Solution des questions de cours

1. On rappelle l'estimation donnée par le lemme de Grönwall : pour tout $t \in [0, +\infty[$,
$$f(t) \leq \lambda \exp\left(\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right).$$

2. La preuve de cette inégalité est la suivante. Pour $t \in [0, +\infty[$, on définit $y(t) := \displaystyle\int_0^t g(s)f(s)\mathrm{d}s$. Par continuité des fonctions f et g sur $\mathbb{R}^+$, cette quantité est bien définie et est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Par théorème fondamental de l'analyse, pour tout $t \in [0, +\infty[$,
$$y'(t) = g(t)f(t) \leq g(t)\left(\lambda + y(t)\right),$$
par positivité de g sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, pour tout $t \in [0, +\infty[$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\right) \leq \lambda g(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right).$$
En intégrant, il vient pour tout $t \in [0, +\infty[$,
$$y(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right) - \underbrace{y(0)}_{=0} \leq \lambda \int_0^t g(\sigma)\exp\left(-\int_0^\sigma g(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\sigma.$$
Le membre de droite s'intègre explicitement, et on obtient, pour tout $t \in [0, +\infty[$,
$$y(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right) \leq -\lambda\left[\exp\left(-\int_0^\sigma g(s)\mathrm{d}s\right)\right]_{\sigma=0}^{\sigma=t} = \lambda\left(1-\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\right).$$
Il s'ensuit pour tout $t \in [0, +\infty[$,
$$y(t) \leq \lambda\exp\left(\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right) - \lambda.$$
Finalement, puisque $f(t) \leq \lambda + y(t)$, on obtient le résultat annoncé.

Solution de l'exercice 1

1. La formule (cas particulier de la formule de Duhamel) qui donne la solution de $y' + ay = b$ est :
$$y(x) = \lambda\exp\left(-\int_0^x a(t)\mathrm{d}t\right) + \int_0^x b(t)\exp\left(-\int_t^x a(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
Il convient de remarque pour, pour tout $x \geq 0$,
$$0 \leq \exp\left(-\int_0^x a(t)\mathrm{d}t\right) \leq e^{-x}.$$
Ainsi, il est clair que la solution de l'équation homogène tend vers 0. Examinons le deuxième terme : avec la même majoration, il vient, pour $x \geq 0$,
$$\left|\int_0^x b(t)\exp\left(-\int_t^x a(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x |b(t)|e^{-(x-t)}\mathrm{d}t \underset{u=x-t}{=} \int_0^x |b(x-u)|e^{-u}\mathrm{d}u,$$
via un changement de variables affine $\mathcal{C}^1$ bijectif. On applique le théorème de convergence dominée : remarquons que, pour tout $u \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{1}_{[0;x]}(u)|b(x-u)|e^{-u} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
par hypothèse sur b. De plus, b étant continue et admettant une limite finie en $+\infty$, elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$, donc
$$\mathbb{1}_{[0;x]}(u)|b(x-u)|e^{-u} \leq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(u)\,\|b\|_{L^\infty(0,+\infty)}\,e^{-u} \in L^1(\mathbb{R}).$$
Ceci fournit le résultat.

2. On remarque que (1) se réécrit :

$$y(x) = \left(\lambda + \int_0^x b(t)\exp\left(\int_0^t a(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\right)\exp\left(-\int_0^x a(t)\mathrm{d}t\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

De plus, pour $x \leq 0$,

$$\exp\left(-\int_0^x a(t)\mathrm{d}t\right) \geq e^{-x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{3}$$

Pour tout $t \leq 0$,

$$\exp\left(\int_0^t a(u)\mathrm{d}u\right) \leq e^t.$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^0 |b(t)|\exp\left(\int_0^t a(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \leq \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^-)}\int_{-\infty}^0 e^t\mathrm{d}t < +\infty.$$

Rappelons que, par hypothèse, b admet une limite finie en $-\infty$ et est continue, donc bornée sur $\mathbb{R}^-$ Par conséquent, cette intégrale est bien définie. Ainsi, si $\lambda \neq \int_{-\infty}^0 b(t)\exp\left(\int_0^t a(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$, on obtient par (2) et (3) que $|y(x)| \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ceci montre l'**unicité**. Montrons maintenant que l'unique solution associée à cette constante tend vers 0 en $-\infty$. Son expression est donnée par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \int_{-\infty}^x b(t)\exp\left(-\int_t^x a(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

Alors, pour tout $x \leq 0$,

$$|y(x)| \leq \int_{-\infty}^x |b(t)|e^{-(x-t)}\mathrm{d}t = \underset{u=t-x}{=} \int_{-\infty}^0 |b(u+x)|e^u\mathrm{d}u.$$

On conclut comme précédemment, via le théorème de convergence dominée : on a bien la convergence vers 0 de l'intégrande en $-\infty$ par hypothèse sur b, quelque soit $u \in \mathbb{R}^-$. La domination est donnée par, pour tout $x \leq 0$,

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(u)|b(u+x)|e^u \leq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(u)\,\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^-)}\,e^u \in L^1(\mathbb{R}).$$

Ceci montre l'**existence**.

Solution de l'exercice 2

1. Premièrement, remarquons que, comme $\alpha < 1$, la fonction $h : t \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0, en vertu des intégrales de Riemann. On remarque que $x \mapsto x^p$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ ($p > 0$). Ainsi, on obtient grâce à l'inégalité admise et l'hypothèse, pour tout $t \in [0, T]$,

$$f^p(t) \leq \left(\lambda + \int_0^t (t-s)^{-\alpha}g(s)f(s)\mathrm{d}s\right)^p \leq 2^{p-1}\left(\lambda^p + \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha}g(s)f(s)\mathrm{d}s\right)^p\right).$$

Comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on utilise l'inégalité de Hölder sur des fonctions respectivement $L^p(0,T)$ et $L^q(0,T)$ (car continues sur un compact) pour obtenir, pour tout $t \in [0,T]$,

$$f^p(t) \leq 2^{p-1}\lambda^p + 2^{p-1}\left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha q}\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_0^t g^p(s)f^p(s)\mathrm{d}s\right).$$

Calculons finalement la première intégrale. Puisque $1 - \alpha q > 0$, on a, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha q}\mathrm{d}s = \left[\frac{-1}{1-\alpha q}(t-s)^{1-\alpha q}\right]_{s=0}^{s=t} = \frac{t^{1-\alpha q}}{1-\alpha q} \leq \frac{T^{1-\alpha q}}{1-\alpha q}.$$

On obtient donc l'inégalité souhaitée.

2. On appliquant le lemme de Grönwall à f^p, on obtient, pour tout $t \in [0,T]$,

$$f^p(t) \leq 2^{p-1}\lambda^p\exp\left(K\int_0^t g^p(s)\mathrm{d}s\right) = 2^{p-1}\lambda^p\exp\left(2^{p-1}\left((1-\alpha q)^{-1}T^{1-\alpha q}\right)^{\frac{p}{q}}\int_0^t g^p(s)\mathrm{d}s\right).$$