L3 Math
Université Rennes 1/ENS Rennes

Équations Différentielles
2023 – 2024

Contrôle continu 2
Durée : 2h

L'usage des documents, calculatrices et téléphones portables n'est pas autorisé.

Questions de cours

1. Donner la définition d'une fonction localement lipschitzienne par rapport à la $2^{\text{ème}}$ variable sur $I \times \mathbb{R}^d$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. Expliquer pourquoi les solutions maximales d'une équation différentielle linéaire
$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), t \in \mathbb{R},$$
où $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ sont continues, existent et sont globales, *i.e.* existent sur $\mathbb{R}$.
3. Donner la définition de l'exponentielle d'une matrice A partir d'une série en rappelant pourquoi cette dernière converge.
4. Soient $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions à l'équation : $y''' = ay'' + by' + cy$, $t \in \mathbb{R}$. Pourquoi a-t-on $\mathcal{S} \neq \emptyset$? Est-ce que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel ? Un espace affine ? Si l'une des deux réponses est vraie, quelle est sa dimension ?

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice carrée antisymétrique : $A^T = -A$. On considère l'équation différentielle :
$$\begin{cases} y' = \|y\|^3 Ay, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

1. Justifier l'existence d'une solution maximale.
2. Calculer $\dfrac{d}{dt}\,\|y\|^2$.
3. Montrer que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^d$, la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$, *i.e.* elle est globale.

Exercice 2

On considère le système différentiel :
$$X' = AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X$$

1. Déterminer une base de solutions de ce système et en déduire e^{At} pour $t \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer l'ensemble des solutions du système $X' = AX + v$ où $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soient les matries
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis, pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tB}. On utilisera les fonctions cos et sin.

2. Déduire e^{tA}, pour $t \in \mathbb{R}$.

   On considère le système différentiel :
$$x'(t) = Ax(t) + b(t), \qquad x(0) = x_0.$$
   où $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une application continue. On note $(x(\cdot, x_0), J(x_0))$ la solution maximale.

3. Quel est le domaine de définition $J(x_0)$ de l'unique solution maximale ?

4. Exprimer la solution à l'aide de e^{tA} et d'une intégrale.

5. Montrer que, pour tout $x_{0,1}, x_{0,2} \in \mathbb{R}^2$,
$$x(t, x_{0,1}) - x(t, x_{0,2}) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

6. On suppose que b est bornée. Montrer que $x(\cdot, x_0)$ est bornée sur $[0; +\infty[$, quelque soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

7. On suppose que $b(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^2$,
$$x(t, x_0) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 4

Soit le problème de Cauchy :
$$x' = e^{-t} + a(t)x^2, \qquad x(0) = 0,$$
où $a \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[; \mathbb{R}^+)$, à valeurs positives. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} a(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{8}$.

1. Pourquoi existe-t-il une unique solution maximale ? On note $[0; T^*[$ l'intervalle de définition en temps positif de cette solution, notée x.

2. Montrer que x est strictement croissante sur $[0; T^*[$.

3. Montrer que, pour tout $t \in [0; T^*[, \quad x(t) \leqslant 1 + \dfrac{1}{8}x(t)^2$.

4. Montrer que, pour tout $t \in [0; T^*[, \quad x(t) \leqslant 4 - 2\sqrt{2}$.
   On pourra tracer la fonction polynomiale $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - x + 1$.

5. En déduire que $T^* = +\infty$.