

Devoir Maison
À rendre pour le 17/03/2025

Ce devoir est individuel. La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront en compte pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les exercices 1 et 2 seront traités **obligatoirement** par tous les étudiants. Vous rendrez **au choix** l'exercice 3 ou l'exercice 4. Vous pouvez évidemment faire les deux.

Exercice 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) &= \lambda t^2 + y(t)^2, & t \in \mathbb{R} \\ y(0) &= 0 \end{cases} \quad (1)$$

1. Montrer que (1) admet une unique solution maximale y définie sur un intervalle ouvert $I_\lambda := (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$, où $\alpha_\lambda < 0 < \beta_\lambda$.
2. Montrer que $\alpha_\lambda = -\beta_\lambda$ et que y est impaire sur I_λ .
3. Résoudre cette équation dans le cas où $\lambda = 0$.
4. Dans cette question, $\lambda > 0$.

4.(a) Étudier la monotonie et la convexité de y sur I_λ .

4.(b) On suppose que $\beta_\lambda = +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \geq 1$,

$$\arctan(y(t)) \geq \min(1, \lambda)(t - 1) + c.$$

4.(c) En déduire que la solution n'est pas globale.

5. Dans cette question, $\lambda < 0$.

5.(a) Donner un équivalent simple de y' en 0. En déduire l'existence de $\delta \in]0, \beta_\lambda[$ tel que, pour tout $t \in [0, \delta[$, $y(t)^2 \leq -\lambda t^2$.

5.(b) On souhaite montrer que, pour tout $t \in [0, \beta_\lambda[$, $y(t)^2 \leq -\lambda t^2$. On raisonne par l'absurde : on suppose que ce n'est pas le cas. Soit $\kappa := \sup\{t \in [0, \beta_\lambda[, \forall s \in [0, t[, y(s)^2 \leq -\lambda s^2\}$. Justifier que κ est bien défini, $\kappa > 0$, puis que $y(\kappa)^2 = -\lambda \kappa^2$.

5.(c) Montrer que

$$y(\kappa + h)^2 + \lambda(\kappa + h)^2 = 2\lambda\kappa h + o(h).$$

5.(d) En déduire une contradiction, puis que la solution est globale.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application localement lipschitzienne.

1. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Montrer que le problème de Cauchy autonome $\begin{cases} y'(t) &= f(y(t)), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) &= \alpha \end{cases}$ admet une unique solution maximale y_α définie sur un intervalle ouvert contenant 0. On note $T(\alpha) \in]0, +\infty]$ le temps positif d'existence de la solution maximale.

2. On souhaite démontrer la propriété suivante : pour tout $\alpha_0 \in \mathbb{R}^d$, pour tout $0 < T < T(\alpha_0)$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|\alpha - \alpha_0\| \leq \eta$, on a $T(\alpha) \geq T$.

Soient $\alpha_0 \in \mathbb{R}^d$ et $0 < T < T(\alpha_0)$.

- 2.(a) Montrer que f est globalement lipschitzienne sur l'ensemble $K := y_{\alpha_0}([0, T]) + \overline{B(0, 1)}$. On note L sa constante de Lipschitz.
 2.(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|\alpha - \alpha_0\| \leq \frac{e^{-LT}}{2}$. On note

$$S = \{t \in [0, T(\alpha)] \cap]0, T[\text{ tel que } \|y_\alpha(s) - y_{\alpha_0}(s)\| \leq 1, \forall s \in [0, t]\}.$$

Justifier que $\tau := \sup S$ est bien défini et vérifie $\tau > 0$.

- 2.(c) Montrer que pour tout $t \in [0, \tau]$, $\|y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t)\| \leq e^{Lt} \|\alpha - \alpha_0\|$.
 2.(d) En déduire que $\tau = T$. On pourra raisonner par l'absurde.
 2.(e) Conclure.

3. On veut montrer que la fonction T n'est pas nécessairement continue. On considère le système différentiel suivant $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 x^4 \\ y' = 0 \end{cases}$. Montrer qu'il entre dans le cadre d'étude de cet

exercice. En s'intéressant aux différentes conditions initiales $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ pour $\varepsilon \in [0, 1)$, conclure.

Hint : on pourra s'intéresser aux trajectoires constantes.

Exercice 3

Dans cet exercice, on considère

$$a : (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \mapsto (a_i(t, x))_{i \in [1, d]} \in \mathbb{R}^d$$

une application de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur \mathbb{R}^d et $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Le but de cet exercice est d'établir l'existence d'une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ à l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^d a_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2)$$

1. On fixe $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Justifier que l'équation différentielle suivante admet une unique solution globale $\begin{cases} X'(s) = a(s, X(s)), & s \in \mathbb{R}^+ \\ X(t) = x \end{cases}$. On la note $X(\cdot; x, t)$ dans la suite de l'exercice.
 2. On suppose donnée $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une solution de (2). Montrer que, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, l'application $s \in \mathbb{R}^+ \mapsto u(s, X(s; x, t)) \in \mathbb{R}$ est constante.
 3. En déduire que, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, $u(t, x) = u_0(X(0; x, t))$.
 4. Conclure.
 5. Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + (t - x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6. Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Résoudre l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, (x, y)) - y \frac{\partial u}{\partial x}(t, (x, y)) + x \frac{\partial u}{\partial y}(t, (x, y)) = 0, & (t, (x, y)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, \\ u(0, (x, y)) = u_0(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Exercice 4

Soit $\alpha > 0$, un paramètre et $y_0 \in]0, 1[$. On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' &= \alpha y(1 - y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}. \quad (3)$$

Partie 1 : étude théorique.

- 1.(a) Montrer que cette équation différentielle admet une unique solution globale. Donner un encadrement de y sur \mathbb{R} .
- 1.(b) Déterminer l'expression de l'unique solution de (3) pour $\alpha = 1$ et $y_0 = \frac{1}{2}$.

On s'intéresse à la résolution numérique de cette équation différentielle. On fixe $T > 0$ et on considère $(t_n)_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ la subdivision régulière de l'intervalle $[0, T]$ à $N + 1$ points de pas $h := \frac{T}{N}$. On définit $y^0 = y_0$. Le but est de produire une suite $(y^n)_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ approximant $(y(t_n))_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}$.

Partie 2 : schéma d'Euler explicite. On considère le schéma d'Euler explicite associé à cette équation : pour $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$,

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = \alpha y^n(1 - y^n).$$

- 2.(a) Dans cette question, on suppose que $\alpha h < 1$. Montrer que, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $y^n \in]0, 1[$.
Hint : on pourra étudier la stabilité de l'intervalle $]0, 1[$ par la fonction $f : y \mapsto y + \alpha h y(1 - y)$.
- 2.(b) On suppose dans cette question que $\alpha h > 1$. Montrer qu'il existe un $y^0 \in]0, 1[$ tel que $y^1 > 1$. Commenter.

Partie 3 : une inégalité. Soient $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites de nombres réels positifs et $K > 0$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^{n+1} \leq (1 + K)z^n + M^n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n \leq (1 + K)^n z^0 + \sum_{k=0}^{n-1} M^k (1 + K)^{n-1-k}.$$

Partie 4 : un schéma semi-implicite. On souhaite utiliser une méthode numérique qui permette de vérifier $y^n \in]0, 1[$, indépendamment des valeurs de αh . Pour ce faire on propose d'étudier le schéma semi-implicite suivant : pour $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$,

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = \alpha y^n(1 - y^{n+1}).$$

- 4.(a) Montrer que ce schéma est bien défini.
- 4.(b) Montrer que $y_n \in]0, 1[$ pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, indépendamment des valeurs de αh .
- 4.(c) On s'intéresse à la mesure dans laquelle la solution y de (3) vérifie le schéma numérique proposé. Pour $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, on définit

$$R^n := \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \alpha y(t_n)(1 - y(t_{n+1})).$$

En utilisant un développement de Taylor, montrer l'existence de $C > 0$ telle que, pour $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$,

$$|R^n| \leq Ch.$$

- 4.(d) On définit l'erreur d'approximation du schéma par $e^n := y(t_n) - y^n$ pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.
Démontrer que, pour $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$,

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{h} = \alpha e^n (1 - y(t_{n+1})) - \alpha y^n e^{n+1} + R^n.$$

- 4.(e) En déduire que, pour $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$,

$$|e^{n+1}| \leq (1 + \alpha h) |e^n| + h |R^n|.$$

- 4.(f) En déduire que le schéma converge à l'ordre 1, *i.e.* qu'il existe $C_T > 0$, tel que, pour tout $h > 0$,

$$\max_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} |e^n| \leq C_T h.$$

Bonus : m'adresser par e-mail¹ un fichier Python avec :

- une fonction `schema(T, y_0, N)` qui renvoie le vecteur $Y \in \mathbb{R}^{N+1}$ contenant la suite des valeurs $(y^n)_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ produite par ce schéma numérique,
- un tracé en échelle log-log de $\max_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} |e^n|$ en fonction de N pour N parcourant `range(10, 2010, 10)` dans le cas $\alpha = 1$ et $y_0 = \frac{1}{2}$ – on connaît la solution exacte par 1.(b). En particulier, on mettra en avant le coefficient directeur de la droite obtenue : c'est l'opposé de l'ordre de la méthode.

¹`theo.gherdaoui@ens-rennes.fr`