DM

Exercice 1

A) On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -x - y, \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Autrement dit:

$$X' = AX, \quad X(0) = X_0,$$

où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On note $X(t, X_0)$, la solution.

A1 Calculer les valeurs propres de la matrice A, ses vecteurs propres et en déduire une base de solutions (réelles) du système.

A2 Montrer que $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'unique point d'équilibre du système.

A3 Soit $r > 0$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de r telle que:

$$\forall X_0 \in B(0, r),\ \forall t \in [0, +\infty[,\ \|X(t, X_0)\| \leq Ce^{-t}.$$

On a noté $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

A4 Montrer que 0 est asymptotiquement stable.

A5 Dessiner grossièrement le diagramme phase de ce système.

B) Soit maintenant l'équation:

$$X' = AX + \epsilon F(X), \quad X(0) = X_0,$$

où $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est Lipschitzienne de constante k telle que $F(0) = 0$.

B1 Que peut-on dire de l'existence et unicité pour les solutions de cette l'équation. On note la solution $X^\epsilon(t, X_0)$.

B2 Montrer qu'il existe ϵ_0 tel que pour $\epsilon < \epsilon_0$ et tout $X_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\|X^\epsilon(t, X_0)\|$ est strictement décroissante.

B3 Montrer que pour $\epsilon < \epsilon_0$, 0 est asymptotiquement stable.

B4 Montrer que pour tout $\epsilon < \epsilon_0$, il existe $\kappa_\epsilon > 0$ qu'il faudra expliciter tel que pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, on a

$$\|F(X^\epsilon(t, X_0))\| \leq ke^{-\kappa_\epsilon t}\|X_0\|.$$

B5 Montrer que pour $\epsilon < \epsilon_0$, $X_0 \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, on a

$$\|X^\epsilon(t, X_0) - X(t, X_0)\| \leq C\epsilon \frac{k}{\kappa_\epsilon} \|X_0\|,$$

où C est une contante.

Exercice 2

On considère le problème de Cauchy:

$$y' + y^2 = \frac{y}{t} - \frac{1}{t^2},\ y(1) = 2.$$

1. Vérifier que $\frac{1}{t}$ est solution de l'équation avec une autre condition initiale.
2. Montrer qu'on peut se ramener à l'équation
$$u' + u^2 + \frac{u}{t} = 0,\ u(1) = 1.$$
3. Déterminer explicitement la solution maximale du problème initial ainsi que son intervalle d'existence.

Exercice 3

Le but de cet exercice est d'étudier l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0, +\infty[$.

1. Donner l'ensemble des solutions à l'équation homogène : $y'' - 2y' + y = 0$.
2. Donner l'ensemble des solutions à l'équation $y'' - 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en terme de la fonction $h(t) = \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2} d\tau$.
3. Montrer qu'il existe une unique solution à l'équation $y'' - 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0, +\infty[$ qui se prolonge en 0 de manière $\mathcal{C}^1$ et vérifie $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 4

Soient x_0, y_0 dans $\mathbb{R}$, on s'intéresse au problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) - 2y(t)^2, \\ y'(t) = x(t)y(t) - y(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

1. Montrer que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale $((x, y), I)$ qui est globale sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que le système :
$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) - 2y(t)^2, \\ y'(t) = x(t)y(t) - y(t), \end{cases}$$
a un seul point d'équilibre qui est asymptotiquement stable.

Exercice 5

Soit $x(t)$ la solution maximale de l'équation $x'(t) = e^{-tx(t)}$ avec la donnée intiale $x(0) = 0$.

1. Montrer que, pour tout t dans l'intervalle maximal de définition de $x(t)$, on a $x(t) = -x(-t)$.

2. Montrer que $t \mapsto x(t)$ est une fonction croissante. En déduire que $x'(t) \leq 1$ pour $t \geq 0$ puis qu'elle est définie sur tout $\mathbb{R}^+$ et enfin sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que x possède une limite, nécessairement finie, quand $t \to +\infty$. On notera a la valeur de cette limite.

4. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Montrer qu'il existe une constante $C_\epsilon > 0$ telle que pour tout $t \geq \epsilon$ on a $x'(t) \leq e^{-C_\epsilon t}$.

5. Montrer que
$$x(t) = a - \int_t^{+\infty} x'(s)ds.$$
Justifier soigneusement.

Exercice 6

On considère le système différentiel:

$$X' = AX + f(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X + f(t)$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est une fonction continue et bornée par 1: $\|f(t)\| \leq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que toute solution vérifie pout tout t, t_0, $t_1 \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} X(t) = \quad & e^{A(t-t_0)} \begin{pmatrix} X_1(t_0) \\ X_2(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds \\ & + e^{A(t-t_1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_3(t_1) \end{pmatrix} + \int_{t_1}^t e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(s) \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

2. En déduire qu'il existe une unique solution $\tilde{X}$ qui est bornée sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est donnée par :
$$\tilde{X}(t) = -\int_t^{+\infty} e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds + \int_{-\infty}^t e^{A(s-t)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(s) \end{pmatrix} ds$$

3. Montrer que si f est périodique, il existe une solution périodique.