Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Dans tout ce document, E désigne un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

1. Normes et applications linéaires continues. —

1.1. *Normes.* —

1. Définition (Norme) : une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :
   - $\forall x \in E$, $x = 0_E \Leftrightarrow N(x) = 0$ (*Séparation*)
   - $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (*Homogénéité*)
   - $\forall x, y \in E$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (*Inégalité triangulaire*).

   On dit que (E, N) est une espace vectoriel normé (EVN).
2. Exemples : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(l^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ pour $p \in [1, +\infty]$, $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Pour $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $p \in [1, +\infty]$, $(L^p_\mu(E), \|\cdot\|_p)$.
3. Remarque : si (E, N) est un EVN, alors $(x, y) \in E^2 \mapsto N(x-y) \in \mathbb{R}^+$ définit une distance sur E.
4. Définition (Normes équivalentes) : on dit que deux normes, N_1 et N_2, sur E sont équivalentes s'il existe $C_1, C_2 > 0$ tel que $\forall x \in E$, $C_1 N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant C_2 N_1(x)$.
5. Exemples : pour $E = \mathbb{R}^d$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes. Pour $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
6. Remarque : deux normes équivalentes définissent des distances équivalentes, et donc la même topologie.
7. Proposition : soit (E, N) un EVN, alors : $\forall x, y, z \in E$, $|N(x-y) - N(y-z)| \leqslant N(x-z)$.

1.2. *Applications linéaires continues.* —

8. Définition (Application linéaire) : soient E et F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ est dite linéaire si $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$.
9. Proposition : soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN, et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors, f est continue sur $(E, \|\cdot\|_E)$ *ssi* f est continue en 0_E *ssi* $f(\overline{B_E(0,1)})$ est bornée dans $(F, \|\cdot\|_F)$ *ssi* $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E$.
10. Exemples : $\varphi : \begin{bmatrix} (\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), N) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ f & \mapsto & f(0) \end{bmatrix}$ est continue pour $N = \|\cdot\|_\infty$, mais n'est pas continue pour $N = \|\cdot\|_1$
11. Proposition : une forme linéaire sur $(E, \|\cdot\|_E)$, un EVN, est continue *ssi* $\ker(f)$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|_E)$.
12. Notation : on note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues entre deux EVN E et F (quand il n'y a pas de confusion possible sur les normes dont sont munis E et F).
13. Proposition : soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN, et $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on a :
    - $\sup\limits_{x \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup\limits_{\|x\|_E < 1} \|f(x)\|_F = \inf \{M > 0,\ \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E\}$.

      On note cette quantité $|||f|||_{\mathcal{L}_c(E,F)}$.
    - $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant |||f|||_{\mathcal{L}_c(E,F)} \|x\|_E$.
14. Proposition : $|||\cdot|||_{\mathcal{L}_c(E,F)}$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. On l'appelle norme subordonnée.
15. Exemples : $\mathcal{F} : \begin{bmatrix} (L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1) & \to & (c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty) \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{bmatrix}$ est une application linéaire de norme subordonnée 1.

    $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|||A|||_1 = \max\limits_{j \in [\![1,n]\!]} \sum\limits_{i=1}^n |a_{i,j}|$, $|||A|||_\infty = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} \sum\limits_{j=1}^n |a_{i,j}|$, et $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^t AA)}$.
16. Proposition : soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois EVN, $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$. Alors, $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et $|||g \circ f|||_{\mathcal{L}_c(E,G)} \leqslant |||g|||_{\mathcal{L}_c(F,G)} |||f|||_{\mathcal{L}_c(E,F)}$.

1.3. *Cas de la dimension finie.* —

17. Théorème : soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{R}$ EVN de dimension finie. Alors, toutes les normes sont équivalentes sur E.
18. Remarque : cette assertion est fausse en dimension infinie, ou sur $\mathbb{Q}$.
19. Proposition : soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN, avec $\dim(E) < \infty$. Alors, toute application linéaire de E dans F est continue.
20. Proposition : soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un EVN, et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_E)$.
21. Théorème (Riesz) : soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{R}$ EVN, alors, E est de dimension finie *ssi* $\overline{B_E(0,1)}$ est compacte.
22. Application : soit V un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ dont toutes les fonctions sont lipschitziennes. Alors, V est de dimension finie.
23. Application 2 : soit $f : E \to F$ un opérateur compact entre deux espaces de Banach. Si $\dim(F) = +\infty$, alors f n'est pas surjective.

2. Espaces de Banach. —

2.1. *Premières propriétés.* —

24. Définition (Suite de Cauchy) : soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un EVN. On dit que $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $n, p \geqslant n_0 \Rightarrow \|x_n - x_p\|_E \leqslant \varepsilon$.
25. Proposition : soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un EVN. Alors :
    - Toute suite de Cauchy est bornée.
    - Toute suite convergente est de Cauchy.
    - Une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence converge.
    - L'image par une application uniformément continue d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy.
26. Définition (Espace complet) : un EVN $(E, \|\cdot\|_E)$ est dit complet si toute suite de Cauchy de E est convergente. On dit que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach.
27. Exemple : toute espace de dimension finie est complet.
28. Théorème (Riesz-Fischer) : soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$, alors $(L^p_\mu(E), \|\cdot\|_p)$ est complet.

29. Exemple : $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.
30. Proposition : tout espace compact est complet.
31. Proposition : soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN. Supposons $(F, \|\cdot\|_F)$ complet. Alors, $(\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||_{\mathcal{L}_c(E,F)})$ est complet.
32. Proposition : soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un EVN. Alors, $(E, \|\cdot\|_E)$ est un Banach *ssi* toute série absolument convergente de E est convergente dans $(E, \|\cdot\|_E)$.
33. Théorème (Von-Neumann) : soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un Banach. Alors, $\forall T \in \mathcal{L}_c(E)$, $|||T|||_{\mathcal{L}_c(E)} < 1$, $(I_E - T) \in GL(E)$ et $(I_E - T)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} T^n$.
34. Application : si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un Banach, alors $\varphi : T \in GL(E) \mapsto T^{-1} \in GL(E)$ est un isomorphisme.
35. Application : soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach. Alors $GL(E)$ est un ouvert de $(\mathcal{L}_c(E), |||\cdot|||_{\mathcal{L}_c(E)})$.

2.2. *Lemme de Baire et conséquences.* —

36. Lemme (de Baire) : soient (E, d_E) un espace métrique complet et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts denses de (E, d_E). Alors, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans (E, d_E).
37. Remarque : le lemme de Baire peut se reformuler ainsi : si (E, d_E) est un espace métrique complet et $(F_n)_n$ est une famille de fermés d'intérieur vide. Alors, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.
38. Contre-exemples : l'hypothèse de complétude est nécessaire : $\mathbb{Q} = \displaystyle\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}$ dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. L'hypothèse de dénombrabilité est nécessaire : $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$
39. Application : un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base algébrique dénombrable.
40. **Développement 1**
    Théorème (de Banach-Steinhauss) : soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un Banach, $(F, \|\cdot\|_F)$ un EVN, et $(T_i)_{i\in I} \in \mathcal{L}_c(E,F)^I$. Alors, l'alternative suivante a lieu :
    - ⋆ $\displaystyle\sup_{i\in I} |||T_i|||_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \infty$.
    - ⋆ il existe A, dense dans $(E, \|\cdot\|_E)$ tel que $\forall x \in A$, $\displaystyle\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F = +\infty$.

    Application : soit x un réel. Il existe $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont la série de Fourier diverge en x.
41. Corollaire : soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un Banach, $(F, \|\cdot\|_F)$ un EVN, et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}_c(E,F)^{\mathbb{N}}$ tels que pour tout $x \in E$, $(T_n(x))$ converge vers $T(x) \in F$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Alors :
    - ⋆ $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} |||T_n|||_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \infty$,
    - ⋆ $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$,
    - ⋆ $|||T|||_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant \displaystyle\liminf_{n\to+\infty} |||T_n|||_{\mathcal{L}_c(E,F)}$.
42. Théorème (de l'application ouverte) : soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux Banach, et $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ surjective. Alors T est ouverte (l'image d'un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$ est un ouvert de $(F, \|\cdot\|_F)$).
43. Application (Théorème d'isomorphisme de Banach) : soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux Banach et $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$, bijective. Alors $T^{-1} \in \mathcal{L}_c(F,E)$.
44. Remarque : la linéarité est immédiate ; c'est le caractère continu qui n'est pas trivial.
45. Exemple : l'application définie à l'exemple 15 n'est pas surjective.
46. Contre-exemple : $\theta : \begin{bmatrix} (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) & \to & (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \\ f & \mapsto & f \end{bmatrix}$ est une application linéaire continue bijective dont la réciproque n'est pas continue.
47. Application : soit E un espace vectoriel, et $\|\cdot\|$, N deux normes sur E. Supposons :
    - ⋆ $(E, \|\cdot\|)$ et (E, N) sont complets,
    - ⋆ il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in E$, $N(x) \leqslant C\,\|x\|$.

    Alors, les normes $\|\cdot\|$ et N sont équivalentes sur E.
48. Définition (Graphe) : soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN, et $T : E \to F$ linéaire. On définit le graphe de T, noté $G(T)$ comme : $G(T) = \{(x, T(x)),\ x \in E\} \subseteq E \times F$.
49. Théorème (du graphe fermé) : soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des Banach, et $T : E \to F$ linéaire. Alors, T est continue *ssi* $G(T)$ est fermé dans $(E \times F, \|\cdot\|_{E\times F})$.
50. Contre-exemple : $\varphi : \begin{bmatrix} (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) & \to & (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f & \mapsto & f' \end{bmatrix}$ est une application linéaire non continue dont le graphe est fermé.

3. Espaces de Hilbert. —

3.1. *Théorème de projection et conséquences.* —

51. Définition (Espace de Hilbert) : on appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, complet pour la norme $\|\cdot\| : x \in H \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle} \in \mathbb{R}^+$ associée au produit scalaire.
52. Exemples : $(l^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{l^2})$, $(L^2_\mu(E), \|\cdot\|_{L^2})$, $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$
    Pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ \forall i \in [\![1,d]\!],\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$ (où les dérivées sont à considérer au sens des distributions), pour le produit scalaire $(u,v) \in H^1(\Omega)^2 \mapsto (u,v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$. (espace de Sobolev).
53. Théorème (de projection sur un convexe fermé) : soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de H. Alors :
    - ⋆ $\forall x \in H$, $\exists! p_C(x) \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - p_C(x)\|$.
    - ⋆ p_c est $1-$lipschitzienne.
    - ⋆ soit $x \in H$. Alors, $p_C(x)$ est l'unique élément y vérifiant : $y \in C$ et $\forall z \in C$, $\mathrm{Re}(\langle z - y, x - y\rangle) \leqslant 0$ (condition de l'angle obtu).
    - ⋆ si C est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors, la projection p_C est linéaire. De plus, la condition de l'angle obtu devient : $x - y \in C^\perp$.

(Annexe)

54. Remarque : le point clef de la preuve de ce théorème est l'identité du parallélogramme.
55. Remarque : ce théorème reste vrai si l'on suppose que $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien et C un convexe fermé non vide complet de H.
56. Application (Théorème du supplémentaire orthogonal) : soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors, $H = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.
57. Théorème (Critère de densité) : soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de H. Alors, $\overline{F} = H$ *ssi* $F^\perp = \{0\}$.
58. Application (Polynômes orthogonaux) : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\rho : I \to \mathbb{R}_*^+$, continue. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\displaystyle\int_I \rho(x)e^{\alpha|x|}\mathrm{d}x < +\infty$. Alors, la famille de polynômes orthogonaux associés à ρ engendre un sous-espace vectoriel dense dans $(L^2(I,\rho), \|\cdot\|_{L^2(I,\rho)})$ (une base hilbertienne).
59. Théorème (de Riesz) : soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert, et $f \in H'$. Alors, il existe un unique $x \in H$ tel que $f = \langle\cdot, x\rangle$. De plus, $\|f\|_{H'} = \|x\|_H$.
60. Remarque : $\varphi \begin{bmatrix} H & \to & H' \\ x & \mapsto & f_x : \begin{bmatrix} H & \to & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & f_x(y) = \langle x, y\rangle \end{bmatrix} \end{bmatrix}$ est un isomorphisme anti-linéaire isométrique.
61. Application : soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. Alors, $\forall T \in \mathcal{L}_c(H)$, $\exists! T^* \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que $\forall x, y \in H$, $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$. T^* est appelé l'adjoint de T.

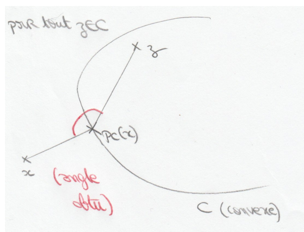
3.2. *Théorème de Lax-Milgram et application à une EDP.* —

62. Définition (coercivité) : une forme bilinéaire a sur un EVN $(E, \|\cdot\|_E)$ est dite coercive (ou coercitive) s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $a(x,x) \geqslant \alpha \|x\|_E^2$.
62. **Développement 2**
Théorème (Lax-Milgram) : soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert, a un forme bilinéaire continue et coercive sur H, et l une forme linéaire continue sur H. Alors, il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$, $a(u,v) = l(v)$.
Si de plus, a est supposée symétrique, alors u correpond à l'unique minimum de la fonctionnelle $J : v \in H \mapsto \dfrac{1}{2}a(v,v) - l(v)$.
63. Proposition : l'espace $(H^1(a,b), \|\cdot\|_{H^1(a,b)})$ s'injecte de manière continue dans $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
64. Définition $(H_0^1(a,b))$: on définit $H_0^1(a,b) = \overline{\mathcal{D}(a,b)}^{\|\cdot\|_{H^1(a,b)}}$. C'est donc un sous-espace vectoriel fermé, donc complet de $\left(H^1(a,b), \|\cdot\|_{H^1(a,b)}\right)$.
65. Proposition : en identifiant les fonctions à leur représentant continu, on a :
$$H_0^1(a,b) = \left\{u \in H^1(a,b),\ u(a) = u(b) = 0\right\}.$$
66. Proposition (Inégalité de Poincaré) : il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H_0^1(a,b)$, $\|u\|_{L^2(a,b)} \leqslant C\|u'\|_{L^2(a,b)}$.
67. Définition (Problème de Dirichlet) : étant donnés $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0(I)$, $q \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^+)$ et $p \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}_*^+)$, le problème de Dirichlet désigne l'équation différentielle suivante :
$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{sur } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$
68. Définition (Solution forte) : on appelle solution forte du problème de Dirichlet toute fonction $u \in \mathcal{C}^2(I)$ vérifiant $(*)$.
69. Définition (Solution faible) : on appelle solution faible du problème de Dirichlet toute fonction $u \in H_0^1(a,b)$ vérifiant pour tout $v \in H_0^1(a,b)$,
$$a(u,v) = l(v),$$
où $a(u,v) := \displaystyle\int_a^b p(x)u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b q(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x$ et $l(v) := \displaystyle\int_a^b f(x)v(x)\mathrm{d}x$.
70. Théorème : u est solution forte du problème de Dirichlet *ssi* u est solution faible du problème de Dirichlet.
71. Théorème (Well-posedness) : le problème de Dirichlet admet une unique solution.
72. Remarque : on peut démontrer que le problème de Dirichlet admet une unique solution faible avec pour régularité $f \in L^2(a,b)$.
73. Remarque : on peut retrouver l'existence de solution (forte) au problème de Dirichlet via la méthode de tir, et l'unicité par le principe du maximum.

Références

Analyse fonctionnelle, H. Brézis.
Les maths en tête, Analyse, X. Gourdon.
Objectif Agrégation, Beck, Malick, Peyré.
Analyse pour l'agrégation, Queffelec, Zuily.

Annexe :



August 29, 2023

Théo Gherdaoui, ENS Rennes

Développements et commentaires :

Voici un document regroupant les démonstrations des développements, ainsi que des commentaires, applications, exemples, contre-exemples et exercices.

1 Théorème de Banach-Steinhaus et applications :

Recasages possibles (avec Fourier) : 205-208-246.
Référence : GOURDON, ***Analyse*****.**

1.1 Théorème de Banach-Steinhaus

Theorème 1

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un Banach, $(F, \|\cdot\|_F)$ un EVN, et $(T_i)_{i\in I} \in \mathcal{L}_c(E,F)^I$ une famille d'opérateurs linéaires continus. Alors, l'alternative suivante a lieu :

- *soit $\sup\limits_{i\in I} |||T_i|||_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \infty$*
- *soit il existe un G_δ dense dans $(E, \|\cdot\|_E)$, A, vérifiant : $\forall x \in A$,*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F = +\infty.$$

Remarque. *On appelle G_δ une intersection dénombrable d'ouverts.*

Démonstration : On note, pour $i \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, $X_{n,i} = \left\{x \in E,\ \|T_i(x)\|_F > n\right\}$. Par continuité des T_i et de la norme, $X_{n,i}$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \bigcup\limits_{i\in I} X_{n,i}$. C'est une suite d'ouverts. Deux situations se présentent :

Première situation : pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est dense dans $(E, \|\cdot\|_E)$. Alors, le lemme de Baire appliqué dans l'espace $(E, \|\cdot\|_E)$ complet assure que $A := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est un G_δ dense dans $(E, \|\cdot\|_E)$. De plus $\forall x \in A$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists i_n \in I \text{ tel que } x \in X_{n,i_n} \ \textit{i.e.}\ \|T_{i_n}(x)\|_F > n.$$

On a donc

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F = +\infty.$$

Deuxième situation : il existe un entier n_0 tel que X_{n_0} n'est pas dense dans $(E, \|\cdot\|_E)$. Alors, il existe $r > 0$ et $x \in E$ tel que $X_{n_0} \cap B_E^\circ(x,r) = \emptyset$, donc $B_E^\circ(x,r) \subset X_{n_0}^c = \bigcap\limits_{i\in I} X_{n_0,i}^c$. Ainsi, remarquons que pour $z \in B_E^\circ(0,1)$, pour $i \in I$,

$$\|T_i(z)\|_F = \left\| \frac{T_i(x+rz) - T_i(x)}{r} \right\|_F.$$

Puisque $x + rz$ et x sont des éléments de $B_E^\circ(x,r)$, l'inclusion précédente donne pour $z \in B_E^\circ(0,1)$, pour $i \in I$,

$$\|T_i(z)\|_F \leqslant \frac{2n_0}{r}.$$

Ainsi,

$$\sup_{i\in I} |||T_i|||_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant \frac{2n_0}{r} < \infty.$$

■

1.2 Une première application aux séries de Fourier

On rappelle que pour $N \in \mathbb{N}$, on définit le noyau de Dirichlet par : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = \begin{cases} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t \not\equiv 0[2\pi] \\ 2N+1 & \textit{sinon} \end{cases}.$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on définit les coefficients de Fourier de f par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t = (f, e^{in\cdot})_{L^2}.$$

Enfin, la série de Fourier de f est la série de fonctions admettant pour sommes partielles $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$, où : $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N(f) = D_N * f = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{ik\cdot}$.

Proposition 1

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en x.

Démonstration : Pour $x \in \mathbb{R}$, et $N \in \mathbb{N}$, on définit :

$$\Lambda_{N,x} : \begin{bmatrix} (\mathcal{C}^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ f & \mapsto & S_N(f)(x). \end{bmatrix}.$$

C'est un opérateur linéaire (clair), continu, en effet :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}),\ |\Lambda_{N,x}(f)| = |D_N * f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_N(t)f(x-t)|\mathrm{d}t \leqslant \|D_N\|_{L^1}\|f\|_\infty.$$

De plus, on obtient l'estimation : $|||\Lambda_{N,x}|||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}),\mathbb{R})} \leqslant \|D_N\|_{L^1}$. Montrons que c'est une égalité : on considère $\varepsilon > 0$ et $f_\varepsilon : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\overline{D_N(x-t)}}{|D_N(x-t)| + \varepsilon}$. On remarque immédiatement que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, et $\|f_\varepsilon\|_\infty \leqslant 1$. De plus,

$$|\Lambda_{N,x}(f_\varepsilon)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|D_N(t)|^2}{|D_N(t)| + \varepsilon}\mathrm{d}t \leqslant |||\Lambda_{N,x}|||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}),\mathbb{R})}\|f_\varepsilon\|_\infty \leqslant |||\Lambda_{N,x}|||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}),\mathbb{R})}.$$

On applique le théorème de convergence dominée : on remarque que l'intégrande converge vers $|D_N|$ lorsque ε tend vers 0. La domination est fournie par la fonction $|D_N|$, intégrable et indépendante de ε. On conclut donc à l'égalité : $|||\Lambda_{N,x}|||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}),\mathbb{R})} = \|D_N\|_{L^1}$.

Observons maintenant que $\|D_N\|_{L^1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. En effet, par parité, on a :

$$\|D_N\|_{L^1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}\right|\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{t}\right|\mathrm{d}t,$$

$$\|D_N\|_{L^1} \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{N\pi}\frac{|\sin(u)|}{u}\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(u)|}{u}\mathrm{d}u.$$

$$\|D_N\|_{L^1} \underset{v=u-k\pi}{\geqslant} \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin(v)}{v+k\pi}\mathrm{d}v \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\int_0^\pi \sin(v)\mathrm{d}v}{(k+1)\pi} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{4}{\pi^2}\ln(N).$$

On applique ainsi le théorème de Banach-Steinhaus à la suite d'opérateurs linéaires continus $(\Lambda_{N,x})_{N\in\mathbb{N}}$, définie sur l'espace de Banach $(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$. Puisque

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}|||\Lambda_{N,x}|||_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})'} = \sup_{N\in\mathbb{N}}\|D_N\|_{L^1} = +\infty,$$

on déduit l'existence d'un G_δ, $A(x)$, dense dans $(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ tel que : pour tout $f \in A(x)$,

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}|\Lambda_{N,x}(f)| = \sup_{N\in\mathbb{N}}|S_N(f)(x)| = +\infty.$$

Ceci montre en particulier l'existence d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en x. ■

Remarque. *On a en fait démontré beaucoup mieux que ça ! Avec les notations introduites dans la preuve, puisque $\mathbb{R}$ est sépérable, on considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable dense (par exemple les rationnels). On note $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A(x_n)$. En écrivant $A(x_n) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} O_k^n$ avec O_k^n, un ouvert de $(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ (puisque c'est un G_δ, c'est possible), on obtient $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} O_k^n$. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, le lemme de Baire affirme que A est dense dans $(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$. On a donc contruit un monstre mathématique : un ensemble dense dans $(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$, dont les éléments sont des fonctions continues ayant leur série de Fourier qui diverge sur une partie dense de $\mathbb{R}$! Ce résultat est néanmoins à relativiser : exhiber un exemple de fonction dont la série de Fourier diverge en un point n'est pas du tout facile (voir Hauchecorne). De plus, il est à mettre en parallèle avec le résultat de Carleson : le série de Fourier d'une fonction L^p converge (ponctuellement) presque partout (pour $p \in]1, +\infty[$).*

1.3 Une application similaire en analyse numérique

On introduit, pour une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, la famille de polynômes de Lagrange associée à f, $(\Pi_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, où, à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\Pi_n(f)$ désigne le polynôme interpolateur de Lagrange de f associé à la subdivision régulière de $[a, b]$ comportant $n + 1$ points, *i.e.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Pi_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^n) \underbrace{\prod_{\substack{j=0,\\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j^n}{x_k^n - x_j^n}}_{:=L_k^n(x)},$$

et $x_i^n = a + i\dfrac{b-a}{n}$, et $h = \dfrac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision.

Theorème 2

Il existe $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\|\Pi_n(f) - f\|_\infty^{[a,b]}$ diverge quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit :

$$\varphi_n : \begin{bmatrix} (\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty^{[a,b]}) & \to & (\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty^{[a,b]}) \\ f & \mapsto & \Pi_n(f) \end{bmatrix}.$$

Cet opérateur est bien défini (tout polynôme est continu), et est linéaire (clair). Montrons en la continuité et estimons sa norme d'opérateur :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}),\ \forall x \in [a, b], \quad |\varphi_n(f)(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|f\|_\infty^{[a,b]} |L_k^n(x)| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \left(\sum_{k=0}^{n} |L_k^n(x)|\right) \|f\|_\infty^{[a,b]}.$$

Ainsi, φ_n est continue, et

$$|||\varphi_n|||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}^0([a,b]))} \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \left(\sum_{k=0}^{n} |L_k^n(x)|\right).$$

Montrons l'égalité : on considère $x_0 \in [a, b]$ tel que $\sup_{x\in[a,b]} \left(\sum_{k=0}^{n} |L_k^n(x)|\right) = \sum_{k=0}^{n} |L_k^n(x_0)|$. Soit $f_0 \in \mathcal{C}^0([a, b])$ telle que $\|f_0\|_\infty^{[a,b]} = 1$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f_0(x_k^n) = \mathrm{sign}(L_k^n(x_0))$ (c'est possible, affine par morceaux par exemple). Alors :

$$\varphi_n(f_0)(x_0) = \Pi_n(f_0)(x_0) = \sum_{k=0}^{n} f_0(x_k^n) L_k^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} |L_k^n(x_0)| = \sup_{x\in[a,b]} \left(\sum_{k=0}^{n} |L_k^n(x)|\right).$$

Par conséquent,

$$\sup_{x\in[a,b]} \left(\sum_{k=0}^{n} |L_k^n(x)|\right) = \varphi_n(f)(x_0) \leqslant \|\varphi_n(f_0)\|_\infty^{[a,b]} \leqslant |||\varphi_n|||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}^0([a,b]))} \|f_0\|_\infty^{[a,b]} = |||\varphi_n|||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}^0([a,b]))}.$$

Ceci conclut.

Montrons maintenant que $\sup_{x\in[a,b]}\left(\sum_{k=0}^{n}|L_k^n(x)|\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On a, pour $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\left|L_k^n\left(a+\frac{h}{2}\right)\right| = \left|\prod_{\substack{j=0,\\ j\neq k}}^{n} \frac{a+\frac{h}{2}-a-jh}{a+kh-a-jh}\right| = \prod_{\substack{j=0,\\ j\neq k}}^{n} \left|\frac{j-\frac{1}{2}}{k-j}\right| = \frac{\prod_{j=2}^{n}\left|j-\frac{1}{2}\right|}{4|k-1/2|k!(n-k)!} \geqslant \frac{(n-1)!}{4nk!(n-k)!}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n}\left|L_k^n\left(a+\frac{h}{2}\right)\right| \geqslant \frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \frac{2^n}{4n^2}.$$

Enfin, $\sup_{x\in[a,b]}\left(\sum_{k=0}^{n}|L_k^n(x)|\right) \geqslant \frac{2^n}{4n^2}$ conclut.

On peut alors appliquer le théorème de Banach-Steinhaus à la suite d'opérateurs linéaires continus $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ dans l'espace de Banach $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty^{[a,b]})$. On obtient l'existence d'une fonction continue sur $[a,b]$, f, (en fait, d'un G_δ dense dans $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty^{[a,b]})$), pour laquelle :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\|\varphi_n(f)\|_\infty^{[a,b]} = \sup_{n\in\mathbb{N}^*}\|\Pi_n(f)\|_\infty^{[a,b]} = +\infty.$$

(Voir phénomène de Runge). ■

1.4 Un corollaire immédiat

Proposition 2

Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ un Banach, $(F,\|\cdot\|_F)$ un EVN, et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}_c(E,F)^{\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs linéaires continus vérifiant : pour tout $x\in E$, $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F,\|\cdot\|_F)$ vers $T(x)$. Alors :

- $\sup_{n\in\mathbb{N}} |||T_n|||_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \infty$.
- $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$.
- $|||T|||_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} |||T_n|||_{\mathcal{L}_c(E,F)}$.

Démonstration : Remarquons que $(E,\|\cdot\|_E)$ est un Banach, et on a : $\forall x\in E$, $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n(x)\|_F < \infty$, car la suite $(T_n(x))_n$ est convergente dans $(F,\|\cdot\|_F)$, donc bornée. Ainsi, le théorème de Banach-Steinhaus assure que $M := \sup_{n\in\mathbb{N}}|||T_n|||_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \infty$, ce qui donne le premier point. La linéarité est évidente (par linéarité de la limite). Pour la continuité, remarquons que :

$$\forall x\in E, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad \|T_n(x)\|_F \leqslant |||T_n|||_{\mathcal{L}_c(E,F)}\|x\|_E \leqslant M\|x\|_E.$$

En passant à la limite en n à gauche, on obtient $T\in\mathcal{L}_c(E,F)$. Pour le dernier point, on a :

$$\forall x\in E, \quad \|T(x)\|_F = \lim_{n\to+\infty}\|T_n(x)\|_F = \liminf_{n\to+\infty}\|T_n(x)\|_F \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\left(|||T_n|||_{\mathcal{L}_c(E,F)}\right)\|x\|_E.$$ ■

1.5 Quelques applications aux notions faibles/fortes

Rappel. *On rappelle que si $(E,\|\cdot\|_E)$ est un EVN, alors l'application*

$$J : \begin{bmatrix} (E,\|\cdot\|_E) & \to & (E'',\|\cdot\|_{E''}) \\ x & \mapsto & J(x) : \begin{bmatrix} (E',\|\cdot\|_{E'}) & \to & (\mathbb{K},|\cdot|) \\ f & \mapsto & J(x)(f)=f(x) \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

est une application linéaire continue isométrique (donc injective). On dit que E est réflexif si elle est bijective.

Proposition 3

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un EVN. Une partie $\mathcal{B} \subseteq E$ est bornée ssi elle est faiblement bornée (i.e. pour tout $f \in E'$, $f(\mathcal{B})$ est bornée dans $\mathbb{K}$).

Démonstration : Si $\mathcal{B}$ est bornée, alors $\forall f \in E'$, on a : $\forall x \in \mathcal{B}, \quad |f(x)| \leqslant \|f\|_{E'} \|x\|_E \leqslant \|f\|_{E'} \sup_{x \in \mathcal{B}} \|x\|_E$.

Réciproquement, on a :

$$\forall f \in E', \quad \sup_{x \in \mathcal{B}} |f(x)| = \sup_{x \in \mathcal{B}} |J(x)(f)| < \infty.$$

On applique le théorème de Banach-Steinhaus à la famille d'opérateurs linéaires continus $(J(x))_{x \in \mathcal{B}} \in E'' = \mathcal{L}_c(E', \mathbb{K})$ (E' est complet puisque $\mathbb{K}$ l'est). On obtient alors :

$$\sup_{x \in \mathcal{B}} \|J(x)\|_{E''} \underset{J \text{ isométrie}}{=} \sup_{x \in \mathcal{B}} \|x\|_E < \infty.$$

Ceci montre que $\mathcal{B}$ est borné dans $(E, \|\cdot\|_E)$. ■

L'identifiation isométrique avec le bidual permet de se passer de l'hypothèse de complétude.

1.5.1 Une application à la continuité

Définition 1

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN, et $T \in L(E, F)$ une application linéaire, alors, T est dite faiblement continue si pour tout $f \in F'$, $f \circ T \in E'$.

Proposition 4

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN, et $T \in L(E, F)$ une application linéaire, alors, T est continue ssi T est faiblement continue.

Démonstration : On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
T \text{ est continue sur } (E, \|\cdot\|_E) &\Leftrightarrow T\left(B_E(0,1)\right) \text{ est bornée dans } (F, \|\cdot\|_F) \\
&\Leftrightarrow T\left(B_E(0,1)\right) \text{ est faiblement bornée dans } (F, \|\cdot\|_F) \\
&\Leftrightarrow \forall f \in F',\ f \circ T\left(B_E(0,1)\right) \text{ est bornée dans } (\mathbb{K}, |\cdot|) \\
&\Leftrightarrow \forall f \in F',\ f \circ T \text{ est continue sur } (E, \|\cdot\|_E) \\
&\Leftrightarrow T \text{ est faiblement continue sur } (E, \|\cdot\|_E).
\end{aligned}$$

■

1.5.2 Une application à l'holomorphie

Définition 2

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $(E, \|\cdot\|_E)$ un Banach et $f : \Omega \to E$. On dit que f est holomorphe sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, $z \mapsto \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ définie sur un voisinage ouvert épointé de z_0, admet une limite quand z tend vers z_0.

Remarque. *Tout fonctionne exactement de la même manière que pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. On travaille avec des fonctions à valeurs dans un espace de Banach afin de donner un sens à l'intégrale d'une fonction (limite des sommes de Riemann). Afin de se ramener à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, on introduit la notion de fonction faiblement holomorphe :*

Définition 3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $(E, \|\cdot\|_E)$ un Banach et $f : \Omega \to E$. On dit que f est faiblement holomorphe sur Ω si pour tout $\varphi \in E'$, $\varphi \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe (au sens classique) sur Ω.

Proposition 5

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $(E, \|\cdot\|_E)$ un Banach et $f : \Omega \to E$. Alors, f est holomophe sur Ω ssi f est faiblement holomorphe sur Ω.

Démonstration : Supposons que f est holomorphe sur Ω. Soit $z_0 \in \Omega$, et $\mathcal{V}_{z_0}$ un voisinage ouvert de z_0 dans Ω. Soit $\varphi \in E'$. Alors,

$$\forall z \in \mathcal{V}_{z_0}^{\times}, \quad \frac{\varphi \circ f(z) - \varphi \circ f(z_0)}{z - z_0} = \varphi\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} \varphi(f'(z_0)).$$

Ceci montre la faible holomorphie de f sur Ω.

Réciproquement, on sait que f est faiblement holomorphe sur Ω. Ainsi, pour tout disque $\overline{D} \subseteq \Omega$, $\forall a \in D$, $\forall \varphi \in E'$,

$$\varphi \circ f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{\varphi \circ f(\xi)}{\xi - a} \mathrm{d}\xi.$$

La linéarité, la continuité et la définition de l'intégrale par les sommes de Riemann donne :

$$\forall \varphi \in E', \quad \varphi\left(f(a) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - a} \mathrm{d}\xi\right) = 0.$$

La séparation du dual (corollaire du théorème de Hahn-Banach) fournit donc : pour tout disque $\overline{D} \subseteq \Omega$, $\forall a \in D$,

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - a} \mathrm{d}\xi.$$

Ainsi, f vérifie la formule de Cauchy. Il suffit de démontrer qu'elle est continue afin de conclure à l'holomorphie de f sur Ω. C'est là qu'on utilise le corollaire de Banach-Steinhaus. Soit $z_0 \in \Omega$, pour tout $\varphi \in E'$, $\varphi \circ f$ est holomorphe en z_0, ainsi, $\left\{\frac{\varphi \circ f(z) - \varphi \circ f(z_0)}{z - z_0},\ z \in \mathcal{V}_{z_0}^{\times}\right\} = \varphi(A_{z_0})$ est bornée, avec $A_{z_0} = \left\{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},\ z \in \mathcal{V}_{z_0}^{\times}\right\} \subseteq \mathbb{K}$. Ainsi, $A_{z_0} \subseteq \mathbb{C}$ est faiblement bornée, donc bornée. Ainsi, $\exists M_{z_0} > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathcal{V}_{z_0}^{\times}, \quad |f(z) - f(z_0)| \leqslant M_{z_0} |z - z_0|.$$

Par suite, f est continue en z_0. Ceci conclut. ■

Ce théorème à des applications en analyse fonctionnelle.

1.5.3 Cas des parties de E'

Proposition 6

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $\mathcal{B} \subseteq E'$. Alors, $\mathcal{B}$ est bornée dans $(E', \|\cdot\|_{E'})$ ssi $\forall x \in E$, $\mathcal{B}(x) := \{f(x),\ f \in \mathcal{B}\}$ est bornée dans $\mathbb{K}$.

Démonstration : Pour le sens direct, on a : $\forall x \in E$, $\forall f \in \mathcal{B}$, $|f(x)| \leqslant \sup_{f \in B} \|f\|_{E'} \|x\|_E < \infty$. Réciproquement, on applique le théorème de Banach-Steinhaus à la famille d'opérateurs linéaires continus $(f)_{f \in \mathcal{B}}$, défini sur l'espace de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$. Puisque par hypothèse, pour tout $x \in E$, $\sup_{f \in \mathcal{B}} |f(x)| < \infty$ on obtient : $\sup_{f \in \mathcal{B}} \|f\|_{E'} < \infty$, *i.e.* $\mathcal{B}$ est bornée dans E'. ■

1.6 Un de mes exercices d'oraux d'agrégation

Voici un des deux exercices que l'on m'a posé au vrai oral de l'épreuve d'analyse de l'agrégation sur la leçon 208.

Exercice. *Soit V un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ dont les fonctions sont lipschitziennes. Montrer que V est de dimension finie.*

Démonstration : On applique le théorème de compacité de Riesz ; il suffit de montrer que $B_V(0,1)$ est relativement compacte dans $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. On applique le théorème d'Ascoli. La partie $[0,1]$ est bien compacte. Afin de montrer l'uniforme équicontinuité, il faut une borne uniforme sur les constantes de lipschitziannité des fonctions ; pour cela, on utilise le théorème de Banach-Steinhaus. On peut supposer que les constantes de lipchitziannité sont optimales, dans le sens où celle associée à f est $L_f := \sup_{\substack{x,y\in[0,1],\\ x\neq y}} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$. Montrons que $\sup_{f\in V,\ \|f\|_\infty\leqslant 1} L_f < \infty$.

Soit $(x,y) \in [0,1]^2$, tels que $x \neq y$. On considère $\varphi_{x,y} : f \in (V, \|\cdot\|_\infty) \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \in \mathbb{R}$. C'est une application linéaire, continue, en effet : $\forall f \in V,\ \ |\varphi_{x,y}(f)| \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{|x-y|}$. On remarque de plus, que, V est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, donc $(V, \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach. On applique alors le théorème de Banach-Steinhaus à $(\varphi_{x,y})_{\substack{x,y\in[0,1],\\ x\neq y}}$. Par lipschitziannité, $\forall f \in V$,

$$\sup_{\substack{x,y\in[0,1],\\ x\neq y}} |\varphi_{x,y}(f)| = L_f < \infty.$$

On obtient alors, par définition de la norme d'opérateur

$$\sup_{\substack{x,y\in[0,1],\\ x\neq y}} |||\varphi_{x,y}|||_{\mathcal{L}_c(V,\mathbb{R})} = \sup_{\substack{x,y\in[0,1],\\ x\neq y}} \left(\sup_{f\in V, \|f\|_\infty\leqslant 1} |\varphi_{x,y}(f)|\right) < \infty.$$

Ceci montre que $M := \sup_{f\in V,\|f\|_\infty\leqslant 1} L_f < \infty$.

Uniforme équicontinuité : soit $\varepsilon > 0$, $\forall f \in V$, $\|f\|_\infty \leqslant 1$, $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|x-y| \leqslant \delta := \frac{\varepsilon}{M}$,

$$|f(x)-f(y)| \leqslant L_f|x-y| \leqslant M\delta = \varepsilon.$$

Compacité ponctuelle : il faut montrer que $\forall x \in [0,1]$, $\mathcal{A}(x) := \left\{f(x), f\in V, \|f\|_\infty \leqslant 1\right\}$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}$, *i.e.* bornée. C'est immédiat ($\mathcal{A}(x) \subseteq [-1,1]$). Le théorème d'Ascoli s'applique et conclut. ■

Remarque. *Un exercice similaire est le suivant : soit V un sous-espace vectoriel fermé de l'espace $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ dont les fonctions sont dérivables. Montrer que V est de dimension finie.*

1.7 Une application aux séries

Proposition 7

Soit $p \in]1,+\infty[$, et x une suite quelconque. On suppose que pour tout $y \in l^{p'}(\mathbb{N})$, la suite $(x_n y_n)$ converge, où p' désigne l'exposant conjugué de p. Montrer que $x \in l^p(\mathbb{N})$.

Démonstration : On définit pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$T_N = \begin{bmatrix} l^{p'}(\mathbb{N}) & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \sum_{k=0}^{N} x_k y_k \end{bmatrix}.$$

C'est une application linéaire continue. En effet, pour tout $y \in l^{p'}(\mathbb{N})$, on a :

$$|T_N(y)| \leq \left(\sum_{k=0}^{N} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \|y\|_{l^{p'}}.$$

De plus, on obtient l'estimation :

$$|||T_N|||_{l^{p'}(\mathbb{N})'} \leq \left(\sum_{k=0}^{N} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Afin de montrer l'égalité, on définit la suite y par : pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, $y_k = \mathrm{sgn}(x_k)x_k^{p-1}$ et $y_k = 0$ sinon. Il s'agit d'une suite à support fini donc dans $l^{p'}(\mathbb{N})$ et on a :

$$\|y\|_{l^{p'}(\mathbb{N})} = \left(\sum_{k=0}^{N} |x_k|^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\sum_{k=0}^{N} |x_k|^{p}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

en vertu de la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Enfin,

$$T_n(y) = |T_n(y)| = \sum_{k=0}^{N} |x_k|^p = \|y\|_{l^{p'}(\mathbb{N})} \left(\sum_{k=0}^{N} |x_k|^p\right)^{1-\frac{1}{p'}}.$$

Ainsi,

$$|||T_N|||_{l^{p'}(\mathbb{N})'} = \left(\sum_{k=0}^{N} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $(l^{p'}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{l^{p'}(\mathbb{N})})$ est complet, et $(T_N)_N$ est une suite d'opérateurs linéaires continus. On peut appliquer le théorème de Banach-Steinhaus, puisque, par hypothèse, pour tout $y \in l^{p'}(\mathbb{N})$, $\sup_{N\in\mathbb{N}} |T_N(y)|$ est fini. Alors,

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} |||T_N|||_{l^{p'}(\mathbb{N})} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Ainsi, $x \in l^p(\mathbb{N})$. ■

1.8 Un contre-exemple sans complétude

On considère l'ensemble $(c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ des suites nulles à partir d'un certain rang. Il n'est pas complet. On définit pour $n \in \mathbb{N}$, $L_n : \begin{bmatrix} (c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \end{bmatrix}$. C'est un opérateur linéaire. De plus, $\forall u \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $|L_n(u)| \leqslant (n+1)\|u\|_\infty$. Ainsi, $L_n \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})'$ et $|||L_n|||_{c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})'} \leqslant n+1$. La suite $(\underbrace{1, \cdots, 1}_{n+1 \text{ fois}}, 0, \cdots, 0, \cdots) \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ fournit un cas d'égalité. Ainsi,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |||L_n|||_{c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})'} = +\infty.$$

Néanmoins, $\forall u \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $(L_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, donc convergente, donc bornée dans $\mathbb{R}$ et le théorème de Banach-Steinhaus est mis en défaut.

2 Théorème de Lax-Milgram :

Recasages possibles : 201-205-213-222-234.
Référence : H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*.

Theorème 3

Soient $(H, (\cdot|\cdot)_H)$ un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue et coercive sur H, l une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique $u \in H$, tel que $\forall v \in H$, $a(u, v) = l(v)$.

Si de plus a est symétrique, alors u est l'unique minimim de $J : v \in H \mapsto \frac{1}{2}a(v, v) - l(v) \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Première étape : on montre qu'il existe $A \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que $\forall u, v \in H$, $a(u, v) = (A(u)|v)_H$.

Remarquons que pour tout $u \in H$, $v \in H \mapsto a(u, v) \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire continue sur H. Par suite, le théorème de représentation de Riesz assure l'existence d'un unique vecteur $A(u) \in H$ tel que $\forall v \in H$, $a(u, v) = (A(u)|v)_H$. Montrons que A est un opérateur linéaire. En effet, $\forall u, u' \in H$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall v \in H$, on obtient par bilinéarité du produit scalaire et de a,

$$(A(\lambda u + u')|v)_H = a(\lambda u + u', v) = \lambda a(u, v) + a(u', v) = (\lambda A(u) + A(u')|v)_H,$$

$$\big(A(\lambda u + u') - \lambda A(u) - A(u')|v\big)_H = 0.$$

Ceci conclut, puisque $H^{\perp} = \{0\}$. Montrons la continuité : remarquons que $\forall u \in H$,

$$\|A(u)\|_H^2 = (A(u)|A(u))_H = a(u, A(u)) \leqslant M \|u\|_H \|A(u)\|_H .$$

Ainsi, $A \in \mathcal{L}_c(H)$.

Deuxième étape : montrons que A est un isomorphisme sur H. Montrons que A est injectif : soit $x \in \ker(A)$, on a, par coercivité de a :

$$\exists \alpha > 0, \ \alpha \|x\|_H^2 \leqslant a(x,x) = (A(x)|x)_H = 0.$$

Ainsi $x = 0$.
Montrons désormais que A est surjectif, on montre que A est d'image dense et fermée. On utilise le critère de densité des espaces de Hilbert, montrons que $\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \{0\}$. Soit $y \in \mathrm{Im}(A)^{\perp}$. Alors pour tout $x \in H$, $0 = (A(x)|y)_H = a(x,y)$. En particulier,

$$\alpha \|y\|_H^2 \leqslant a(y,y) = (A(y)|y) = 0.$$

Ainsi, $y = 0$. Montrons que l'image est fermée. Remarquons que pour tout $x \in H$,

$$\alpha \|x\|_H^2 \leqslant a(x,x) = (A(x)|x)_H \leqslant \|A(x)\|_H \|x\|_H .$$

Ainsi, $\forall x \in H$, $\|x\|_H \leqslant \dfrac{1}{\alpha} \|A(x)\|_H$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Im}(A)^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in H$ dans $(H, (\cdot|\cdot)_H)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in H$ tel que $y_n = A(x_n)$. Puisque la suite (y_n) converge dans $(H, (\cdot|\cdot)_H)$, elle est de Cauchy dans $(H, (\cdot|\cdot)_H)$, c'est donc le cas de la suite $(x_n)_n$ par l'inégalité précédente. Par complétude de $(H, (\cdot|\cdot)_H)$, elle converge vers $x \in H$. Par continuité de A et unicité de la limite, $y = A(x)$, donc $y \in \mathrm{Im}(A)$.

Troisième étape : on conclut. Le théorème de Riesz assure l'existence de $f \in H$ tel que $l(v) = (f|v)_H$ pour tout $v \in H$. Alors, on a :

$$\forall v \in H, \quad a(A^{-1}(f), v) = (A(A^{-1}(f))|v)_H = (f|v)_H = l(v).$$

Unicité : soient $(u, u') \in H^2$ deux potentielles solutions. Alors, on a :

$$\forall v \in H, \quad a(u - u', v) = 0.$$

Alors, $\alpha \|u - u'\|_H^2 \leqslant a(u - u', u - u') = 0$. Ceci conclut.

Quatrième étape : caractérisation du cas symétrique. On remarque que pour tout $v \in H$,

$$J(u+v) - J(u) = \frac{1}{2} a(u+v, u+v) - l(u+v) - \frac{1}{2} a(u,u) + l(u) = \frac{1}{2} a(v,v) \geqslant \frac{\alpha}{2} \|v\|_H^2 .$$

Ainsi u est l'unique point de H qui réalise le minimum de J. ■

Remarque. *Si a est symétrique, alors, elle définit un produit scalaire, dont la norme associée est équivalente à la norme hilbertienne, et il suffit d'appliquer le théorème de Riesz pour conclure.*

Voici une application du théorème de Lax-Milgram à la résolution d'EDP elliptiques via les formulations variationnelles. Il faut absolument bien maitriser les espaces de Sobolev si on choisit un tel développement.

Proposition 8

Le problème de Sturm-Liouville suivant (avec conditions aux bords de Dirichlet) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(0,1)$.

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{sur }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases},$$

avec $p \in \mathcal{C}^1([0,1])$, et $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $p(x) > \alpha$, $q \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$ et $f \in L^2(0,1)$. Si, de plus, $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, alors cette unique solution faible $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et est solution forte.

Démonstration : On introduit la formulation variationnelle associée à l'équation. Pour cela, on la mulitplie par v et on intégre (en supposant toutes les fonctions régulières et à support compact dans $]0,1[$). On obtient

$$a(u,v) = \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x \text{ et } l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

On travaille dans l'espace de Hilbert $(H_0^1(0,1), \|\cdot\|_{H^1})$. On rappelle que $H_0^1(0,1)$ est définie comme $\overline{\mathcal{D}(0,1)}^{\|\cdot\|_{H^1}}$. C'est donc un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(0,1)$. On rappelle qu'en dimension 1 (en domaine borné), les fonctions H^1 s'injecte continuement dans $\mathcal{C}^0$ pour la norme infinie - ainsi, en identifiant un élément de H^1 à un représentant continu, $H_0^1(0,1) = \left\{v \in H^1(0,1),\ v(0) = v(1) = 0\right\}$.

Il est clair que a est une forme bilinéaire. Pour la continuité, on obtient par Cauchy-Schwarz :

$$\forall u, v \in H_0^1(0,1), \quad |a(u,v)| \leqslant \|p\|_\infty^{[0,1]} \left\|u'\right\|_{L^2} \left\|v'\right\|_{L^2} + \|q\|_\infty^{[0,1]} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2},$$

$$|a(u,v)| \leqslant \left(\|p\|_\infty^{[0,1]} + \|q\|_\infty^{[0,1]}\right) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

Enfin, la coercivité provient de :

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \quad a(v,v) = \int_0^1 p(x)v'(x)^2\mathrm{d}x + \underbrace{\int_0^1 q(x)v(x)^2\mathrm{d}x}_{\geqslant 0} \geqslant \alpha \left\|v'\right\|_{L^2}^2.$$

On utilise l'inégalité de Poincaré : en domaine borné (dans au moins une direction), il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H_0^1(0,1)$, $\|u\|_{L^2} \leqslant C \|u'\|_{L^2}$. Ainsi,

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \quad a(v,v) \geqslant \frac{\alpha}{2}\left(\left\|v'\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{C^2}\|v\|_{L^2}^2\right) \geqslant \frac{\alpha}{2}\min\left(1, \frac{1}{C^2}\right)\|v\|_{H^1}^2.$$

Enfin, l est une forme linéaire continue sur $H_0^1(0,1)$. Elle est clairement linéaire, pour la continuité, Cauchy-Schwarz fournit : $\forall v \in H_0^1(0,1),\ |l(v)| \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}$. Le théorème de Lax-Milgram fournit l'existence d'un unique $u \in H_0^1(0,1)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(0,1)$, $a(u,v) = l(v)$. Ainsi, u est solution au sens faible du problème de Sturm-Liouville. Supposons désormais la continuité de f. Montrons qu'elle l'est au sens fort. On a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$,

$$a(u,\varphi) = l(\varphi) \ i.e. \ (pu', \varphi')_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + (qu, \varphi)_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = (f, \varphi)_{\mathcal{D}',\mathcal{D}},$$

Ainsi $\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1)$,

$$(-(pu')' + qu - f, \varphi)_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0.$$

On obtient donc $(pu')' \underset{\mathcal{D}'(0,1)}{=} qu - f \in L^2(0,1)$, donc $pu' \in H^1(0,1)$. Ainsi, $u' = \frac{1}{p}(pu') \in H^1(0,1)$ donc $u \in H^2(0,1)$. D'où, $-(pu')' + qu - f \in L^2(0,1) \subseteq L^1_{loc}(0,1)$. Par injection continue de $L^1_{loc}(0,1)$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$, on a $-(pu')' + qu = f$ pp sur $(0,1)$. Si, de plus f est continue, alors, $(pu')' \underset{\mathcal{D}'(0,1)}{=} qu - f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, donc, $u' \in \mathcal{C}^1([0,1])$, puis $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$. L'égalité ayant lieu presque partout est vraie sur $]0,1[$ par continuité. Enfin, les conditions de bord sont assurées par l'espace fonctionnel considéré. ■

3 Quelques exercices :

Exercice. *Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ une application linéaire continue. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $n_x \geq 1$ tel que $T^{n_x}(x) = 0$. Montrer que T est nilpotent.*

Exercice. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire continue. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\exists M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|T(x)\|_F \geq M\|x\|_E$.*
2. *T est une application injective et d'image fermée.*

Exercice. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et F et G deux sev supplémentaires dans E. On note p_F (resp p_G) la projection sur F (resp. sur G) parallèlement à G (resp. à F). Montrer que p_F et p_G sont continues $\Leftrightarrow$ F et G sont fermés.*