## Solution des questions de cours

soient $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, et $(f, g, u) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^+)^3$ telles que :

$$\forall t \in I,\ u(t) \leq f(t) + \left| \int_{t_0}^{t} u(s)g(s)\mathrm{d}s \right|.$$

Alors,

$$\forall t \in I,\ u(t) \leq f(t) + \left| \int_{t_0}^{t} f(s)g(s) \exp\left( \left| \int_{s}^{t} g(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right| \right) \mathrm{d}s \right|.$$

Preuve : on définit sur $I$ la fonction $y$ par $y(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} u(s)g(s)\mathrm{d}s$. Par théorème fondamental de l'intégration, elle est dérivable sur $I$. Soit $I^+ = I \cap [t_0, +\infty[$. Alors, pour tout $t \in I^+$,

$$y'(t) = u(t)g(t) \underset{g \geq 0}{\leq} (f(t) + y(t))g(t).$$

Alors,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left( y(t) \exp\left( -\int_{t_0}^{t} g(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right) \right) \exp\left( \int_{t_0}^{t} g(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right) = y'(t) - g(t)y(t) \leq f(t)g(t).$$

Donc pour tout $t \in I^+$,

$$y(t) \exp\left( -\int_{t_0}^{t} g(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right) - \underset{=y(t_0)}{0} \leq \int_{t_0}^{t} f(s)g(s) \exp\left( -\int_{t_0}^{s} g(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}s.$$

D'où

$$y(t) \leq \int_{t_0}^{t} f(s)g(s) \exp\left( \int_{s}^{t} g(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}s.$$

Puisque $u(t) \leq f(t) + y(t)$, on obtient le résultat.

## Solution de l'exercice 1

L'équation n'est pas sous forme résolue. On commence alors par résoudre l'équation différentielle sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$.

$$\text{Sur } I,\ x^2y' - y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x^2}y = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, homogène, à coefficient $a : x \in I \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ continu, Par le théorème de Cauchy-lipschitz linéaire, l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel de dimension 1. Ainsi,

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{x}},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche maintenant les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$. On doit étudier la possibilité d'effectuer un raccordement $\mathcal{C}^1$ en 0. On raisonne par analye synthèse :

**Analyse :** on suppose que $y$ est une solution de $x^2y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$. Alors, $y_{|\mathbb{R}_+^*} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*}$ et $y_{|\mathbb{R}_-^*} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}_-^*}$, donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x > 0,\ y(x) = \lambda e^{-\frac{1}{x}}$$
$$\forall x < 0,\ y(x) = \mu e^{-\frac{1}{x}}$$

On remarque que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0,\\ x<0}} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$. Si $\mu \neq 0$, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0,\\ x<0}} |y(x)| = +\infty$. **Nécessairement,** $\mu = 0$. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0,\\ x>0}} y(x) = 0$, et le recollement est continu en 0.

De plus, pour $x > 0$, $\dfrac{y(x)}{x} = \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Donc, le prolongement est dérivable, et $y'(0) = 0$ (il est en fait $\mathcal{C}^\infty$). **Synthèse :** pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Elle est par construction solution de l'équation dfférentielle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Enfin, l'équation est bien vérifiée en 0 car $f_\lambda(0) = 0$. Donc,

$$\mathcal{S}_\mathbb{R} = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

## Solution de l'exercice 2

La fonction $f : \begin{bmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 1 + x^2 - 2xy + y^2 \end{bmatrix}$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, donc elle est continue et localement lipschitzienne. Les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont réunies, donc, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy $\begin{cases} y' & = & f(x, y) \\ y(0) & = & y_0 \end{cases}$ admet une unique solution $(I, y)$ maximale définie sur un intervalle $I = (T_*, T^*)$, ouvert, contenant 0.

(a) $x \mapsto x$ est solution du problème de Cauchy avec condition initiale $y(0) = 0$. Ainsi, on conclut par unicité. La solution maximale est globale.

(b) Il s'agit d'une équation de Ricatti. On raisonne par analyse synthèse. **Analyse** : on considère $y$ une solution sous la forme $y(x) = x + \dfrac{1}{v(x)}$. Alors,

$$y'(x) = 1 - \frac{v'(x)}{v^2(x)} = 1 + x^2 - 2\left(x + \frac{1}{v(x)}\right)x + \left(x + \frac{1}{v(x)}\right)^2,$$

*i.e.*

$$1 - \frac{v'(x)}{v^2(x)} = 1 + x^2 - 2x^2 - \frac{2x}{v(x)} + x^2 + \frac{2x}{v(x)} + \frac{1}{v^2(x)}.$$

Ainsi,

$$v'(x) = -1.$$

Donc, $v(x) = C - x$. Ainsi,

$$y(x) = x + \frac{1}{C - x}.$$

$y(0) = \frac{1}{C} = 1$, donc $C = 1$. On obtient alors $y(x) = x + \dfrac{1}{1 - x}$, définie sur $]-\infty, 1[$.

Pour la **synthèse**, on vérifie que $y$ est bien solution. Puisque $\lim\limits_{x \to 1^-} |y(x)| = +\infty$, la solution est maximale.