Solution des questions de cours

1. On dit qu'une fonction $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, si : pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$, il existe $J(t_0) \times \mathcal{V}_{x_0}$ un ouvert de $I \times \mathbb{R}^d$ contenant (t_0, x_0), et $L(t_0, x_0) > 0$, tel que :

$$\forall t \in J(t_0), \quad \forall (x,y) \in \mathcal{V}_{x_0}^2, \qquad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L(t_0,x_0) \|x-y\|.$$

2. Il est clair que l'équation est équivalente à :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad \text{où} \quad f : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto A(t)x + b(t) \in \mathbb{R}^d.$$

Il est clair que f est continue, et localement lipschitzienne : en effet, pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, pour tout $t \in (t_0 - 1, t_0 + 1)$, pour tout $x, y \in \mathcal{V}_{x_0} := \mathbb{R}^d$,

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant |||A(t)||| \, \|x-y\| \leqslant \sup_{t \in [t_0-1, t_0+1]} |||A(t)||| \, \|x-y\|.$$

Ceci montre qu'à condition initiale fixée, il existe une unique solution maximale. De plus, ces solutions sont globales, en effet : pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$,

$$\|f(t,x)\| \leqslant |||A(t)||| \, \|x\| + \|b(t)\|.$$

Si on note $C_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto |||A(t)|||$, et $C_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto \|b(t)\|$, ces fonctions sont continues et positives. Ainsi, la fonction est à croissance au plus linéaire. L'unique solution maximale est donc globale.

3. On rappelle que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit l'exponentielle de A par :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Cette série est convergente, en effet, pour une norme d'algèbre :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|||A^k|||}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|||A|||^k}{k!} = e^{|||A|||} < +\infty.$$

Elle est absoluement convergente, donc convergente, car c'est une série à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui est un espace de dimension finie, donc complet.

4. L'équation $y''' = ay'' + by' + cy$ est équivalente à

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{pmatrix} Y =: A(t)Y, \qquad \text{avec} \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc d'un système linéaire à coefficients continus. Le cours assure donc que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 3.

Solution de l'exercice 1

1. Le problème de Cauchy se réécrit :

$$\begin{cases} y' &= f(y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}, \qquad \text{où} \quad f : y \in \mathbb{R}^d \mapsto \|y\|^3 Ay \in \mathbb{R}^d.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$. En effet, pour tout $y, h \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathrm{d} \|\cdot\|^3 (y)(h) = \sum_{i=1}^{d} \frac{3}{2} \|y\| \times 2y_i \times h_i = 3 \|y\| \langle y, h \rangle.$$

Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$|||\mathrm{d}\left\|\cdot\right\|^3(y)|||_{\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^d)} \leqslant 3\left\|y\right\|^2.$$

Ceci montre le caractère $\mathcal{C}^1$ de $\left\|\cdot\right\|^3$, puis de f, par produit de telles fonctions. En particulier, la fonction est localement lipschitzienne. Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz local assure que l'équation admet une unique solution maximale, définie sur $]T^-;T^+[$.

2. Pour tout $t \in]T^-, T^+[$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|y(t)\right\|^2 = 2\langle y(t), y'(t)\rangle = 2\left\|y(t)\right\|^3\langle y(t), Ay(t)\rangle.$$

Puisque la matrice est antisymétrique, cette quantité est nulle. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle x, Ax\rangle = {}^t xAx = -{}^t x^t Ax = -^t(Ax)\,x = -\langle Ax, x\rangle = -\langle x, Ax\rangle.$$

Ainsi,

$$\langle x, Ax\rangle = 0.$$

3. On sait que, pour tout $t \in]T^-, T^+[$, $\|y(t)\| = \|y_0\|$. Cette équation conserve la norme. Par le théorème des bouts, si $T^+ < +\infty$, alors

$$\lim_{t\to T^{+-}}\|y(t)\| = +\infty.$$

Ceci contredit la conservation de la norme. Ainsi, $T^+ = +\infty$. De le même façon, $T^- = -\infty$. Ceci montre que la solution maximale est globale.

Solution de l'exercice 2

1. On remarque que

$$\chi_A(X) = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2).$$

Ainsi, la matrice est diagonalisable. De plus,

$$\ker(A + I_2) = \ker\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

$$\ker(A - 2I_2) = \ker\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -2 & -1\end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}.$$

Par suite, une base de solutions est donnée par :

$$\mathcal{S} = \left\{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{2t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

On considère l'unique solution associée à la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$. Alors, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{2t}.$$

Alors,

$$X(0) = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda + \mu = x_0\\ \lambda - 2\mu = y_0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = \frac{1}{3}(y_0 + 2x_0)\\ \mu = \frac{1}{3}(x_0 - y_0)\end{cases}.$$

Alors, pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2e^{-t} + e^{2t} & e^{-t} - e^{2t}\\ 2e^{-t} - 2e^{2t} & e^{-t} + 2e^{2t}\end{pmatrix}X(0).$$

Par identification, on obtient, pour tout réel t,

$$e^{tA} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2e^{-t} + e^{2t} & e^{-t} - e^{2t}\\ 2e^{-t} - 2e^{2t} & e^{-t} + 2e^{2t}\end{pmatrix}.$$

2. On peut chercher une solution constante. On a

$$X \text{ est solution } \Leftrightarrow AX + v = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow X = -A^{-1}v \Leftrightarrow X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} v \Leftrightarrow X = v.$$

Alors,

$$\mathcal{S} = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + v, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solution de l'exercice 3

1. On remarque que $B^2 = -4I_2$. Ainsi, on obtient directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad B^{2n} = (-4)^n I_2 \text{ et } B^{2n+1} = (-4)^n B.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tB} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n t^{2n}}{(2n)!} I_2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2t)^{2n}}{(2n)!} I_2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2t)^{2n+1}}{(2n+1)!} B.$$

Par suite,

$$e^{tB} = \cos(2t) I_2 + \frac{1}{2}\sin(2t) B = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} =: R(2t).$$

2. On remarque que $A = -3I_2 + B$. Puisque les matrices $3I_2$ et B commutent, il vient, pour tout réel t,

$$e^{tA} = e^{-3tI_2} e^{tB} = e^{-3t} R(2t).$$

3. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, à coefficients continus. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, ce problème admet une unique solution globale. Ainsi, $J(x_0) = \mathbb{R}$.

4. La formule de Duhamel fournit directement, pour tout réel t,

$$x(t, x_0) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) \mathrm{d}s.$$

5. Pour tout $x_{0,1}, x_{0,2} \in \mathbb{R}^2$,

$$\|x(t, x_{0,1}) - x(t, x_{0,2})\| = \left\| e^{tA}(x_{0,1} - x_{0,2}) \right\| \leqslant e^{-3t} |||R(2t)||| \, \|x_{0,1} - x_{0,2}\| .$$

Il convient de remarquer que la norme de la matrice de rotation est bornée, indépendamment de t. En effet, on a, pour tout réel t,

$$|||R(2t)|||_2 = 1,$$

puisque c'est un endomorphisme orthogonal, donc il conserve la norme euclidienne (un autre argument : tous ses coefficients sont bornés). Alors,

$$\|x(t, x_{0,1}) - x(t, x_{0,2})\|_2 \leqslant e^{-3t} \|x_{0,1} - x_{0,2}\|_2 \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

6. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\|x(t, x_0)\| \leqslant e^{-3t} \|x_0\| + \int_0^t e^{-3(t-s)} \|b(s)\| \, \mathrm{d}s \leqslant \|x_0\| + \frac{1}{3} \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} .$$

Ceci montre que la solution est bornée.

7. On considère $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour tout réel positif t, on a :

$$\|x(t,x_0)\| \leqslant e^{-3t}\|x_0\| + \int_0^t e^{-3(t-s)}\|b(s)\|\,\mathrm{d}s \underset{u=t-s}{=} e^{-3t}\|x_0\| + \int_0^t e^{-3u}\|b(t-u)\|\,\mathrm{d}s.$$

Le premier terme tend immédiatement vers 0. On s'intéresse au deuxième terme. Remarquons que,

$$\int_0^t e^{-3u}\|b(t-u)\|\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,t]}(u)e^{-3u}\|b(t-u)\|\,\mathrm{d}u.$$

Par hypothèse, on a : pour tout réel u,

$$\mathbb{1}_{[0,t]}(u)e^{-3u}\|b(t-u)\| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{1}_{[0,t]}(u)e^{-3u}\|b(t-u)\| \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(u)e^{-3u}\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \in L^1(\mathbb{R}).$$

En effet, puisque la fonction b est continue et admet une limite finie en $+\infty$, elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, par convergence dominée, le second terme tend vers 0. Ceci montre que $x(t,x_0) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Solution de l'exercice 4

1. Le problème de Cauchy est équivalent à

$$\begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(0) &= 0 \end{cases}, \qquad \text{avec} \quad f : (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto e^{-t} + a(t)x^2 \in \mathbb{R}.$$

Cette fonction est continue par rapport à t, et de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à la seconde variable. Elle est donc localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz local assure l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert, I, contenant 0. On note $I \cap \mathbb{R}^+ = [0, T^*[$.

2. On remarque que, pour tout $x \in [0, T^*[$,

$$x'(t) = e^{-t} + a(t)x^2(t) > 0,$$

par positivité de a. Ceci montre que x est strictement croissante.

3. Pour tout $t \in [0, T^*[$,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \left(e^{-s} + a(s)x^2(s)\right)\mathrm{d}s \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-s}\mathrm{d}s + x^2(t)\int_0^{+\infty} a(s)\mathrm{d}s,$$

par croissance et positivité de x. Ainsi, il vient directement, en utilisant l'hypothèse,

$$x(t) \leqslant 1 + \frac{1}{8}x^2(t),$$

par croissance et positivité de x.

4. On s'intéresse au trinôme $f(x) = \dfrac{1}{8}x^2 - x + 1$. Ces racines sont $4 \pm \sqrt{2}$. On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$4-\sqrt{2}$		$4+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ sont donc $]-\infty; 4-\sqrt{2}] \cup [4+\sqrt{2}; +\infty[$. Ainsi, au vu de la question précédente,

$$\forall t \in [0, T^*[, \quad x(t) \in]-\infty; 4-\sqrt{2}] \cup [4+\sqrt{2}; +\infty[.$$

Par continuité de x, on obtient :

$$\forall t \in [0, T^*[, \quad x(t) \in]-\infty; 4-\sqrt{2}], \qquad \text{ou} \qquad \forall t \in [0, T^*[, \quad x(t) \in [4+\sqrt{2}; +\infty[.$$

Puisque $x(0) = 0$, il vient, $\forall t \in [0, T^*[, \quad x(t) \in]-\infty; 4-\sqrt{2}]$, *i.e.* $x(t) \leqslant 4-\sqrt{2}$.

5. Par croissance de x, on a alors :

$$\forall t \in [0; T^*[, \qquad 0 = x(0) \leqslant x(t) \leqslant 4-\sqrt{2}.$$

La solution est donc bornée. Par le théorème des bouts, on obtient alors $T^* = +\infty$.