Équations Différentielles

CC numéro 1, le 13/02/2024. Durée : 1h15

Questions de cours:

On considère une équation différentielle :

$$x'(t) = F(t, x(t)), t \in \mathbf{R},$$

où $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable x.

1 Soit $x_0 \in \mathbf{R}$, pourquoi existe-t-il une solution vérifiant $x(0) = x_0$? Peut-il y en avoir plusieurs ? Quel est son intervalle de définition ?

On note cette solution $t \mapsto x(t, x_0)$.

2 On fixe $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, l'application $x_0 \mapsto x(t, x_0)$ est-elle continue ?

3 Est-elle lipschitzienne ?

Exercice 1

On garde les notations et les hypothèses des questions de cours.

1 Justifier l'existence de $t \mapsto y(t, y_0)$ solution globale à

$$y'(t) = F(t, y(t)) + \epsilon \cos y(t), t \in \mathbf{R},$$

satisfaisant $y(0) = y_0$, où $\epsilon \in [0, 1]$.

2 On fixe $T \geq 0$. Montrer que pour $t \in [0, T]$:

$$|x(t, x_0) - y(t, y_0)| \leq |x_0 - y_0| + L \int_0^t |x(s, x_0) - y(s, y_0)| ds + \epsilon T,$$

où $L \in \mathbf{R}^+$ est tel que $|F(t, x) - F(t, y)| \leq L|x - y|$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, x, $y \in \mathbf{R}$.

3 En déduire que pour $x_0 = y_0$: $\sup\limits_{t \in [0,T]} |x(t, x_0) - y(t, x_0)| \to 0$ quand $\epsilon \to 0$.

Exercice 2

On considère l'équation $y' = y^2$ avec la donnée initiale $y(0) = 1$.

Justifier l'existence d'une solution maximale. Sur quel intervalle est-elle définie ? Expliciter la solution.

Exercice 3:

Soit f une fonction C^1 sur $]0, +\infty[$ telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0.$$

1 Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_0 > 0$ telle que $\forall x > x_0$:

$$f(x_0)e^{x_0 - x} - \epsilon < f(x) < f(x_0)e^{x_0 - x} + \epsilon.$$

On pourra remarquer que f est solution de $y' + y = g$ avec $g = f + f'$.

2 En déduire que f tend vers 0 en $+\infty$.