Théorème du point fixe de Brouwer - Applications :

Voici les notes que j'ai réalisées lors de mon année de préparation à l'agrégation. Au delà de la démonstration du théorème, y figurent des applications/compléments.

Table des matières

1 Théorème du point fixe de Brouwer

1.1 Un lemme fondamental

Lemme 1 (*Lemme de non rétraction*)

Soit $\overline{B}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, munie de sa structure euclidienne. Alors, il n'existe pas de fonction $f : \overline{B} \to \partial\overline{B}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f|_{\partial\overline{B}} = I_d$.

Remarque 1. *Ce lemme est également vraie avec l'hypothèse f continue uniquement.*

Démonstration : On raisonne par l'absurde et on suppose donnée $f \in \mathcal{C}^1(\overline{B}, \partial\overline{B})$ telle que $f|_{\partial\overline{B}} = I_d$.

Par régularité de f, et par compacité de $\overline{B}$ en dimension finie, on a :

$$\sup_{x\in\overline{B}} |||df(x)|||_{\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)} =: M < \infty.$$

Par inégalité des accroissements finis et par connexité de $\overline{B}$, l'application f est $M-$lipschitzienne sur $\overline{B}$.

Pour $t \in [0,1]$, on définit $\phi_t : x \in \overline{B} \mapsto (1-t)x + tf(x) \in \overline{B}$.

Étape 1 : injectivité de ϕ_t : soient $t \in [0,1[$, et $(x,y) \in \overline{B}^2$. Alors,

$$\phi_t(x) = \phi_t(y) \Longrightarrow \|x-y\| = \frac{t}{1-t}\|f(x)-f(y)\| \leq \frac{Mt}{1-t}\|x-y\|.$$

Ainsi,

$$\|x-y\|\left(1-\frac{Mt}{1-t}\right) \leq 0.$$

Or, $\left(1-\frac{Mt}{1-t}\right) > 0$ ssi $t < \alpha = \frac{1}{1+M} < 1$. Ainsi, pour tout $t \in [0,\alpha[$, ϕ_t est injective.

Étape 2 : inversibilité de ϕ_t : pour tout $t \in [0,\alpha[$, pour tout $x \in B$, $d\phi_t(x) = (1-t)I_d + tdf(x)$, donc $d\phi_t(x) = (1-t)\left(I_d + \frac{t}{1-t}df(x)\right)$.

Puisque $\left|\left|\left|\frac{t}{1-t}df(x)\right|\right|\right|_{\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)} < 1$, alors pour tout $x \in B$, $d\phi_t(x)$ est inversible. Ainsi, par théorème d'inversion locale, pour tout $t \in [0, \alpha[$, ϕ_t est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme local. Étant injectif, il s'agit d'un difféomorphisme global de B sur $\phi_t(B)$.

Étape 3 : surjectivité de ϕ_t : pour tout $x \in B$, pour tout $t \in [0, \alpha[$, $\|\phi_t(x)\| < 1$, donc $\phi_t(B) \subseteq B$. Montrons l'égalité. On raisonne par connexité. $\phi_t(B)$ est un ouvert. Montrons qu'il est fermé dans B : soit $(y_n) \in \phi_t(B)^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in B$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in B$ tel que $y_n = \phi_t(x_n)$. Par compacité, $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente vers $x \in \overline{B}$. Par continuité de ϕ_t et par unicité de la limite, $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y = \phi_t(x)$. Si $x \in \partial B$, alors, $f(x) = x$ donc $y = \phi_t(x) = x \in \partial B$. Impossible. Ceci montre que $\phi_t(B) = B$.

Étape 4 : conclusion : on définit pour $t \in [0, 1]$, $P(t) = \displaystyle\int_B \det(d\phi_t(x))\mathrm{d}x$. C'est un polynôme comme intégrale d'un polynôme. On applique le changement de variable $y = \phi_t(x)$ pour $t \in [0, \alpha[$. Alors $P(t) = \int_B \mathrm{d}y = Vol(B)$ (en effet, $\det(D\phi_0(x)) = 1$ et l'application est continue et ne s'annule pas). P est donc constant sur $[0, \alpha[$, donc sur $[0, 1]$.
Enfin, pour tout $x \in B$, $\|f(x)\|^2 = 1$, donc, $f(x) \neq 0$ et $\forall x \in B, \forall h \in \mathbb{R}^n$, $(df(x)(h)|f(x)) = 0$. Ainsi, $f(x) \in \mathrm{Im}(df(x))^\perp$, donc $\mathrm{Im}(df(x))^\perp \neq \{0\}$, et l'application $df(x)$ n'est pas surjective. Par suite, pour tout $x \in B$, $\det(df(x)) = 0$. Enfin, $Vol(B) = P(1) = \int_B \det(d\phi_1(x))\mathrm{d}x = \int_B \det(df(x))\mathrm{d}x = 0$. Impossible. ■

1.2 Démonstration du théorème

Theorème 1 (*du point fixe de Brouwer*)

Soient $\overline{B}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, et $f \in \mathcal{C}^0(\overline{B}, \overline{B})$. Alors, f admet un point fixe.

Démonstration : Étape 1 : régularisation : On peut supposer f de classe $\mathcal{C}^1$, en effet : supposons donnée $\tilde{f} : \overline{B} \to \overline{B}$ continue telle que pour tout $x \in \overline{B}$, $\tilde{f}(x) \neq x$. Posons $\varepsilon = \inf\limits_{x\in\overline{B}} \left\|\tilde{f}(x) - x\right\| > 0$, par compacité. Par théorème de Weierstrass, il existe $P \in \mathbb{R}[X_1, \cdots, X_n]$ telle que $\left\|\tilde{f} - P\right\|_{\infty,\overline{B}} < \varepsilon/2$. Alors,

$$\forall x \in \overline{B}, \quad \|P(x)\| \leq 1 + \varepsilon/2.$$

Par suite, on introduit $f =: \dfrac{P}{1 + \varepsilon/2}$. Alors, $f(\overline{B}) \subseteq \overline{B}$, $f \in \mathcal{C}^\infty$. Enfin,

$$\forall x \in \overline{B}, \quad \left\|f(x) - \tilde{f}(x)\right\| \leq \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon/2}\right) \|P(x)\| + \left\|P(x) - \tilde{f}(x)\right\| < 1 + \varepsilon/2 - 1 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \overline{B}, \quad \|f(x) - x\| \geq \left\|\tilde{f}(x) - x\right\| - \left\|f(x) - \tilde{f}(x)\right\| > \varepsilon - \varepsilon = 0.$$

Ainsi, f n'admet pas de point fixe.

Étape 2 : cœur de la preuve : On suppose $f \in \mathcal{C}^1(\overline{B}, \overline{B})$ telle que $\forall x \in \overline{B}$, $f(x) \neq x$. Pour $x \in \overline{B}$, on définit $G(x)$ commme étant l'intersection de la sphére unité et de la droite passant par x et $f(x)$. On sait que :

- $\|G(x)\|^2 = 1$.
- il existe $\lambda(x) > 0$ tel que $G(x) - f(x) = \lambda(x)(x - f(x))$.

Alors,

$$\|\lambda(x)\|^2 \|x - f(x)\|^2 + 2\lambda(x)\langle x - f(x), f(x)\rangle + \|f(x)\|^2 - 1 = 0.$$

C'est un polynôme de degré 2 en $\lambda(x)$ (car $f(x) \neq x$), noté P_x. De plus, $P_x(0) = \|f(x)\|^2 - 1 \leq 0$ et $P_x(1) = \|x\|^2 - 1$, et $P_x \underset{\lambda(x)\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc P_x admet deux racines distinctes réelles. On note λ_x la racine supérieure à 1, et $x \mapsto \lambda_x$ est donc donné par les formules classiques, donc est $\mathcal{C}^1$. Ainsi, $G(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x))$ est donc $\mathcal{C}^1$. De plus, $G : \overline{B} \to \partial\overline{B} \subseteq \overline{B}$, et $G(x) = x$ sur $\partial\overline{B}$ puisque dans ce cas, $\lambda_x = 1$ car $P_x(1) = 0$. G est donc une rétraction. Impossible. ■

2 Quelques applications

2.1 Deux remarques importantes

Remarque 2. *Le théorème est faux si on travaille avec une fonction continue sur la boule ouverte unité. En effet,* $f : x \in]-1,1[\mapsto \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1 \in]-1,1[$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$*, envoie bien la boule unité sur elle-même. Enfin, elle n'admet pas de point fixe.*

Remarque 3. *Le théorème est faux en dimension infinie (dans la preuve, les arguments de compacité tombent en défaut). En effet, considèrons l'espace de Hilbert* $H = l^2(\mathbb{Z})$, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *sa base hilbertienne usuelle, et*

$$T : \begin{bmatrix} H & \to & H \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (1-\|x\|)e_0 + U(x). \end{bmatrix},$$

où U *désigne l'opérateur de shift à droite. Elle est clairement bien définie et continue, par continuité de la norme et du shift (isométrie). De plus,*

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \overline{B}_H(0,1), \quad \|T(x)\| \leq |1-\|x\|| + \|x\| = 1.$$

Pourtant, T *n'admet pas de point fixe, en effet :*

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \overline{B}_H(0,1), \quad T(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 & = & 1-\|x\| + x_{-1} \\ x_n & = & x_{n-1} \textit{ si } n \neq 0 \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x_n & = & x_0 \textit{ si } n \geq 0 \\ x_n & = & x_{-1} \textit{ sinon} \end{cases}.$$

Puisque $x \in H$, $x_0 = x_{-1} = 0$*, donc* $x = 0$ *mais c'est impossible car* $x_0 = 1 - \|x\| + x_{-1}$.

2.2 Une première application

Proposition 1

Soit $v \in \mathcal{C}^0(\overline{B}, \mathbb{R}^n)$ *telle que* $\forall x \in \partial\overline{B}$, $\langle v(x), x\rangle < 0$*. Alors,* v *s'annule.*

Démonstration : On suppose que v ne s'annule pas sur $\overline{B}$. On considère $F : \begin{bmatrix} \overline{B} & \to & \overline{B} \\ x & \mapsto & \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \end{bmatrix}$.

C'est une application continue, qui envoie $\overline{B}$ sur $\overline{B}$. Elle admet donc un point fixe par le théorème de Brouwer, il existe $x_0 \in \overline{B}$ tel que $F(x_0) = x_0$, *i.e.* $x_0 = \frac{v(x_0)}{\|v(x_0)\|}$, donc $x_0 \in \partial\overline{B}$. Ainsi, $\langle v(x_0), x_0\rangle = \|v(x_0)\| < 0$. Impossible. Ainsi v s'annule. ■

2.3 Un théorème preservé par homéomorphisme

Theorème 2 (*de Brouwer généralisé*)

Soit X *un espace homéomorphe à* $\overline{B}$*, où* $\overline{B}$ *désigne la boule unité fermée de* $\mathbb{R}^n$ *pour un entier* n *quelconque. Alors toute application continue de* X *dans lui-même admet un point fixe.*

Démonstration : Soient $f : X \to X$ une application continue et $\varphi : X \to \overline{B}$ un homéomorphisme. Alors, $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : \overline{B} \to \overline{B}$ est une application continue. Par le théorème de Brouwer démontré précedemment, elle admet un point fixe, $x_0 \in \overline{B}$, *i.e.* $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_0) = x_0$, donc $f(\varphi^{-1}(x_0)) = \varphi^{-1}(x_0)$, et f admet bien un point fixe. ■

Définition 1 (*Jauge de Minkowski*)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace vectoriel normé,* $C \subseteq C$ *un convexe contenant* 0 *en son intérieur. L'application* $\rho_C : x \in E \mapsto \inf\left\{t > 0, \frac{x}{t} \in C\right\}$ *est appelée jauge de Minkowski de* C.

Proposition 2

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, $C \subseteq E$ un convexe contenant 0 dans son intérieur. Alors,

- *$\forall x \in E$, $\forall \lambda > 0$, $\rho_C(\lambda x) = \lambda \rho_C(x)$.*
- *$\forall x, y \in E$, $\rho_C(x+y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y)$.*
- *$\exists M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\rho_C(x) \leq M \|x\|$.*

Démonstration : Remarquons que ρ_C est bien définie puisqu'il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}_E(0,r) \subseteq C$. Ainsi, pour $t > \frac{\|x\|_E}{r}$, $\left\|\frac{x}{t}\right\|_E < r$, donc $\frac{x}{t} \in C$, et l'ensemble est non vide.
Pour le premier point, remarquons que : $\forall x \in E$, $\forall \lambda > 0$,

$$\rho_C(\lambda x) = \inf\left\{t > 0, \frac{\lambda x}{t} \in C\right\} \underset{t=\lambda s}{=} \inf\left\{\lambda s > 0, \frac{x}{s} \in C\right\} = \lambda \rho_C(x).$$

De plus, soient $x, y \in E$ et $\varepsilon > 0$. On pose $\bar{x} = \frac{x}{\rho_C(x)+\varepsilon}$ et $\bar{y} = \frac{y}{\rho_C(y)+\varepsilon}$. On a, par ce qui a été fait avant, $\rho_C(\bar{x}) < 1$ donc il existe $0 < t < 1$ tel que $\bar{x}/t \in C$. Puisque $0 \in C$, par convexité de C, $\bar{x} \in C$. De la même manière, $\bar{y} \in C$. Ainsi,

$$\frac{x+y}{\rho_C(x)+\rho_C(y)+2\varepsilon} = \frac{\rho_C(x)+\varepsilon}{\rho_C(x)+\rho_C(y)+2\varepsilon}\bar{x} + \frac{\rho_C(y)+\varepsilon}{\rho_C(x)+\rho_C(y)+2\varepsilon}\bar{y} \in C$$

Ainsi, $\rho_C(x+y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y) + 2\varepsilon$. On conclut en faisant tendre ε vers 0.

Pour le dernier point, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$,

$$\frac{rx}{\|x\|} \in C,$$

donc $\rho_C(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$. L'égalité est vraie en 0. Ceci conclut. ■

Corollaire 1

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, $C \subseteq E$ un convexe contenant 0 dans son intérieur. Alors, la jauge de Minkowski est continue sur E.

Démonstration : Soient $x, y \in E$, alors $\rho_C(x) \leq \rho_C(x+y) + \rho_C(-y)$ et $\rho_C(x+y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y)$. Ainsi,

$$|\rho_C(x+y) - \rho_C(x)| \leq \max(\rho_C(y), \rho_C(-y)) \leq \frac{\|y\|}{r}.$$

Ainsi, ρ_C est lipschitz, donc continue. ■

Theorème 3

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $C \subseteq E$ un convexe compact d'intérieur non vide. Alors, C est homéomorphe à $\overline{B}$.

Démonstration : Puisque la translation est un homéomorphisme, on peut supposer sans perte de généralité que $0 \in \mathring{C}$. De plus, on définit $f : x \in E \mapsto \begin{cases} \frac{\rho_C(x)x}{\|x\|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Elle est continue sur $E \setminus \{0\}$, par ce qui a été fait avant. De plus, comme vu avant, il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in E$,

$$\rho_C(x) \leq M \|x\|.$$

Alors,

$$\|f(x)\| \leq M \|x\|,$$

ce qui montre la continuité en 0. De plus, f est bijective, et $f^{-1} : x \in E \mapsto \begin{cases} \frac{\|x\| x}{\rho_C(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Montrons que f^{-1} est continue : en effet, C est compact, donc borné ; il existe $R > 0$ tel que

$C \subseteq B(0,R)$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $(R+1)\dfrac{x}{\|x\|} \notin C$, donc $\rho_C(x) \geq \dfrac{\|x\|}{R+1}$. Ceci conclut (on a pour tout $t' \geq t > 0$, si $x/t \in C$, alors $x'/t \in C$).
Soit $x \in \overline{B}$, alors puisque C est fermé, $\dfrac{x}{\rho_C(x)} \in C$. Alors,

- si $\|x\| = 1$, $f^{-1}(x) \in C$.
- si $\|x\| < 1$, alors $f^{-1}(x) = \|x\| \cdot \dfrac{x}{\rho_c(x)} \in C$ par convexité de C, et puisque $0 \in C$.

Ainsi, $f^{-1}(\overline{B}) \subseteq C$.
Réciproquement, si $x \in C$, alors, $\dfrac{x}{1} \in C$, donc $\rho_C(x) \leq 1$, donc $\|f(x)\| \leq 1$. Ainsi, $f(C) \subseteq \overline{B}$, *i.e.* $C \subseteq f^{-1}(\overline{B})$. ■

Corollaire 2

Toute fonction continue d'un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même admet un point fixe.

Démonstration : Soit C un tel convexe compact non vide. On conclut immédiatement avec le théorème 2 et le théorème 3. Il suffit de remarquer que l'on peut lever l'hypothèse C d'intérieur non vide en supposant simplement C non vide : considérons F le sous-espace affine engendré par C, qui est de dimension finie n, muni de la topologie induite. Alors l'intérieur de C est non vide dans F. ■

2.4 Une application au théorème de Perron Frobénius

Theorème 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ telle que $\rho(A) \neq 0$. Alors, il existe $v \in (\mathbb{R}^+)^n$ telles que $Ax = \lambda x$, et $\rho(A) = \lambda$.

Démonstration : Soit $C = \left\{ y \in \mathbb{R}^n,\ y \geq 0,\ \|y\|_1 = 1,\ \rho(A)y \leq Ay \right\}$. Montrons que C est un convexe, compact, non vide.
Non vide : soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $Av = \lambda v$, où $\rho(A) = |\lambda|$, et $\|v\|_1 = 1$. On note $|v| = (|v_i|)_{1 \leq i \leq n}$. Montrons que $|v| \in C$. On a immméditemment l'hypothèse de positivité, l'égalité sur la norme. De plus,

$$\rho(A)y = |\lambda| \begin{pmatrix} |v_1| \\ \cdots \\ |v_n| \end{pmatrix} = |\lambda v| = |Av| \leq A|v|,$$

par positivité de A. Ceci conclut.
Convexe : soient $y, y' \in C$ et $t \in [0,1]$. Alors, $yt + (1-t)y' \geq 0$. De plus $\|yt + (1-t)y'\|_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |y_j t + (1-t)y'_j| = t\,\|y\|_1 + (1-t)\,\|y'\|_1$. L'inégalité est transportée immédiatement.
Compact : on a clairement C fermé. De plus, $C \subseteq [0,1]^n$, donc il est borné. On conclut par argument de dimension finie.

On définit

$$f : \begin{bmatrix} C & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & \dfrac{Ax}{\|Ax\|_1} \end{bmatrix}.$$

L'application f est bien définie : en effet, pour $x \in C$, si $\|Ax\|_1 = 0$, alors, $x \in \ker(A)$. Donc $0 \leq x \leq 0$ (puisque $\rho(A) \neq 0$) donc $x = 0$ et $\|x\|_1 = 1$. Impossible.
Montrons que $f(C) \subseteq C$: en effet, soit $x \in C$. Alors, on a immédiatement $f(x) = \dfrac{Ax}{\|Ax\|_1} \geq 0$ puisque $A \geq 0$ et $x \geq 0$. On a aussi $\|f(x)\|_1 = 1$, par définition. Enfin

$$\rho(A)f(x) = \rho(A)\frac{Ax}{\|Ax\|_1} = \frac{A}{\|Ax\|_1}(\rho(A)x) \leq \frac{A^2x}{\|Ax\|_1} = Af(x).$$

Enfin, f est clairement continue. Le théorème de Brouwer s'applique et il existe $x \in C$ tel que $f(x) = x$, *i.e.* $Ax = \|Ax\|_1\, x$, donc x est un vecteur propre associé à la valeur propre $\|Ax\|_1$. De plus, on a l'inégalité :

$$\rho(A)x \leq Ax = \|Ax\|_1\, x.$$

Puisque $\|x\|_1 = 1$ et $x \geq 0$, il existe un $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_{i_0} > 0$. Alors, on obtient $\rho(A) \leq \|Ax\|_1$. Puisque $\|Ax\|_1$ est une valeur propre, on conclut à $\|Ax\|_1 = \rho(A)$. D'où le résultat. ■

3 Théorème du point fixe de Schauder

3.1 Un premier théorème de Schauder

Theorème 5 (*du point fixe de Schauder*)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $C \subset E$ un convexe compact non vide. Alors toute application continue $f : C \to C$ possède un point fixe.

Démonstration : Soit $f : C \to C$ une application continue. Par théorème de Heine, C étant compact, f est uniformément continue sur C. Soit $\varepsilon > 0$, on considère $\delta > 0$ un module d'uniforme continuité de f. L'ensemble C étant compact, du recouvrement,

$$C \subset \bigcup_{x \in C} \mathring{B}_E(x, \delta),$$

on peut en extraire un recouvrement fini :

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{B}_E(x_i, \delta),$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \cdots, x_n \in C$. Notons $F := Vect(f(x_1), \cdots, f(x_n))$, un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. L'ensemble $C^* := C \cap F$ est alors un convexe compact de dimension finie. On considère une partition de l'unité associée à ce recouvrement, *i.e.* des fonctions $\chi_1, \cdots, \chi_n$ telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\chi_i \in \mathcal{C}^0(C, \mathbb{R})$, $Supp(\chi_i) \subseteq \mathring{B}_E(x_i, \delta)$, $0 \leq \chi_i \leq 1$, et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi_i = 1$ sur C. On définit l'application :

$$g : x \in C^* \mapsto \sum_{i=1}^{n} \chi_i(x) f(x_i).$$

Par convexité de C, $g(C^*) \subseteq C^*$. Par le théorème du point fixe de Brouwer appliqué à g, continue, on a l'existence de $x_\varepsilon \in C^*$ tel que $g(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Ainsi,

$$f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon = f(x_\varepsilon) - g(x_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \chi_i(x_\varepsilon)(f(x_\varepsilon) - f(x_i)).$$

Puisque $Supp(\chi_i) \subset \mathring{B}_E(x_i, \delta)$, soit $\chi_i(x_\varepsilon) = 0$, ou alors $\|x_i - x_\varepsilon\|_E < \delta$, donc, par uniforme continuité, $\|f(x_i) - f(x_\varepsilon)\|_E < \varepsilon$. Ainsi,

$$\|f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\|_E \leq \varepsilon.$$

On définit ainsi une suite $(x_{1/n})_{n>0}$ d'éléments de C^*, un compact, dont on peut extraire une sous-suite $(x_{1/\varphi(n)})_{n>0}$ convergeant vers $x \in C^*$. La fonction f étant continue, le passage à la limite dans l'inégalité précédente montre que $f(x) = x$, donc f admet un point fixe sur C. ■

3.2 Quelques rappels topologiques

Définition 2

Soit (X, d) un espace métrique. Il est dit précompact si : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon ε. On dit qu'une partie A de X est précompacte si c'est le cas pour l'espace métrique (A, d) (muni de la distance induite).

Proposition 3

Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X. Alors, A est précompact ssi $\bar{A}$ est *précompact.*

Démonstration : Le sens réciproque est évident puisque $A \subseteq \bar{A}$. Réciproquement, si on suppose que A est précompact, alors, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \cdots, x_n \in E$ tels que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{B}(x_i, \varepsilon/2) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i, \varepsilon/2)}.$$

Puisque l'espace de droite est fermé (comme une union finie de boules fermées), on obtient par passage à l'adhérence :

$$\bar{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i, \varepsilon/2)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{B}(x_i, \varepsilon).$$

Ainsi, $\bar{A}$ est précompact. Ceci conclut. ∎

Proposition 4

Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est compact ssi X est complet et précompact.

Démonstration : Un espace métrique compact est bien évidemment complet. Il est également précompact, par propriété de Borel Lebesgue.
Réciproquement, supposons X complet et précompact. On considère $(x_n)_n$ une suite de X. Montrons qu'elle admet une sous-suite convergente. Il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy, puisque X est supposé complet. Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une famille finie $\mathcal{H}_n$ de boules de rayon $\frac{1}{n}$ qui recouvre X. On construit par récurrence une application strictement croissante $\varphi_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une boule $B_n \in \mathcal{H}_n$ qui contient la sous-suite $(x_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.

1. Puisque $\mathcal{H}_0$ est finie, et que tous les x_n sont dans une boule de $\mathcal{H}_0$, il existe par principe des tiroirs, une boule $B_0 \in \mathcal{H}_0$ qui contient une infinité de x_n, donc une sous-suite $(x_{\varphi_0(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.
2. Supposons $\varphi_0, \cdots, \varphi_n$ et $B_0, \cdots, B_n$ construites. Comme $\mathcal{H}_{n+1}$ est finie, et que les $x_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(k)}$ sont dans une boule de $\mathcal{H}_{n+1}$, il existe une boule $B_{n+1} \in \mathcal{H}_{n+1}$ qui contient la sous-suite $(x_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_{n+1}(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.

Ainsi, la sous-suite obtenue par extraction diagonale $(y_n) = (x_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie pour tout n, $y_n \in B_n$, donc $d(y_n, y_m) < \frac{1}{n}$ si $m > n$, donc la suite est de Cauchy. ∎

Proposition 5

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et A une partie relativement compacte de E. Alors, $\overline{conv}(A)$ est compacte dans $(E, \|\cdot\|_E)$.

Démonstration : Puisque A est relativement compacte, alors $\bar{A}$ est compacte donc précompacte, donc, A est précompacte, donc pour tout $\varepsilon >$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n \in A$ tels que :

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon/2).$$

Posons $C = conv(x_1, \cdots, x_n) \subseteq conv(A)$. C'est un convexe, borné, en dimension finie, donc relativement compacte. Par suite, il existe un nombre fini de points $y_1, \cdots, y_m \in C$ tels que :

$$C \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon/2).$$

Soit $z \in conv(A)$, alors il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in [0, 1]$ et $z_1, \cdots, z_l \in A$ avec $z = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j z_j$ et $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1$.
Par la première propriété de recouvrement, pour tout $j \in [\![1, l]\!]$, il existe $k_j \in [\![1, n]\!]$ tels que $z_j = x_{k_j} + r_{k_j}$ avec $\left\| r_{k_j} \right\|_E < \varepsilon/2$.
On obtient alors :

$$z = \underbrace{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j x_{k_j}}_{\in C} + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j r_{k_j}.$$

Par la seconde propriété, il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j x_{k_j} = y_i + s_i$ où $\|s_i\|_E < \varepsilon/2$. Ainsi, $z = y_i + \left(s_i + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j r_{k_j}\right)$, et $\left\|s_i + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j r_{k_j}\right\|_E < \varepsilon$. Ainsi,

$$conv(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(y_i, \varepsilon);$$

Ainsi, $conv(A)$ est précompacte, donc $\overline{conv}(A)$ est précompacte. Étant une partie fermée d'un Banach, elle est complète. La caractérisation précédente conclut à la compacité de $\overline{conv}(A)$. ■

Remarque 4. *Si K est compact alors, $conv(K)$ est compact est vrai en dimension finie. C'est un corollaire du théorème de Carathéodory. Ce résultat est faux en dimension infinie.*

3.3 Un deuxième théorème de Schauder

Theorème 6 (*du point fixe de Schauder*)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un Banach, C un convexe fermé non vide de E, et $T : C \to C$ une application continue telle que $T(C)$ est relativement compacte dans E. Alors, T admet un point fixe.

Démonstration : Soit $C' = \overline{conv}(T(C))$. Il s'agit d'un convexe compact non vide (par la proposition précédente). Par convexité de C, et puisque C est fermé, $C' \subseteq C$. On peut alors appliquer le premier théorème du point fixe de Schauder à $T_{|C'}$, continue, puisque $T(C') \subseteq T(C) \subseteq C'$. ■

Application (théorème de Cauchy-Arzela-Peano)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$, une application continue. Alors pour tout $t_0 \in I$, $x_0 \in \Omega$, il existe une solution (J, x) du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} x'(t) & = & f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}.$$

En effet, soit $T_0 > 0$ tel que $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subseteq I$ (possible car I est ouvert). Soit $r_0 > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subseteq \Omega$. La fonction f est continue sur le compact $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(x_0, r_0)$, donc elle est bornée par M. Soit $T = \min(T_0, r_0/M)$. ***Toute solution du problème de Cauchy sur** $[t_0 - T, t_0 + T]$ **est à valeurs dans** $\overline{B}(x_0, r_0)$. En effet : soit $x \in \mathcal{C}^1([t_0 - T, t_0 + T])$, une solution du problème de Cauchy, et $\tau = \sup\{t \in [t_0, t_0 + T],\ \forall s \in [0, t],\ \|x(s) - x_0\| \leq r_0\}$. Supposons $\tau < T + t_0$. Alors,*

$$r_0 = \|x(\tau) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} f(s, x(s)) \mathrm{d}s \right\| \leq M(\tau - t_0) < MT \leq r_0.$$

Ainsi, $\tau = T + t_0$, ceci conclut à l'existence du cyclindre de sécurité.

On introduit $E = \left(\mathcal{C}^0\left([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(x_0, r_0)\right), \|\cdot\|_\infty\right)$, espace de Banach. On considère :

$$\Phi : \begin{bmatrix} E & \to & E \\ x & \mapsto & \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \mathrm{d}s\right) \end{bmatrix}.$$

*L'application est **bien définie**, par théorème de continuité sous le signe intégral, et est bien à valeurs dans la boule $\overline{B}(x_0, r_0)$ puisque $MT \leq r_0$. On applique le théorème du point fixe de Schauder à $C = E$. C'est bien un **convexe fermé et non vide** de E. On a déjà vu que $\phi(E) \subset E$. Montrons que Φ **est continue**. L'application f est continue sur C_0, compact donc uniformément* *continue par Heine : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que pour tout $(t,x)(t',x') \in C_0$, $\|(t,x)-(t',x')\| \leq \delta$, $\|f(t,x)-f(t',x')\| \leq \dfrac{\varepsilon}{T}$. Ainsi, pour tout $x, y \in E$, $\|x-y\|_\infty \leq \delta$, pour tout $t \in [t_0-T, t_0+T]$,*

$$\|\Phi(x)(t)-\Phi(y)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \left(f(s,x(s)) - f(s,y(s))\right) \mathrm{d}s \right\| \leq \varepsilon,$$

donc $\|\Phi(x)-\Phi(y)\|_\infty \leq \varepsilon$.

*Montrons que $\overline{\Phi(E)}$ **est compacte dans** E. On utilise le théorème d'Ascoli : $[t_0-T, t_0+T]$ est une partie compacte, $\overline{B}(x_0,r_0)$ est complet, $\Phi(E) \subseteq E$.*

1. *$\Phi(E)$ est équicontinue : soit $\varepsilon > 0$, soient $t_1, t_2 \in [t_0-T, t_0+T]$, tels que $|t_1-t_2| \leq \delta := \dfrac{\varepsilon}{M}$. Alors, pour tout $x \in E$,*

$$\|\Phi(x)(t)-\Phi(x)(t')\| = \left\| \int_{t}^{t'} f(s,x(s))\mathrm{d}s \right\| \leq M|t-t'| \leq \varepsilon.$$

2. *Pour tout $t \in [t_0-T, t_0+T]$, $\Phi(E)(t) = \{\Phi(x)(t), x \in E\}$ est bien relativement compact, car bornée et de dimension finie, puisqu'à valeurs dans $\overline{B}(x_0,r_0)$.*

Le théorème du point fixe de Schauder conclut à l'existence d'un point fixe. Le théorème fondamental de l'intégration donne donc la régularité $\mathcal{C}^1$ au point fixe, puis la formulation intégrale est équivalente au problème de Cauchy.

Remarques.

1. *On n'a pas unicité : $y' = 3|y|^{2/3}$, $y(0) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ deux solutions : $y \equiv 0$ et $y : t \in \mathbb{R} \mapsto t^3$.*
2. *On utilise fortement la compacité du cylindre C_0 et des segments, c'est pourquoi la preuve est profondément basée sur la dimension finie. Le théorème est d'ailleurs faux en dimension infinie : considérons l'espace de Banach $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ (il est bien complet car fermé de $(l^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$; soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $u \in l^\infty(\mathbb{N})$, alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|u_n - u\|_\infty \leq \varepsilon/2$. De plus $u_{n_0} = (u_{n_0}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $|u_{n_0}^k| \leq \varepsilon/2$. Alors, pour tout $k \geq k_0$, $|u^k| \leq \|u-u_{n_0}\|_\infty + |u_{n_0}^k| \leq \varepsilon$). De plus, on définit :*

$$f : (u_n)_{n\geq 0} \in c_0(\mathbb{N}) \mapsto \left(\sqrt{|u_n|} + \frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0} \in c_0(\mathbb{N}).$$

Elle est bien définie et continue : soient $\varepsilon > 0$, $(u,v) \in c_0(\mathbb{N})^2$ telles que $\|u-v\|_\infty \leq \delta := \varepsilon^2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
Si $\sqrt{|u_n|} + \sqrt{|v_n|} \leq \varepsilon$, alors, $|f(u_n) - f(v_n)| \leq \varepsilon$ par inégalité triangulaire. Sinon,

$$|f(u_n) - f(v_n)| \leq \frac{||u_n| - |v_n||}{\sqrt{|u_n|} + \sqrt{|v_n|}} \leq \frac{\|u-v\|_\infty}{\sqrt{|u_n|} + \sqrt{|v_n|}} \leq \varepsilon.$$

Néanmoins, le problème de Cauchy $\begin{cases} u'(t) &= f(u(t)) \\ u(0) &= 0 \end{cases}$ n'admet pas de solution. Si (I,y) est solution, alors :

$$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ y_n'(t) = \sqrt{|y_n(t)|} + \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc, pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}_+^*$, $y_n(t) > y_n(0) = 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I \cap \mathbb{R}_+^*,\ y_n'(t) \geq \sqrt{|y_n(t)|} = \sqrt{y_n(t)} \text{ i.e. } \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I \cap \mathbb{R}_+^*,\ y_n(t) \geq 4t^2 > 0.$$

Ainsi, $y_n(t) \notin c_0(\mathbb{N})$. Impossible.