Solution des questions de cours

1. Puisque la fonction F est supposée continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, le théorème de Cauchy-Lipschitz global assure que l'équation différentielle considérée admet une unique solution globale, à condition initiale fixée. Il a donc unicité. La solution est globale, donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. D'après le cours, la solution dépend continuement de la donnée initiale. L'application est donc continue.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$, fixé. L'application est lipschitzienne : en effet, pour tout $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$,

$$|x(t,x_0) - x(t,y_0)| = \left| x_0 + \int_0^t F(s, x(s,x_0))\mathrm{d}s - y_0 - \int_0^t F(s, x(s,y_0))\mathrm{d}s \right|.$$

$$|x(t,x_0) - x(t,y_0)| \leq |x_0 - y_0| + \left| \int_0^t |F(s, x(s,x_0)) - F(s, x(s,y_0))|\mathrm{d}s \right|.$$

Par hypothèse, F est globalement lipschitzienne, et, en appelant L la constante de Lipschitz, il vient :

$$|x(t,x_0) - x(t,y_0)| \leq |x_0 - y_0| + L \left| \int_0^t |x(s,x_0) - x(s,y_0)|\mathrm{d}s \right|.$$

Le lemme de Grönwall fournit alors :

$$|x(t,x_0) - x(t,y_0)| \leq |x_0 - y_0| \, e^{L|t|}.$$

Ceci montre le résultat. On retrouve la continuité énoncée en 2.

Solution de l'exercice 1

1. L'équation différentielle considérée est équivalente à :

$$y'(t) = g(t, y(t)),$$

avec

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,y) & \mapsto & F(t,y) + \epsilon \cos(y) \end{array}.$$

L'application est clairement continue. Elle est également globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable comme somme de deux telles fonctions. En effet, F est supposée globalement lipschitzienne. De plus, l'inégalité des accroissements finis assure que : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leqslant \|\cos'\|_{\infty,\mathbb{R}} |x - y| = |x - y|.$$

Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz global s'applique et l'équation différentielle considérée admet une unique solution globale, à condition initiale fixée.

2. Soit $T \geq 0$. Pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$|x(t,x_0) - y(t,y_0)| = \left| x_0 + \int_0^t F(s, x(s,x_0))\mathrm{d}s - y_0 - \int_0^t (F(s, y(s,y_0)) + \epsilon \cos(y(s,y_0)))\mathrm{d}s \right|.$$

Ainsi, le caractère L-global lipschitz de F donne :

$$|x(t,x_0) - y(t,y_0)| \leqslant |x_0 - y_0| + L \int_0^t |x(s,x_0) - y(s,y_0)|\mathrm{d}s + \epsilon T.$$

3. On applique le lemme de Grönwall a cette inégalité : on obtient, pour tout $t \in [0, T]$,

$$|x(t, x_0) - y(t, y_0)| \leqslant (|x_0 - y_0| + \epsilon T)\, e^{Lt}.$$

Ainsi, on obtient donc :

$$\sup_{t \in [0,T]} |x(t, x_0) - y(t, x_0)| \leqslant \epsilon T e^{LT} \underset{\epsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci montre le résultat.

Solution de l'exercice 2

Il est clair que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, y) & \mapsto & y^2 \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, donc continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, le problème posé admet donc une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I, contenant 0.

Brouillon : si y ne s'annule pas, on peut résoudre par variables séparées :

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = 1.$$

Ainsi,

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(0)} = t.$$

Ainsi,

$$y(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Cette fonction est définie sur $]-\infty; 1[$ ou sur $]1; +\infty[$. Il faut choisir l'intervalle qui contient $t_0 = 0$.
On considère

$$y(t) = \frac{1}{1-t},$$

définie sur $]-\infty; 1[$. Elle est clairement solution du problème de Cauchy. Est-ce la solution maximale ? Si ce n'est pas le cas, alors il existe une solution $(J, \tilde{y})$ avec $]-\infty; 1[\subsetneq J$. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a donc nécessairement, pour tout $t < 1$,

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Par suite, il vient par continuité $\tilde{y}(1) = \lim_{t \to 1^-} \tilde{y}(t) = +\infty$. C'est impossible. On ne peut donc pas prolonger y de manière continue. Il s'agit de l'unique solution maximale.

Solution de l'exercice 3

1. On introduit $g := f + f'$. Remarquons que f est solution de l'équation différentielle

$$y' + y = g.$$

Résolvons cette équation différentielle : les solutions de l'équation différentielle homogène sont données par : $x \mapsto \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière y_p via la méthode de la variation de la constante, *i.e.* sous la forme $y_p(x) = \lambda(x) e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Alors,

$$y_p \text{ est solution de l'équation } \Leftrightarrow \lambda'(x) e^{-x} = g(x).$$

Alors,

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-x} + \int_0^x g(t) e^{t-x} \mathrm{d}t, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Par définition, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que, pour tout $t > x_0$, $|g(t)| < \epsilon$. Puisque, pour tout réel x,

$$f(x) = f(x_0)e^{x_0 - x} + \int_{x_0}^{x} g(t)e^{t-x}\mathrm{d}t,$$

il vient pour tout $x > x_0$,

$$f(x_0)e^{x_0-x} - \epsilon \int_{x_0}^{x} e^{t-x}\mathrm{d}t < f(x) < f(x_0)e^{x_0-x} + \epsilon \int_{x_0}^{x} e^{t-x}\mathrm{d}t.$$

Ainsi, on obtient, pour tout $x > x_0$,

$$f(x_0)e^{x_0-x} - \epsilon < f(x) < f(x_0)e^{x_0-x} + \epsilon.$$

2. Puisque $e^{x_0-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $x_1 > 0$, tel que pour tout $x > x_1$,

$$-\epsilon < f(x_0)e^{x_0-x} < \epsilon.$$

Ainsi, pour tout $x > \max(x_0, x_1)$,

$$|f(x)| \leqslant 2\epsilon.$$

Ceci fournit le résultat.