } \lim_{n\to+\infty} d_\infty(f_{\psi(n)}, \tilde{f}) = 0.$$

On sait que, par équicontinuité de $A$ et uniforme continuité de $\tilde{f}$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E,\ d_E(x, y) \leq \delta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d_F(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq \varepsilon \\ \forall g \in A,\ d_F(g(x), g(y)) \leq \varepsilon \end{array} \right. \quad (***).$$

Utilisons à nouveau la compacité de $(E, d_E)$ : par densité de $D$, $E \subseteq \bigcup\limits_{x\in D} \mathcal{B}^\circ_{d_E}(x, \delta)$, par la propriété de compacité de Borel-Lebesgue, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists d_1, \dots, d_N \in D$, tel que $E \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{N} \mathcal{B}^\circ_{d_E}(d_i, \delta)$.

Soit $x \in E$, $\exists i \in \{1, \dots N\}$ tel que $d_E(x, d_i) \leq \delta$. Par inégalité triangulaire (et comme $\tilde{f}|_D = f$),

$$d_F(f_{\psi(n)}(x), \tilde{f}(x)) \leq d_F(f_{\psi(n)}(x), f_{\psi(n)}(d_i)) + d_F(f_{\psi(n)}(d_i), f(d_i)) + d_F(f(d_i), \tilde{f}(x)).$$

La propriété $(***)$ permet de majorer les termes extremaux par $\varepsilon$. Il reste à majorer le terme central pour $n$ assez grand, indépendamment de $x$. Le point central ici est le fait que les $d_i$ sont en nombre fini (par compacité), donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall i \in \{1 \dots N\},\ d_F(f_{\psi(n)}(d_i), f(d_i)) \leq \varepsilon.$$

Pour résumer, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0,\ \forall x \in E,\ d_F(f_{\psi(n)}(x), \tilde{f}(x)) \leq 3\varepsilon$. Ceci conclut.

$(\Rightarrow)$ Montrons premièrement que : $\forall x \in E,\ A(x)$ est relativement compacte dans $(F, d_F)$. Soit $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{A(x)}^{\mathbb{N}}$ une suite. Par définition de $A(x)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{A}^{\mathbb{N}}$, qui est, par hypothèse, compacte dans $(\mathcal{C}^0(E, F), d_\infty)$, donc il existe une application $f \in \overline{A}$ et une extractrice $\varphi$ telles que $d_\infty(f_{\varphi(n)}, f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. La convergence uniforme impliquant la convergence simple, on obtient $d_F(f_{\varphi(n)}(x), f(x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par suite, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\overline{A}$ fermée, ce qui conclut.

Montrons enfin l'équicontinuité de $A$ : on utilise l'hypothèse de compacité de $\overline{A}$ dans $(\mathcal{C}^0(E, F), d_\infty)$.
$\forall \varepsilon > 0,\ \overline{A} \subseteq \bigcup\limits_{f\in A} \mathcal{B}^\circ_{d_\infty}(f, \varepsilon)$, par Borel-Lebesgue, $\exists N \in \mathbb{N}, \exists g_1, \dots, g_N \in A$ tel que $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{N} \mathcal{B}^\circ_{d_\infty}(g_i, \varepsilon)$.
Par le théorème de Heine, $(E, d_E)$ étant compact, les fonctions $g_i$ sont uniformément continues, et étant en nombre fini, quitte à considérer le minimum des modules d'uniforme continuité, on a :

$$\exists \delta > 0,\ \forall x, y \in E,\ d_E(x, y) \leq \delta \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, N\},\ d_F(g_i(x), g_i(y)) \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $\forall x, y \in E,\ d_E(x, y) \leq \delta,\ \forall f \in A,\ \exists i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $d_\infty(f, g_i) \leq \varepsilon$.

$$d_F(f(x), f(y)) \leq d_F(f(x), g_i(x)) + d_F(g_i(x), g_i(y)) + d_F(g_i(y), f(y)) \leq 2d_\infty(f, g_i) + \varepsilon \leq 3\varepsilon.$$

Ceci montre l'équicontinuité de $A$. $\square$

### 3.2.3 Prolongement de la transformée de Fourier

On rappelle la définition de l'espace de Schwartz :

**Définition 3.1**

On définit :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right| < \infty \right\}$$

On définit également la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ comme : $\forall (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\varphi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}{\longrightarrow}} \varphi \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \partial^\beta \left(\varphi_n(x) - \varphi(x)\right) \right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Rappelons les propriétés fondamentales de cet espace :

**Proposition 3.1**

1. $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ x \mapsto x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
2. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq \bigcap\limits_{1 \le p \le \infty} L^p(\mathbb{R}^d)$.
3. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour la convergence définie précedemment.

On définit maintenant la transformée de Fourier sur l'espace de Schwartz comme :

**Définition 3.2**

$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{F}(\varphi) : \xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} \mathrm{d}x$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$.

Rappelons les propriétés élémentaires de la transformée de Fourier, le lien entre la dérivation et la multiplication par un polynôme.

**Proposition 3.2**

1) $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \partial^\alpha \mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(\xi \mapsto (-i\xi)^\alpha \varphi(\xi))$.
2) $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \forall \beta \in \mathbb{N}^d,\ \mathcal{F}(\partial^\beta \varphi) = \xi \mapsto (i\xi)^\beta \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$.

*Démonstration.* Le point 1) s'obtient par théorème de dérivabilité sous l'intégrale. Pour le point 2), il suffit de réaliser des intégrations par parties successives. □

Énonçons alors le théorème qui fait l'objet d'un prolongement :

**Théorème 3.3**

$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un isomorphisme, et, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi) : x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} \mathrm{d}\xi.$$

De plus, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \langle \mathcal{F}(\varphi), \mathcal{F}(\psi) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

En particulier, $\mathcal{F}$ s'étend en une application linéaire continue à $L^2(\mathbb{R}^d)$ de manière unique.

**Remarque.** *On peut démontrer que cette extension est en fait un isomorphisme isométrique (à la constante* $1/(2\pi)^{d/2}$ *près).*

**Lemme 3.2**

1) $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire continue pour la convergence définie précedemment.
2) $\forall \sigma > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) := \exp\left(-\frac{x^2\sigma}{2}\right)$. Alors,

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f)(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma}\right).$$

*Démonstration.* 1) Montrons que $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$\left|x^\alpha \partial^\beta \mathcal{F}(\varphi)(x)\right| = \left|\mathcal{F}(\xi \mapsto \partial^\alpha\left(\xi^\beta \varphi(\xi)\right))(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha \left(\xi^\beta \varphi(\xi)\right) e^{-i\langle \xi,x\rangle} \mathrm{d}\xi\right|$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|\xi|^{d+1}} \mathrm{d}\xi\right) \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left|(1+|\xi|)^{d+1} \partial^\alpha \left(\xi^\beta \varphi(\xi)\right)\right|.$$

Par la formule de Leibnitz,

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|\xi|^{d+1}} \mathrm{d}\xi\right) \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d \\ |\gamma| \leq |\alpha|}} \binom{\alpha}{\gamma} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left|\partial^\gamma \left(\xi^\beta\right) \partial^{\alpha-\gamma} \left(\varphi(\xi)\right) (1+|\xi|^{d+1})\right|$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|\xi|^{d+1}} \mathrm{d}\xi\right) \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d \\ |\gamma| \leq |\alpha| \wedge |\beta|}} \binom{\alpha}{\gamma} \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left|\xi^{\beta-\gamma} \partial^{\alpha-\gamma} (\varphi)(\xi) (1+|\xi|^{d+1})\right| < \infty.$$

Ceci montre l'inclusion. De plus, elle assure la continuité séquentielle de $\mathcal{F}$.

2) Calculons la transformée de Fourier de la gausienne : On cherche à calculer, $\forall \xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-x^2\sigma}{2}\right) \exp(-ix\xi) \mathrm{d}x.$$

On définit, $\forall z \in \mathbb{C},\ g(z) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-x^2\sigma}{2}\right)\exp(-ixz)\mathrm{d}x$. Par théorème d'holomorphie sous l'intégrale, $g$ est une application entière. De plus, $\forall z \in \mathbb{R},\ g(iz) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-x^2\sigma}{2} + xz\right)\mathrm{d}x$.

$$g(iz) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2}\left(x - \frac{z}{\sigma}\right)^2 + \frac{z^2}{2\sigma}\right)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}}\exp\left(\frac{-(iz)^2}{2\sigma}\right).$$

Donc, $g$ et $z \mapsto \sqrt{\dfrac{2\pi}{\sigma}}\exp\left(\dfrac{-z^2}{2\sigma}\right)$ sont deux fonctions entières qui coïncident sur $i\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ étant connexe, le principe des zéros isolés permet de conclure à l'égalité sur $\mathbb{C}$. Ainsi,

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f)(\xi) = g(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}}\exp\left(\frac{-\xi^2}{2\sigma}\right).$$

□

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème :

*Démonstration.* On définit : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \forall \varepsilon > 0$,

$$\tilde{\mathcal{F}}(\varphi) : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{F}}_\varepsilon(\varphi) : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}e^{-\|\xi\|^2\varepsilon/2}\mathrm{d}\xi.$$

Soient $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et $x \in \mathbb{R}^d$. Montrons successivement que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\tilde{\mathcal{F}}_\varepsilon \circ \mathcal{F}(\varphi)(x)\right) = \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(\varphi)(x) \text{ et } \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\tilde{\mathcal{F}}_\varepsilon \circ \mathcal{F}(\varphi)(x)\right) = \varphi(x)$$

On concluera par unicité de la limite.

Premièrement,

$$\tilde{\mathcal{F}}_\varepsilon \circ \mathcal{F}(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi)(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}e^{-\|\xi\|^2\varepsilon/2}\mathrm{d}\xi.$$

Appliquons le théorème de convergence dominée : $\forall x, \xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mathcal{F}(\varphi)(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}e^{-\|\xi\|^2\varepsilon/2}\right) = \mathcal{F}(\varphi)(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle} \\ \left|\mathcal{F}(\varphi)(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}e^{-\|\xi\|^2\varepsilon/2}\right| \le |\mathcal{F}(\varphi)(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}^d)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\tilde{\mathcal{F}}_\varepsilon \circ \mathcal{F}(\varphi)(x)\right) = \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(\varphi)(x)$$

Pour la seconde partie, remarquons que :

$$\tilde{\mathcal{F}}_\varepsilon \circ \mathcal{F}(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z)e^{-i\langle z,\xi\rangle}\mathrm{d}z\right)e^{i\langle x,\xi\rangle}e^{-\|\xi\|^2\varepsilon/2}\mathrm{d}\xi.$$

On peut appliquer le théorème de Fubini puisque :

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\left|\varphi(z)e^{-i\langle z,\xi\rangle}e^{i\langle x,\xi\rangle}e^{-\|\xi\|^2\varepsilon/2}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}z \underset{\text{Fubini}-\text{Tonelli}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(z)|\,\mathrm{d}z\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|\xi\|^2\varepsilon/2}\mathrm{d}\xi\right) < \infty.$$

Donc,

$$\tilde{\mathcal{F}}_\varepsilon \circ \mathcal{F}(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle z-x,\xi\rangle}e^{-\|\xi\|^2\varepsilon/2}\mathrm{d}\xi\right)\varphi(z)\mathrm{d}z.$$

Intéressons nous à l'intégrale centrale :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle z-x,\xi\rangle}e^{-\|\xi\|^2\varepsilon/2}\mathrm{d}\xi = \prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-i(z_j-x_j)\xi_j}e^{-\xi_j^2\varepsilon/2}\mathrm{d}\xi_j.$$

C'est la transformée de Fourier de la gaussienne (lemme) avec $\sigma = \varepsilon$, évaluée en $z_j - x_j$. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle z-x,\xi\rangle} e^{-\|\xi\|^2\varepsilon/2} \mathrm{d}\xi = \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} e^{-\dfrac{(z_j-x_j)^2}{2\varepsilon}} = \left(\frac{2\pi}{\varepsilon}\right)^{d/2} e^{-\|z-x\|^2/2\varepsilon}.$$

Par suite,

$$\tilde{\mathcal{F}}_\varepsilon \circ \mathcal{F}(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|z-x\|^2/2\varepsilon} \varphi(z)\mathrm{d}z \underset{z=x+\sqrt{\varepsilon}u}{=} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|u\|^2/2} \varphi(x+\sqrt{\varepsilon}u)\mathrm{d}u.$$

On fait tendre $\varepsilon$ vers 0 par théorème de convergence dominée : $\forall u \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \left(e^{-\|u\|^2/2}\varphi(x+\sqrt{\varepsilon}u)\right) = \varphi(x)e^{-\|u\|^2/2} \\ \\ \left|e^{-\|u\|^2/2}\varphi(x+\sqrt{\varepsilon}u)\right| \leq e^{-\|u\|^2/2} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \in L^1(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\tilde{\mathcal{F}}_\varepsilon \circ \mathcal{F}(\varphi)(x)\right) = \frac{\varphi(x)}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|u\|^2/2}\mathrm{d}u = \varphi(x).$$

Ainsi, $\tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = Id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$. On montre de la même manière que $\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}} = Id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$. Conséquemment, $\mathcal{F}$ est un isomorphisme et $\mathcal{F}^{-1}$ est donné par la formule annoncée.

$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \varphi, \psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \left(\overline{\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\psi)(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi}\right)\mathrm{d}x$$

$$\langle \varphi, \psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \underset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}x\right) \overline{\mathcal{F}(\psi)(\xi)}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \langle \mathcal{F}(\varphi), \mathcal{F}(\psi)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

En particulier, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\|\varphi\|_{L^2} = \dfrac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^2}$. À un facteur près, la transformée de Fourier est une isométrie. Nous pouvons maintenant la prolonger à $L^2$.

$$\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|.\|_{L^2}) \to (L^2(\mathbb{R}^d), \|.\|_{L^2})$$

est une application linéaire continue, donc uniformément continue, $(L^2(\mathbb{R}^d), \|.\|_{L^2})$ est complet, et $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \|.\|_{L^2})$ est dense dans $(L^2(\mathbb{R}^d), \|.\|_{L^2})$. Le théorème de prolongement des applications uniformément continues assure donc l'existence d'un unique prolongement de $\mathcal{F}$ à $L^2(\mathbb{R}^d)$. □

# 4 Prolongement dans les espaces vectoriels normés

Dans le cas des EVN, les applications linéaires continues coïncident avec les applications linéaires bornées. Cette particularité engendre une famille de grands théorèmes parmi lesquels le théorème de prolongement de Hahn-Banach analytique est surtout connu par le biais de ses applications.

## 4.1 Théorème de Hahn-Banach

**Théorème 4.1 (de Hahn-Banach, forme algébrique réelle)**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $p : E \to \mathbb{R}$ telle que :

1) $\forall \lambda > 0, \forall x \in E,\ p(\lambda x) = \lambda p(x)$
2) $\forall x, y \in E,\ p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Soit $G$ un sev de $E$, et $g$ une forme linéaire sur $G$, telle que $\forall x \in G,\ g(x) \leq p(x)$. Alors, il existe $f$ une forme linéaire sur $E$ telle que $f|_G = g$ et $\forall x \in E,\ f(x) \leq p(x)$.

Ce théorème est basé sur le lemme de Zorn. Nous démontrons la forme topologique du théorème de Hahn-Banach à partir de la forme algébrique de ce dernier. Pour la démonstration de ce théorème, on peut se référer à [2].

**Remarque.** *Il existe un analogue du théorème de Hahn-Banach algébrique dans le cas d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Il faut cette fois supposer que $p$ est à valeurs réelles positives, et la condition* 1) *imposée sur $p$ devient :* $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x \in E,\ p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

**Théorème 4.2 (de Hahn-Banach, forme topologique)**

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $G$ un sev de $E$, et $g$ une forme linéaire continue sur $G$. Alors, il existe une forme linéaire continue sur $E$, $f$, telle que :

$$f_{|G} = g \text{ et } \|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

*Démonstration.* On définit $p : x \in E \mapsto \|g\|_{G'} \|x\|_E$. Elle vérifie les hypothèses du théorème de Hahn-Banach (forme algébrique réelle) ; en effet : l'hypothèse 1) provient de l'homogénéité positive de la norme, et la 2) de l'inégalité triangulaire.
De plus, par définition de la norme d'opérateur, $\forall x \in G,\ |g(x)| \leq \|g\|_{G'} \|x\|_E = p(x)$. Ainsi, par la forme algébrique réelle du théorème de Hahn-Banach, il existe $f$ une forme linéaire sur $E$ telle que :

$$f_{|G} = g \text{ et } \forall x \in E,\ f(x) \leq p(x).$$

Montrons que $f$ est continue sur $E$. On sait que : $\forall x \in E,\ f(x) \leq \|g\|_{G'} \|x\|_E$. En appliquant l'inégalité à $-x$, on obtient $-\|g\|_{G'} \|x\|_E \leq f(x)$. En combinant les deux inégalités, on obtient donc : $\forall x \in E,\ |f(x)| \leq \|g\|_{G'} \|x\|_E$. Par suite, $f$ est continue sur $E$, et $\|f\|_{E'} \leq \|g\|_{G'}$.
Enfin,

$$\|g\|_{G'} = \sup_{x\in G} |g(x)| \underset{f_{|G}=g}{=} \sup_{x\in G} |f(x)| \underset{G\subseteq E}{\leq} \sup_{x\in E} |f(x)| = \|f\|_{E'}.$$

*In fine,* on conclut à l'égalité des normes. □

**Remarque.** *Ce théorème s'étend de manière naturelle à un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (si $u$ est une forme linéaire réelle, $x \mapsto u(x) - iu(ix)$ est une forme linéaire complexe, et si $v$ est une forme linéaire complexe, $Re(v)$ est une fome linéaire réelle).*

On rassemble une collection d'applications du théorème 4.2 de Hahn-Banach. On commence par un résultat utilisé pour établir que l'injection canonique d'un EVN dans son bidual est une isométrie. Les proposition 4.2 et 4.3 sont des conséquences de la proposition 4.1. Le résultat de densité de la proposition 4.4 est une généralisation de la proposition 4.2.

## 4.2 Applications

**Proposition 4.1**

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$-espace vectoriel normé et $x_0 \in E \setminus \{0\}$. Alors il existe, $f \in E'$ telle que :

$$f(x_0) = \|x_0\|_E \text{ et } \|f\|_{E'} = 1.$$

*Démonstration.* Soit $G = \mathbb{K}x_0$ et $g : x = \lambda x_0 \in G \mapsto \lambda \|x_0\|_E \in \mathbb{R}$. C'est une forme linéaire, elle est continue : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, |g(\lambda x_0)| = |\lambda| \|x_0\|_E = \|\lambda x_0\|_E$, et de norme 1. La forme topologique du théorème de Hahn-Banach assure qu'il existe $f \in E'$ telle que :

$$f_{|G} = g \text{ et } \|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} = 1.$$

Par suite, $f$ est de norme 1, et elle coïncide avec $g$ sur $G$, donc $f(x_0) \underset{x_0 \in G}{=} g(x_0) = \|x_0\|_E$. $\square$

**Proposition 4.2**

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $x \in E$, alors :

$$x = 0 \Leftrightarrow \forall f \in E',\ f(x) = 0.$$

*Démonstration.* Le sens direct est bien connu. Supposons que $x$ soit non nul. Alors par la proposition précédente, il existe, $f \in E'$ telle que : $f(x) = \|x\|_E$ et $\|f\|_{E'} = 1$. Donc, $f(x) = \|x\| = 0$ donc, $x = 0$. Impossible. Donc $x = 0$. $\square$

**Proposition 4.3**

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, alors, $\forall x \in E$, on a :

$$\|x\|_E = \max_{f \in E' \ \|f\|_{E'} \leq 1} |f(x)|.$$

*Démonstration.* Soit $x \in E$, soit $f \in E'$ telle que $\|f\|_{E'} \leq 1$, alors :

$$|f(x)| \leq \|f\|_{E'} \|x\|_E \leq \|x\|_E \text{ donc } \sup_{f \in E' \ \|f\|_{E'} \leq 1} |f(x)| \leq \|x\|_E\,.$$

L'égalité est trivialement vérifiée si $x = 0$. Sinon, en vertu de la proposition 4.1, il existe $f_0 \in E'$ telle que :

$$\|f_0\|_{E'} \leq 1 \text{ et } f_0(x) = \|x\|_E\,.$$

Donc, $\|x\|_E = |f_0(x)| \leq \sup_{f \in E' \ \|f\|_{E'} \leq 1} |f(x)|$ et $f_0$ réalise le sup qui devient un max. $\square$

**Proposition 4.4 (Critère de densité)**

Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $F$ un sous espace vectoriel de $E$ et $x_0 \in E$. Alors

$$x_0 \in \overline{F} \Leftrightarrow (\forall f \in E',\ f_{|F} = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0).$$

En particulier,

$$\overline{F} = E \Leftrightarrow (\forall f \in E',\ f_{|F} = 0 \Rightarrow f = 0).$$

*Démonstration.* Pour le sens direct, si $x_0 \in \overline{F}$, par caractérisation séquentielle, $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{E} x_0$. Soit $f \in E'$, nulle sur $F$. Alors, par continuité de $f$, $0 = f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{K}} f(x_0)$, donc $f(x_0) = 0$.

Réciproquement, par contraposée, si $x_0 \notin \overline{F}$. On sait donc que $r := d(x_0, F) > 0$. Considérons

$G = F \oplus \mathbb{K}x_0$. On définit $g : y + \lambda x_0 \in G \mapsto \lambda \in \mathbb{K}$. (Elle est bien définie puisque la somme est directe, donc la décomposition est unique). C'est une forme linéaire sur $G$. Montrons qu'elle est continue : $\forall y \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$, (si $\lambda \neq 0$ et $y \neq 0_E$),

$$\frac{|g(y+\lambda x_0)|}{\|y+\lambda x_0\|_E} = \frac{|\lambda|}{\|y+\lambda x_0\|_E} = \frac{1}{\|y/\lambda - (-x_0)\|_E} \leq \frac{1}{d(x_0, F)},$$

*i.e.*

$$|\lambda| = |g(y+\lambda x_0)| \leq \frac{1}{d(x_0,F)} \cdot \|y+\lambda x_0\|_E\,.$$

L'inégalité est également trivialement vraie si $\lambda$ ou $y$ est nul. Ceci montre la continuité de $g$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $f$ une forme linéaire continue sur $E$, telle que $f_{|G} = g$. Par suite,

$$\forall y \in F,\ f(y) \underset{F \subseteq G}{=} g(y) = 0 \text{ et } f(x_0) \underset{x_0 \in G}{=} g(x_0) = 1.$$

□

**Application.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Définissons, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1]\,,\ f_n(x) = \dfrac{1}{x - a_n}$. Alors,*

$$\overline{\mathit{Vect}(f_n,\ n \in \mathbb{N})}^{\|\cdot\|_\infty} = \mathcal{C}^0([0;1]\,, \mathbb{R}).$$

*Démontrons ce résultat qui utilise le critère de densité établi précédemment, et un prolongement analytique complexe : soit $\varphi$ une forme linéaire continue sur $(\mathcal{C}^0([0;1]\,,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(f_n) = 0.$$

*Montrons que $\varphi$ est nulle.*

*Remarquons que : $\forall x \in [0,1]\,, \forall n \in \mathbb{N}$,*

$$f_n(x) = \frac{1}{x - a_n} = \frac{-1}{a_n\left(1 - \dfrac{x}{a_n}\right)} = \frac{-1}{a_n}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a_n}\right)^k.$$

*Notons $\rho_k : x \in [0;1] \mapsto x^k \in [0;1]$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho_k}{a_n^{k+1}}$. Par linéarité et continuité, on obtient,*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(f_n) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi(\rho_k)}{a_n^{k+1}} = 0.$$

*Définissons : $\forall z \in D(0,1),\ F(z) := \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\rho_k) z^k$. On a :*

$$\forall 0 < R < 1,\ \forall z \in D(0,R),\ \sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi(\rho_k) z^k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|\varphi\|_{\mathcal{C}^0([0;1])'} \|\rho_k\|_\infty R^k \leq \|\varphi\|_{\mathcal{C}^0([0;1])'} \frac{1}{1-R} < \infty.$$

*Donc, la fonction est bien définie, et est holomorphe. De plus,*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0 \text{ et } \frac{1}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

*C'est un point d'accumulation, par connexité de $D(0,1)$, le principe des zéros isolés assure que $F$ est nulle, donc $\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(\rho_k) = 0$. Par linéarité, $\varphi$ est nulle sur $\mathbb{R}[X]$. Par le théorème de Stone-Weierstrass, $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([0;1]\,,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, $\varphi$ étant continue pour cette norme, on en déduit que $\varphi$ est nulle. Le critère de densité conclut.*

# 5 Prolongement de solutions d'équations différentielles

Dans la théorie des équations différentielles, le prolongement des solutions repose sur un principe d'unicité analogue à celui du prolongement analytique dans la théorie des fonctions holomorphes. Cette similitude de modalités du prolongement est ici réalisée par le théorème du point fixe.

## 5.1 Cadre général

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$. Le problème de Cauchy

$$(\mathcal{C}) : \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in I,\ y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$$

consiste en la recherche d'un intervalle $J \subseteq I$ contenant $t_0$ et d'une application, $y$, dérivable sur $J$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant $y(t_0) = y_0$ et $\forall t \in J,\ y'(t) = f(t, y(t))$.

**Théorème 5.1 (Cauchy-Lipschitz global)**

Avec les notations introduites précédemment, si $f$ est une application continue et **globalement** lipschitzienne par rapport à la seconde variable, le problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ admet une unique solution globale (*i.e.* $I = J$).

*Démonstration.* On suppose que $I$ est un intervalle fermé, borné. Soit $L$ la constante de lipschitzianité de $f$. On munit $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$ de la norme (bien définie car c'est une fonction continue sur un compact) :

$$\|y\| = \max_{x \in I} \left( \|y(t)\|_d \, e^{-2L|t-t_0|} \right).$$

Elle fait de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$ un espace complet.

$$(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \mathrm{d}s.$$

On considère l'opérateur

$$\tau : y \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d) \mapsto \left( t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \mathrm{d}s \right) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d).$$

Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une unique solution revient à montrer que $\tau$ admet un unique point fixe. On utilise le théorème du point fixe de Picard. L'espace est complet et stable par $\tau$. Elle est contractante : En effet, $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$, $\forall t \in I, t \geq t_0$,

$$\|\tau(y_1)(t) - \tau(y_2)(t)\|_d \leq \int_{t_0}^{t} L \|y_1 - y_2\| e^{2L(s-t_0)} \mathrm{d}s \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\| e^{2L(t-t_0)}.$$

Ainsi, avec un calcul analogue pour $t \leq t_0$, on obtient :

$$\|\tau(y_1) - \tau(y_2)\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|.$$

Ceci assure l'existence et l'unicité d'une solution. On écrit désormais $I$ comme une union croissante d'intervalles fermés bornés et on obtient le résultat de proche en proche sur chacun des intervalles. $\square$

**Théorème 5.2 (Cauchy-Lipschitz local)**

Avec les notations introduites précédemment, si $f$ est une application continue et **localement** lipschitzienne par rapport à la seconde variable, le problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ admet une unique solution maximale, définie sur un intervalle ouvert.

**Remarque.** *Toute application $\mathcal{C}^1$ sur un espace vectoriel de dimension finie est localement lipschitzienne.*

**Remarque.** *On démontre ce résultat en s'appuyant sur la même stratégie que pour la première preuve. Il faut néanmoins prendre en compte le caractère local de la lipschitzianité, et introduire un cylindre de sécurité pour que $\tau$ laisse stable l'espace, condition nécessaire à l'application du théorème du point fixe de Picard.*

**Exemple.** $\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ *est un exemple d'équation différentielle n'admettant pas une unique solution, puisque la solution nulle et $t \mapsto t^2/4$ sont deux solutions (la racine n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0).*

## 5.2 Théorème de sortie de tout compact

Énonçons désormais un théorème, connu sous le nom de théorème des bouts, théorème d'explosion en temps fini ou théorème de sortie de tout compact, qui présente une condition suffisante pour que la solution maximale d'une équation différentielle soit globale.

**Théorème 5.3 (de sortie de tout compact)**

Soit $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, soit $(J = ]T^-, T^+[\,, y)$ la solution maximale du problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ associé à $f$. On a l'alternative suivante :

- $T^+ = \sup(I)$
- $\|y(t)\|_d \underset{t \to T^+}{\longrightarrow} +\infty$

**Exemple.** *Soit $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ coercive (i.e., $\lim\limits_{\|x\|_d \to \infty} U(x) = +\infty$). Alors, la solution maximale du problème de Cauchy suivant est globale :*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\nabla U(x(t)) \\ \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*La fonction définie par $f(x,t) = -\nabla U(x)$ est $\mathcal{C}^1$ donc localement lipschitzienne. Par conséquent, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale $y$ définie sur un intervalle ouvert $J = ]T^-, T^+[$, en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz local.*

$$\frac{\mathrm{d}U(x(t))}{\mathrm{d}t} = (\nabla U(x(t)), x'(t)) = -\|\nabla U(x(t))\|_d^2 \leq 0.$$

*Donc,*

$$U(x(t)) \leq U(x(0)) \ (*)$$

*Le théorème de sortie de tout compact assure que si la solution n'est pas globale, $\|x(t)\|_d \underset{t \to T^+}{\longrightarrow} +\infty$, par coercivité de $U$ et composition des limites, ou aurait : $U(x(t)) \underset{t \to T^+}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui est impossible par la majoration $(*)$. La solution est donc globale.*

**Exemple.**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sin(\pi x(t)) \\ \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*Ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale, car* $\sin(\pi \cdot)$ *est* $\mathcal{C}^1$*. Les fonctions* $(t \mapsto n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *sont solutions de l'équation sans condition initiale. Puisque les courbes intégrales ne se coupent pas (unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz), les solutions restent bornées dans une bande de largeur* 1*. Le théorème de sortie de tout compact assure alors qu'elles sont globales.*

# 6 Introduction aux distributions

## 6.1 Premières définitions

Comme vu dans la première partie, toute les fonctions ne sont pas dérivables. Le but historique des distributions était d'introduire un cadre formel dans lequel toutes les fonctions sont infiniment dérivables *au sens des distributions*, et où cette dérivée distributionelle coïncide avec la dérivée classique si la fonction est effectivement dérivable. Le but est donc de prolonger la notion même de fonction. De manière informelle, un espace très "petit" admet un espace dual très "gros". On va donc travailler avec une classe de fonction très petite : celle des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\Omega$, ouvert de $\mathbb{R}^d$, notée $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Une distribution sera alors un élément du dual, *i.e.* une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Pour que la définition soit manipulable, on exige la continuité de cette forme. La topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ étant subtile à étudier (espace de Fréchet), et dépassant de loin le cadre de cette étude, on pose comme définition la propriété caractérisant la continuité sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

**Définition 6.1**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On appelle distribution sur $\Omega$ toute forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant : $\forall K \subseteq \Omega,\ \text{compact}\ , \exists\ c_K > 0,\ \exists\ n_K \in \mathbb{N},\ \text{tel que}\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\left|\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}\right| \leq c_K \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d \\ |\alpha|\leq n_K}} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur l'ouvert $\Omega$.

**Exemple.** $\forall x_0 \in \mathbb{R}^d,\ \delta_0 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \mapsto \varphi(x_0) \in \mathbb{R}$ *est une distribution sur* $\mathbb{R}^d$*, appelée masse de Dirac en* $x_0$*.*

La proposition suivante assure que cette notion prolonge la notion de fonctions, *i.e.*, toute fonction "gentille" définit une distribution.

**Proposition 6.1**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, l'application suivante est bien définie et injective :

$$\begin{aligned} &L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ &f \mapsto T_f : \left(\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

La distribution $T_f$ associée à une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dite régulière.

**Remarque.** *On a bien* ***strictement*** *étendu la notion de fonctions, car on vérifie sans peine que la distribution masse de Dirac, n'est pas associée à une fonction* $L^1_{loc}$*.*

On peut maintenant définir la dérivation des distributions par principe de dualité-transposition :

**Définition 6.2**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha T$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)},$$

où $|\alpha|$ désigne la longueur du multi-indice. On vérifie que $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

## 6.2 Quelques exemples

1) La fonction $H := \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ est bornée, elle est donc localement intégrable et définit une distribution. Elle n'est pas dérivable au sens classique. On peut néanmoins calculer sa dérivée au sens des distributions : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) \varphi'(x) \mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) \mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( \mathbb{1}_{[0,+\infty[} \right) \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} \delta_0.$$

Cette distribution est dite distribution de Heaviside.

2) On peut étendre ce résultat (la formule des sauts) : Si $f$ est une application $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ n'ayant que des discontinuités de première espèce en $a_1 < \cdots < a_n$, alors :

$$f' \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} \{f'\} + \sum_{k=1}^n \left( f(a_k^+) - f(a_k^-) \right) \delta_{a_k},$$

où $f(a_k^+) - f(a_k^-)$ représente la différence des limites à droite et à gauche de $f$ en $a_k$ (la largeur du saut de discontinuité), et $\{f'\}$ désigne la dérivée de $f$ au sens classique sur $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.

3) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}^*$, et définit par suite une distribution sur cet ouvert. Elle n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut néanmoins utiliser l'imparité de la fonction inverse pour s'affranchir de la singularité en 0 et définir une distribution, appelée valeur principale de Cauchy :

$$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \left( \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x \right).$$

La fonction $x \mapsto \ln|x|$ étant localement intégrable sur $\mathbb{R}$, elle définit une distribution et on vérifie que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\ln|x|) \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right).$$

On peut également définir une distribution sur $\mathbb{R}$ qui s'affranchit de la singularité en 0 de $1/x^k$, appelée partie finie de Hadamard. Par exemple,

$$\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \left( \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} \mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right).$$

On obtient un équivalent des formules classiques de dérivation :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} (\ln|x|) \underset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{=} -\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

## Références

[1] Florent Berthelin. *Équations différentielles*, Cassini, 694 pages.

[2] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Masson, 233 pages.

[3] François Golse *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*, Octobre 2012.
Accès : http ://www.cmls.polytechnique.fr/perso/golse/MAT431-10/POLY431.pdf

[4] Hervé et Martine Quéffelec. *Analyse complexe et applications*, Calvage et Mounet.