Solution de l'exercice 1

A1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X+1)^2 + 1 = (X+1-i)(X+1+i)$. Ainsi, $\sigma(A) = \{-1 \pm i\}$. On cherche les vecteurs propes associés :

$$E_{-1+i}(A) = \ker(A - (-1+i)I_2) = \ker \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$

Ainsi, en conjuguant, on obtient : $E_{-1-i}(A) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$. Une base de solution réelle de l'équation homogène est donnée par :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it} \right) e^{-t}, t \mapsto \operatorname{Im}\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it} \right) e^{-t} \right\},$$

soit

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} e^{-t}, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} e^{-t} \right\}.$$

A2. On remarque que :

$$\begin{cases} -x+y &= 0 \\ -x-y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Ainsi, $(0,0)$ est l'unique point d'équilibre du système différentiel.

A3. Soit $r > 0$, soit $X_0 \in B(0,r)$, alors, A étant à coefficients constants, pour tout t réel positif, on a :

$$X(t, X_0) = e^{tA} X_0.$$

Puisque A a son polynôme caractéristique simplement scindé sur $\mathbb{C}$, elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $A = P\mathrm{Diag}(-1+i, -1-i)P^{-1}$. Alors,

$$\|X(t,X_0)\| \leqslant \|P\| \left\| \begin{pmatrix} e^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-i)t} \end{pmatrix} \right\| \left\|P^{-1}\right\| \|X_0\|.$$

On a noté de la même manière la norme 2 de $\mathbb{C}^2$ et la norme subordonnée à la norme 2 sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. La matrice diagonale étant symétrique, sa norme 2 est son rayon spectral, *i.e.* e^{-t}. Ceci conclut, en posant $C = \|P\| \|P^{-1}\| r$.

A4. Montrons que $0_{\mathbb{R}^2}$ est asymptotiquement stable. Soit $\varepsilon > 0$, on remarque que pour tout $X_0 \in B(0,\delta)$ avec $\delta = \frac{\varepsilon}{\|P\|\|P^{-1}\|}$, on a : la solution du système issue de X_0 est définie en tout temps positif (car c'est un système linéaire à coefficients continus (car constants)), et vérifiant pour tout $t \geqslant 0$,

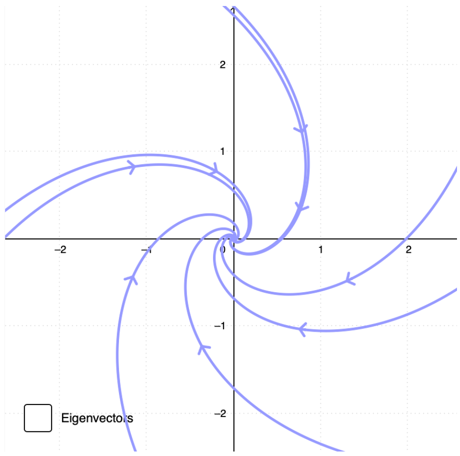
$$\|X(t,X_0)\| \leqslant \|P\| \left\|P^{-1}\right\| e^{-t}\delta \leqslant \varepsilon.$$

Ceci montre la stabilité du point $(0,0)$. De plus, $X(t,X_0) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci conclut.

A5. On remarque que, pour $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ par la question 1 : $X(t) = \begin{pmatrix} \alpha\cos(t)e^{-t} + \beta\sin(t)e^{-t} \\ \beta\cos(t)e^{-t} - \alpha\sin(t)e^{-t} \end{pmatrix}$.
Alors, pour tout t positif,

$$x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = (\alpha^2+\beta^2)e^{-2t}.$$

On obtient donc une spirale rentrante (car le rayon tend vers 0). Afin de déterminer le sens de rotation de la spirale, on remarque que, pour $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient pour tout t réel, $X(t) = \begin{pmatrix} \sin(t)e^{-t} \\ \cos(t)e^{-t} \end{pmatrix}$, qui est positif en temps court. La rotation se fait donc dans le sens anti-trigonométrique. Voici le tracé :



B1. On remarque que le système est équivalent à $X' = G(X)$, avec $G : X \in \mathbb{R}^2 \mapsto AX + \epsilon F(X)$. De plus G est globalement lipschitzienne, en effet : pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^2$,

$$\|G(X) - G(Y)\| \leqslant |||A||| \, \|X - Y\| + \epsilon k \, \|X - Y\| = (|||A||| + \epsilon k) \, \|X - Y\| \, .$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz global assure donc que le système admet une unique solution globale.

B2. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|X^\epsilon(t, X_0)\|^2 = 2\langle X^\epsilon(t, X_0), X^{\epsilon\prime}(t, X_0)\rangle = 2\langle X^\epsilon(t, X_0), AX^\epsilon(t, X_0) + \epsilon F(X^\epsilon(t, X_0))\rangle.$$

En notant $X^\epsilon(t, X_0) = \begin{pmatrix} X_1^\epsilon(t, X_0) \\ X_2^\epsilon(t, X_0) \end{pmatrix}$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|X^\epsilon(t, X_0)\|^2 = 2 \left\langle X^\epsilon(t, X_0), \begin{pmatrix} -X_1^\epsilon(t, X_0) + X_2^\epsilon(t, X_0) \\ -X_1^\epsilon(t, X_0) - X_2^\epsilon(t, X_0) \end{pmatrix} \right\rangle + 2\epsilon\langle X^\epsilon(t, X_0), F(X^\epsilon(t, X_0))\rangle.$$

Ainsi, par calcul du produit scalaire usuel, et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|X^\epsilon(t, X_0)\|^2 \leqslant -2 \|X^\epsilon(t, X_0)\|^2 + 2\epsilon \|X^\epsilon(t, X_0)\| \, \|F(X^\epsilon(t, X_0))\| \, .$$

Puisque F est globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$ et puisque $F(0) = 0$, on obtient pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, $\|F(X)\| \leqslant k \|X\|$. Alors,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|X^\epsilon(t, X_0)\|^2 \leqslant 2 \|X^\epsilon(t, X_0)\|^2 (\epsilon k - 1) < 0,$$

sous la condition $\epsilon < \epsilon_0 = \frac{1}{k}$. En effet, remarquons que si $X_0 = (0, 0)$, l'unique solution est la solution nulle. Ainsi, puisque les courbes intégrales ne se coupent pas (unicité de Cauchy-Lipschitz), pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X^\epsilon(t, X_0) \neq 0$.

B3. Puisque $F(0) = 0$, 0 est un bien un point d'équilibre du système différentiel perturbé. En notant pour t positif, $u(t) = \|X^\epsilon(t, X_0)\|^2$, la question précédente montre que

$$\forall t \geqslant 0, \;\; u'(t) \leqslant 2u(t)(\epsilon k - 1).$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t)e^{-2(\epsilon k - 1)t}) \leqslant 0.$$

Ainsi, pour tout t positif,
$$\|X(t, X_0)\| \leqslant e^{(\epsilon k-1)t} \|X_0\| .$$
Puisque $\epsilon < \epsilon_0$, $\epsilon k - 1 < 0$, et on conclut comme à la question $A4$ que 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable (on a le même type d'inégalité).

B4. Comme rappelé à la question B2, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on a : $\|F(X)\| \leqslant k \|X\|$. Ainsi, à l'aide de l'inégalité précédente, on obtient pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^2$, $t \geqslant 0$, et $\epsilon < \epsilon_0$,

$$\|F(X^\epsilon(t, X_0))\| \leqslant k \|X^\epsilon(t, X_0)\| \leqslant k e^{-(1-\epsilon k)t} \|X_0\| .$$

Ainsi, $\kappa_\epsilon = 1 - k\epsilon > 0$ convient.

B5. On note $\delta X^\epsilon(\cdot, X_0) = X(\cdot, X_0) - X^\epsilon(\cdot, X_0)$. Remarquons que : pour tout $t \geqslant 0$, $\epsilon < \epsilon_0$, $X_0 \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\delta X^\epsilon(t, X_0)\|^2 = 2 \|\delta X^\epsilon(t, X_0)\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\|\delta X^\epsilon(t, X_0)\|) = 2\langle \delta X^\epsilon(t, X_0), \delta X^{\epsilon\prime}(t, X_0)\rangle.$$

D'où,

$$\|\delta X^\epsilon(t, X_0)\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\|\delta X^\epsilon(t, X_0)\|) = \langle \delta X^\epsilon(t, X_0), A\delta X^\epsilon(t, X_0) - \epsilon F(X^\epsilon(t, X_0))\rangle.$$

Comme remarqué précédemment, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, $\langle X, AX\rangle = -\|X\|^2 \leqslant 0$, ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\|\delta X^\epsilon(t, X_0)\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\|\delta X^\epsilon(t, X_0)\|) \leqslant \epsilon \|\delta X^\epsilon(t, X_0)\| \|F(X^\epsilon(t, X_0))\| .$$

Alors, pour tout $t \geqslant 0$, $\epsilon < \epsilon_0$, $X_0 \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\|\delta X^\epsilon(t, X_0)\|) \leqslant \epsilon \|F(X^\epsilon(t, X_0))\| \underset{B4}{\leqslant} \epsilon k e^{-\kappa_\epsilon t} \|X_0\| .$$

Donc,
$$\|\delta X^\epsilon(t, X_0)\| \leqslant \epsilon k \|X_0\| \int_0^t e^{-\kappa_\epsilon s}\mathrm{d}s = \frac{\epsilon k}{\kappa_\epsilon} \|X_0\| \left(1 - e^{-\kappa_\epsilon t}\right) \leqslant \epsilon \frac{k}{\kappa_\epsilon} \|X_0\| .$$

Solution de l'exercice 2

1. On vérifie immédiatement que $y_0 : t \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{t}$ est solution de l'équation différentielle avec par condition initiale $y_0(1) = 1$.

2. On reconnait une équation de Ricatti. On cherche alors y sous la forme $y_0 + u$. En injectant dans l'équation, il vient :

$$u' + y_0' + u^2 + y_0^2 + 2y_0 u = \frac{u + y_0}{t} - \frac{1}{t^2}.$$

Puisque y_0 est solution, les simpliciations donnent :

$$u' + u^2 + \frac{u}{t} = 0,$$

avec pour condition initiale $u(1) = y(1) - y_0(1) = 1$.

3. On reconnaît une équation de Bernoulli, on introduit alors $v := \frac{1}{u}$, en on remarque que :

$$v' = -\frac{u'}{u^2} = 1 + \frac{1}{tu} = 1 + \frac{v}{t}.$$

On résout alors l'équation homogène $v' - \frac{v}{t} = 0$. On obtient alors $v(t) = \lambda t$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par méthode de variation de la constante. On a : $\lambda'(t)t = 1$, on obtient alors $v(t) = \lambda t + \ln(|t|)t$. On identifie λ grâce à la condition initiale $v(1) = u(1) = 1$. Donc, $v(t) = t(1 + \ln(|t|))$.
Ainsi $u(t) = \frac{1}{t(1+\ln(|t|))}$. On obtient donc :

$$y(t) = \frac{1}{t(1+\ln(|t|))} + \frac{1}{t}.$$

Puisque $f : (t, y) \in]0 + \infty[\times \mathbb{R} \mapsto \frac{y}{t} - \frac{1}{t^2} - y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale. La fonction définie est solution, par construction. Elle est définie sur $]e^{-1}, +\infty[$. C'est bien l'unique solution maximale puisque $\lim_{t \to e^{-1+}} |y(t)| = +\infty$. Elle n'admet donc pas de prolongement continu.

Solution de l'exercice 3

1. Remarquons que ce système est bien posé :

$$X' = AX + f(t) \Leftrightarrow X' = F(t, X),$$

où $F : (t, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mapsto AX + f(t) \in \mathbb{R}^3$. Elle est continue, par continuité de f. Elle est de plus globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable : pour tout t réel, pour tout $(X, Y) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$\|F(t, X) - F(t, Y)\| \leqslant |||A||| \, \|X - Y\|.$$

Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz global assure que le système admet, à condition initiale donnée, une unique solution globale. L'expression de la solution est donnée par la formule de Duhamel, et puisque A est a coefficients constants, il vient : $\forall t, t_0 \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} \begin{pmatrix} X_1(t_0) \\ X_2(t_0) \\ X_3(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s) \mathrm{d}s.$$

Ainsi,

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} \begin{pmatrix} X_1(t_0) \\ X_2(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s + G(t),$$

où G est donnée par :

$$G(t) = e^{(t-t_0)A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_3(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s.$$

On fait intervenir t_1, un réel. On a :

$$G(t) = e^{(t-t_0)A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_3(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s + \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s.$$

$$G(t) = e^{(t-t_1)A}\left(e^{(t_1-t_0)A}\begin{pmatrix}0\\0\\X_3(t_0)\end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A}\begin{pmatrix}0\\0\\f_3(s)\end{pmatrix}\mathrm{d}s\right) + \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}\begin{pmatrix}0\\0\\f_3(s)\end{pmatrix}\mathrm{d}s.$$

La matrice A étant diagonale, les deux premières composantes du terme entre parenthèses sont nulles. On reconnaît la troisième composante à l'aide de la formule de Duhamel scalaire ; il s'agit de $X_3(t_1)$. Ceci fournit l'expression demandée.

2. On raisonne par **analyse-synthèse**. Analyse : on suppose donnée une solution X, bornée sur $\mathbb{R}$ du système. Ainsi, par la question précédente, on a : pour tout t, t_0, t_1 réels :

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t-t_0}X_1(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{t-s}f_1(s)\mathrm{d}s \\ e^{2(t-t_0)}X_2(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{2(t-s)}f_2(s)\mathrm{d}s \\ e^{t_1-t}X_3(t_1) + \displaystyle\int_{t_1}^{t} e^{s-t}f_3(s)\mathrm{d}s \end{pmatrix}.$$

Première composante : $X_1(t) = e^{t-t_0}\left(X_1(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{t_0-s}f_1(s)\mathrm{d}s\right)$. Comme $e^{t-t_0} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on doit **nécessairement** avoir $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(X_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{t_0-s}f_1(s)\mathrm{d}s\right) = 0$, *i.e.*

$$X_1(t_0) = -\int_{t_0}^{+\infty} e^{t_0-s}f_1(s)\mathrm{d}s.$$

Deuxième composante : on obtient de la même manière que, **nécessairement** :

$$X_2(t_0) = -\int_{t_0}^{+\infty} e^{2(t_0-s)}f_2(s)\mathrm{d}s.$$

Troisième composante : puisque la dernière valeur propre est de signe opposé, il faut cette fois s'intéresser à la limite en $-\infty$. Plus précisement : $X_3(t) = e^{t_1-t}\left(X_3(t_1) + \displaystyle\int_{t_1}^{t} e^{s-t_1}f_3(s)\mathrm{d}s\right)$. Puisque $e^{t_1-t} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on doit **nécessairement** avoir $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\left(X_3(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{s-t_1}f_3(s)\mathrm{d}s\right) = 0$, *i.e.*

$$X_3(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} e^{s-t_1}f_3(s)\mathrm{d}s.$$

Ceci montre l'unicité. Montrons que ces conditons sont suffisantes.

Synthèse : montrons que ces constantes existent bien. On a, par hypothèse sur f,

$$|e^{t_0-s}f_1(s)| \leqslant e^{t_0-s} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

Cette quantité est donc intégrable et $X_1(t_0)$ est bien définie. On raisonne de même pour $X_2(t_0)$ et $X_3(t_0)$. Montrons qu'elle conviennent. Par la question 1, c'est clairement une solution. Montrons qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X_1(t) = e^{t-t_0}\left(-\int_{t_0}^{+\infty} e^{t_0-s}f_1(s)\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} e^{t_0-s}f_1(s)\mathrm{d}s\right) = -\int_{t}^{+\infty} e^{t-s}f_1(s)\mathrm{d}s.$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |X_1(t)| \underset{u=s-t}{=} \left|\int_0^{+\infty} e^{-u}f_1(u+t)\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = 1.$$

De même,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |X_2(t)| = \left| -\int_t^{+\infty} e^{2(t-s)} f_2(s)\mathrm{d}s \right| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-2u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}.$$

Enfin, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |X_3(t)| = \left| \int_{-\infty}^t e^{s-t} f_3(s)\mathrm{d}s \right| \underset{u=t-s}{=} \left| \int_0^{+\infty} e^{-u} f_3(t-u)\mathrm{d}u \right| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = 1.$$

Ceci montre bien que la solution est bornée sur $\mathbb{R}$. Enfin, au vu des expressions exibhées sur chacunes des composantes, on retrouve bien la formule donnée dans l'énoncé.

3. On remarque que, si X est une telle solution, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue, et périodique, donc bornée sur $\mathbb{R}$. Ceci invite à montrer que la solution précédente est périodique, sous l'hypothèse de périodicité sur f. Supposons $T > 0$ la période de f. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \tilde{X}(t+T) = -\int_{t+T}^{+\infty} e^{A(t+T-s)} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{t+T} e^{A(s-t-T)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s.$$

Par changement de variables $\mathcal{C}^1$ bijectif, en par périodicité de f,

$$\tilde{X}(t+T) \underset{u=s-T}{=} -\int_t^{+\infty} e^{A(t-u)} \begin{pmatrix} f_1(u+T) \\ f_2(u+T) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}u + \int_{-\infty}^t e^{A(u-t)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(u+T) \end{pmatrix} \mathrm{d}u = \tilde{X}(t).$$

Ceci conclut.

Remarque : on a aussi démontré l'unicité d'une solution périodique.

Solution de l'exercice 4

1.a. Par le lemme des noyaux, on obtient directement que :

$$\ker(\chi_A(A)) = \bigoplus_{i=1}^r \ker((A - \lambda_i I_n)^{m_i}) = \bigoplus_{i=1}^r F_i.$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, donc $\ker(\chi_A(A)) = \mathbb{C}^n$. Ceci conclut.

1.b. Soit $i \in [\![1, r]\!]$, et $v \in F_i$. Alors, pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$e^{tA}v = e^{(\lambda_i I_n + A - \lambda_i I_n)t}v \underbrace{=}_{[\lambda_i I_n, A-\lambda_i I_n]=0} e^{\lambda_i t} e^{(A-\lambda_i I_n)t}v = e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_i I_n)^k v.$$

$$\left\| e^{tA}v \right\| \leqslant e^{\Re(\lambda_i)t} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} |||(A - \lambda_i I_n)^k|||\, \|v\|.$$

Ainsi,

$$\left\| e^{tA}v \right\| e^{\delta t} \leqslant\ e^{(\Re(\lambda_i)+\delta)t} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} |||(A - \lambda_i I_n)^k|||\, \|v\|.$$

1.c. Donc, pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|||e^{tA}|||e^{\delta t} \leqslant \max_{i \in [\![1,r]\!]} \underbrace{\left(e^{(\Re(\lambda_i)+\delta)t} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} |||(A - \lambda_i I_n)^k||| \right)}_{=:f_i(t)}.$$

Comme $\Re(\lambda_i) + \delta < 0$, on obtient par croissance comparée $\lim_{t \to +\infty} f_i(t) = 0$. Par continuité, f_i est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ |||e^{tA}||| \leqslant K e^{-\delta t}.$$

2. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, \quad \Re(z) < -\delta\}$. Soit x l'unique solution associée à la condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors, la matrice étant à coefficients constants, la formule de Duhamel donne, pour tout réel t

$$x(t) = e^{tA} x_0.$$

Alors, la question précédente assure l'existence de $K > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\|x(t)\| \leqslant K e^{-\delta t} \|x_0\| \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. On considère une valeur propre $\lambda \in \sigma(A)$. Soit $v \in \ker(A - \lambda I_n) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Alors, l'unique solution issue de la condition initiale v en 0 est donnée par : pour tout réel t,

$$x(t) = e^{t\lambda} v.$$

Alors, par hypothèse,

$$e^{\Re(\lambda) t} \|v\| = \|x(t)\| \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nécessairement, $\Re(\lambda) < 0$. Ceci conclut.

4. Il s'agit d'un système linéaire à coefficients continus. Ainsi, la solution est globale. On écrit la formule de Duhamel : pour tout réel t,

$$x(t) = e^{tA} x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} B(s) x(s) \mathrm{d}s.$$

Ainsi, on remarque qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, \quad \Re(z) < -\delta\}$. La question 1 assure l'existence de $K > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\|x(t)\| \leqslant K e^{-\delta t} \|x(0)\| + K \|B\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \int_0^t e^{-(t-s)\delta} \|x(s)\| \mathrm{d}s.$$

Il vient finalement,

$$\|x(t)\| e^{\delta t} \leqslant K \|x(0)\| + K \|B\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \int_0^t e^{s\delta} \|x(s)\| \mathrm{d}s.$$

Le lemme de Grönwall appliqué à des fonctions continues et positives fournit alors l'estimation : pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\|x(t)\| e^{\delta t} \leqslant K \|x(0)\| e^{K \|B\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} t}.$$

Alors,

$$\|x(t)\| \leqslant K \|x(0)\| e^{-\left(\delta - K \|B\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}\right) t}.$$

Si $\|B\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} < \frac{\delta}{K}$, on obtient le résultat.

Solution de l'exercice 5

1. Si on suppose que A est antisymétrique, alors,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|x(t)\|^2 = 2\langle x(t), x'(t) \rangle = 2\langle x(t), Ax(t) \rangle = \langle x(t), Ax(t) \rangle + \langle {}^T A x(t), x(t) \rangle.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x(t)\|^2 = \langle x(t), (A + {}^T A)x(t)\rangle = 0.$$

Réciproquement, on suppose que toute solution est de norme euclidienne constante. Alors, par le même calcul que précédement, on obtient, pour tout réel t,

$$\langle x(t), (A + {}^T A)x(t)\rangle = 0.$$

Ainsi, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x_0, (A + {}^T A)x_0\rangle = 0.$$

Si λ est valeur propre de $A + {}^T A$, alors pour x_0 un vecteur propre associé, il vient : $\lambda \|x_0\|^2 = 0$. Ainsi, $\sigma(A + {}^T A) = \{0\}$. Puisque cette matrice est symétrique, elle est diagonalisable (par théorème spectral). Ainsi, elle est nulle, i.e.

$$A + {}^T A = 0.$$

La matrice A est donc antisymétrique.

2.a. Pour $t_1 \in \mathbb{R}$ fixé, on définit :

$$f(t) := R_A(t + T, t_1 + T), \qquad \text{et} \qquad g(t) := R_A(t, t_1).$$

On montre l'égalité de ces fonctions en montrant qu'elles sont solutions du même problème de Cauchy. D'une part, pour tout réel t,

$$f'(t) = A(t + T)R_A(t + T, t_1 + T) = A(t)f(t), \qquad f(t_1) = R_A(t_1 + T, t_1 + T) = I_n.$$

D'autre part

$$g'(t) = A(t)R_A(t, t_1) = A(t)g(t), \qquad g(t_1) = R_A(t_1, t_1) = I_n.$$

Par unicité, $f \equiv g$.

2.b. Alors, pour tout réel t, on a :

$$R_A(t + T, t) = R_A(t + T, T)R_A(T, 0)R_A(0, t) \underset{2.a.}{=} R_A(t, 0)R_A(T, 0)R_A(t, 0)^{-1}.$$

2.c. On suppose que l'équation admet une solution $T-$périodique non triviale. Alors, $x(0) \neq 0$ (sinon, x est identiquement nulle). Alors, on a :

$$x(0) \underset{T-\text{périodicité}}{=} x(T) \underset{\text{Duhamel}}{=} R_A(T, 0)x(0).$$

Ceci montre que 1 est valeur propre de la matrice $R_A(T, 0)$. Réciproquement, on considère $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre non nul de $R_A(T, 0)$ associé à la valeur propre 1. Alors la solution du système issue de v en 0 est donnée par $x(t) = R_A(t, 0)v$ et vérifie, pour tout réel t :

$$x(t + T) = R_A(t + T, 0)v = R_A(t + T, T)R_A(T, 0)v = R_A(t + T, T)v \underset{2.a.}{=} R_A(t, 0)v = x(t).$$

Ceci conclut.

3.a. On sait que, pour tout réel t, t_0,

$$S(t, t_0) = {}^T R_A(t_0, t) = {}^T R_A(t, t_0)^{-1}.$$

Il faut donc dériver cette fonction par rapport à t. On remarque que si $\psi : A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, alors

$$R_A(t, t_0)^{-1} = \psi(R_A(t, t_0)).$$

Alors, par différentiation des fonctions composées, sa dérivée est donnée par :

$$\partial_t R_A(t,t_0)^{-1} = \mathrm{d}\psi(R_A(t,t_0))(\partial_t R_A(t,t_0)).$$

On rappelle que, pour tout pour tout $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{d}\psi(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$

Alors,

$$\partial_t R_A(t,t_0)^{-1} = -R_A(t,t_0)^{-1}A(t)R_A(t,t_0)R_A(t,t_0)^{-1} = -R_A(t_0,t)A(t).$$

Finalement,

$$\partial_t S(t,t_0) = -^T\left(R_A(t_0,t)A(t)\right) = -^TA(t)S(t,t_0).$$

De plus,

$$S(t_0,t_0) = {}^TR_A(t_0,t_0) = I_n.$$

Ceci conclut.

3.b. On détermine le polynôme caractéristique de la matrice $A(t)$. On a

$$\chi_{A(t)}(X) = \begin{vmatrix} X-2t-\frac{1}{t} & 0 & t-\frac{1}{t} \\ \frac{1}{t}-t & X-3t & \frac{1}{t}-t \\ 2t-\frac{2}{t} & 0 & X-t-\frac{2}{t} \end{vmatrix} = (X-3t)\begin{vmatrix} X-2t-\frac{1}{t} & t-\frac{1}{t} \\ & \\ 2t-\frac{2}{t} & X-t-\frac{2}{t} \end{vmatrix}.$$

$$\chi_{A(t)}(X) = (X-3t)\left(X^2-\left(3t+\frac{3}{t}\right)X+9\right) = (X-3t)^2\left(X-\frac{3}{t}\right).$$

On chercher donc à déterminer les vecteurs propres :

$$\ker(A-3tI_n) = \ker\begin{pmatrix} \frac{1}{t}-t & 0 & \frac{1}{t}-t \\ t-\frac{1}{t} & 0 & t-\frac{1}{t} \\ \frac{2}{t}-2t & 0 & \frac{2}{t}-2t \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}\frac{1}{t}-t & 0 & \frac{1}{t}-t\end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

$$\ker\left(A-\frac{3}{t}I_n\right) = \ker\begin{pmatrix} 2t-\frac{2}{t} & 0 & \frac{1}{t}-t \\ t-\frac{1}{t} & 3t-\frac{3}{t} & t-\frac{1}{t} \\ \frac{2}{t}-2t & 0 & t-\frac{1}{t} \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 2t-\frac{2}{t} & 0 & \frac{1}{t}-t \\ t-\frac{1}{t} & 3t-\frac{3}{t} & t-\frac{1}{t} \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

La matrice est donc diagonalisable dans une même base, peu importe la valeur de t. On définit donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$P^{-1}A(t)P = \begin{pmatrix} 3t & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{t} \end{pmatrix} =: D(t).$$

3.c. On remarque que le système est équivalent à résoudre

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}' = -^TA(t)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Sa résolvante est donc donnée par ${}^TR_A(t_0,t)$, où $R_A(t,t_0)$ désigne la résolvante de l'équation $X' = A(t)X$. Déterminons là : si on pose $Y(t) := P^{-1}X(t)$. Alors

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}A(t)X(t) = P^{-1}A(t)PY(t) = D(t)Y(t).$$

Il s'agit d'une matrice diagonale, on sait donc intégrer les équations une par une (elles sont découplées). Alors,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{3}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{3}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{t}{t_0}\right)^3 \end{pmatrix} Y(t_0).$$

Donc,

$$X(t) = PY(t) = P \begin{pmatrix} e^{\frac{3}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{3}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{t}{t_0}\right)^3 \end{pmatrix} P^{-1} X(t_0).$$

Par identification, on obtient donc :

$$R(t, t_0) = P \begin{pmatrix} e^{\frac{3}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{3}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{t}{t_0}\right)^3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En utilisant la question 3.a., on obtient donc la résolvante associée au système. La solution du système est donnée par :

$$X(t) = {}^T R_A(t_0, t) X(t_0) = {}^T P^{-1} \begin{pmatrix} e^{\frac{3}{2}(t_0^2-t^2)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{3}{2}(t_0^2-t^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{t_0}{t}\right)^3 \end{pmatrix} {}^T P X(t_0).$$

Si on souhaite mener les calculs jusqu'au bout, on peut montrer que : $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis effectuer le produit matriciel.