Transformée de Fourier : de $L^1(\mathbb{R}^d)$ à $L^2(\mathbb{R}^d)$:

Voici les notes que j'ai réalisées lors de mon année de préparation à l'agrégation sur la théorie de Fourier.

Table des matières

Dans tout ce document, d désigne un entier naturel non nul. Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, on désigne le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{R}^d$ de x et y par $x \cdot y$.

1 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$

1.1 Définitions et premiers exemples

Définition 1 (*Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$*)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On définit la transformée de Fourier de f, $\hat{f}$ sur $\mathbb{R}^d$ par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x.$$

L'opérateur de transformée de Fourier est linéaire.

Remarque 1. *Cette fonction est bien définie puisque que : $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)e^{-ix\cdot\xi}| \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \mathrm{d}x = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} < \infty. \tag{1}$$

De plus, la linéarité est évidente.

Remarque 2. *Pour X une variable aléatoire à densité f_X par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, on définit sa fonction caractéristique comme étant : $\varphi_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}(e^{itX})$. En utilisant le théorème de transfert, on obtient :*

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{itx} f(x) \mathrm{d}x = \hat{f}(-t).$$

Exemple 1. *On considère $a, b \in \mathbb{R}$ et $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$. Calculons la transformée de Fourier de f. Pour $\xi \neq 0$,*

$$\hat{f}(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi} \mathrm{d}x = \frac{1}{-i\xi}\left(e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}\right) = 2e^{-i\frac{a+b}{2}\xi} \frac{\sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi}.$$

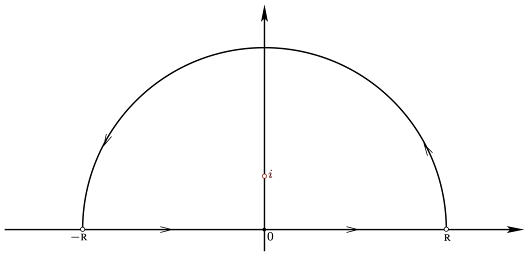
Pour $\xi = 0$,

$$\hat{f}(0) = b - a.$$

Exemple 2. *Calculons la transformée de Fourier de* $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. *On utilise pour ça le théorème des résidus (on verra dans la suite une méthode plus directe). On fixe* $\xi \in \mathbb{R}$ *et on définit l'application méromorphe* $g : z \in \mathbb{C} \mapsto \dfrac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}$. *Elle est holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, *et possède deux pôles simples. Le théorème des résidus donne donc, pour un chemin continument dérivable* γ *dont l'image ne rencontre pas* $\pm i$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z = Ind_i(\gamma)Res(g,i) + Ind_{-i}(\gamma)Res(g,-i).$$

On obtient alors $Res(g,i) = \lim_{z\to i}(z-i)g(z) = \dfrac{1}{2i}e^{\xi}$, *et* $Res(g,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)g(z) = -\dfrac{1}{2i}e^{-\xi}$. *On utilise le chemin suivant, pour un réel* $R > 1$,



Alors,

$$\pi e^{\xi} = \int_{-R}^{R} g(x)\mathrm{d}x + iR\int_0^{\pi} g(Re^{it})e^{it}\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Déterminons la limite quand $R \to +\infty$ *de la seconde intégrale. On a :*

$$\left| iR\int_0^{\pi} \frac{e^{-i\xi Re^{it}}}{1+R^2e^{2it}}e^{it}\mathrm{d}t \right| \leqslant R\int_0^{\pi}\frac{e^{\xi\sin(t)R}}{R^2-1}\mathrm{d}t.$$

Pour $\xi \leqslant 0$, *on a :*

$$\left| iR\int_0^{\pi} g(Re^{it})e^{it}\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{R\pi}{R^2-1}.$$

En prenant la limite quand $R \to +\infty$ *dans (2), on obtient :*

$$\pi e^{\xi} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Pour $\xi \geqslant 0$, *on prend un contour avec un arc de cercle dans le plan inférieur. On obtient alors* $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$.

Remarque 3. *Soit* X *est une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de paramètre* 1. *On en déduit sa fonction caractéristique : pour* $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{iXt}) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ixt}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\hat{f}(-t) = e^{-|t|}.$$

1.2 Propriétés

Proposition 1 (*Translation*)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *et* $a \in \mathbb{R}^d$. *Alors,*

$$\widehat{\tau_a f} = \xi \mapsto e^{-ia\cdot\xi}\hat{f}(\xi).$$

Démonstration : Pour $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-a) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x \underset{u=x-a}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-i(u+a)\cdot\xi} \mathrm{d}u = e^{-ia\cdot\xi} \hat{f}(\xi).$$

■

Proposition 2 (*Continuité*)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de f est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$.

Démonstration : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. L'équation (1) montre que $\hat{f}$ est bien définie et bornée. Montrons que l'application est continue sur $\mathbb{R}^d$. On applique le théorème de continuité sous le signe intégral. Premièrement, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\xi \in \mathbb{R}^d \mapsto f(x)e^{-ix\cdot\xi}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$. De plus, on a la majoration suivante :

$$\forall x, \xi \in \mathbb{R}^d,\ |f(x)e^{-ix\cdot\xi}| \leqslant |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Ceci conclut. ■

Remarque 4. *On a en fait mieux : pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}$ est une application uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On a, pour tout $\xi, k \in \mathbb{R}^d$,

$$\hat{f}(\xi) - \hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(e^{-ix\cdot\xi} - e^{-ix\cdot k} \right) \mathrm{d}x = 2i \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\frac{\xi+k}{2}} \sin\left(x \cdot \frac{k-\xi}{2} \right) \mathrm{d}x.$$

Ainsi,

$$\left| \hat{f}(\xi) - \hat{f}(k) \right| \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \left| \sin\left(x \cdot \frac{k-\xi}{2} \right) \right| \mathrm{d}x.$$

Soit $R > 0$, alors, on obtient par Cauchy-Schwarz,

$$\left| \hat{f}(\xi) - \hat{f}(k) \right| \leqslant R \left\| k - \xi \right\| \int_{\|x\| \leqslant R} |f(x)| \mathrm{d}x + 2 \int_{\|x\| > R} |f(x)| \mathrm{d}x.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par théorème de convergence dominée, le deuxième membre tend vers 0. Ainsi, $\exists R_0 > 0$ tel que $2 \int_{\|x\| > R_0} |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour $\xi, k \in \mathbb{R}^d$ tels que $\|\xi - k\| \leqslant \delta := \frac{\varepsilon}{2R_0 \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}$, on a :

$$\left| \hat{f}(\xi) - \hat{f}(k) \right| \leqslant \varepsilon.$$

■

Proposition 3 (*Lemme de Riemann Lebesgue*)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors :

$$\lim_{\|\xi\| \to +\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0.$$

Démonstration : On montre le résultat par densité. Soit $g \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on fixe $j \in [\![1, d]\!]$. Le théorème de Fubini-Lebesgue donne pour $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ix_j\xi_j} \mathrm{d}x_j \right) e^{-i\sum_{k\neq j} x_k\xi_k} \mathrm{d}x_{n-1}.$$

Par intégration par parties, en utilisant le support de g, il vient :

$$\hat{g}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_{x_j} g(x) \frac{e^{-ix_j\xi_j}}{-i\xi_j} \mathrm{d}x_j \right) e^{-i\sum_{k\neq j} x_k\xi_k} \mathrm{d}x_{n-1} = -\frac{i}{\xi_j} \widehat{\partial_{x_j} g}(\xi).$$

Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\hat{g}(\xi)| \leqslant \frac{1}{|\xi_j|} \left\| \widehat{\partial_{x_j} g} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Si $\|\xi\|$ tend vers l'infini, alors, il existe $j \in [\![1, d]\!]$ tel que $|\xi_j|$ tend vers $+\infty$. Pour ce j, on obtient le résultat grâce à l'inégalité précédente. Pour le cas général, on fixe $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $g \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, tel que $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \leqslant \left\|\widehat{f-g}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + |\hat{g}(\xi)| \leqslant \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + |\hat{g}(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |\hat{g}(\xi)|.$$

Puisque le résultat est vrai pour une fonction $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a : $\exists \xi_0 > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|\xi\| \geqslant \xi_0$, $|\hat{g}(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour $\|\xi\| \geqslant \xi_0$,

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leqslant \varepsilon.$$

■

Proposition 4 (*Opérateur de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$*)

On considère l'opérateur de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ définie par :

$$\mathcal{F}_1 : \begin{bmatrix} (L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}) & \to & (\mathcal{C}^0_{\to 0}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{bmatrix}.$$

Alors, $\mathcal{F}_1$ est un opérateur linéaire continu, de norme subordonnée valant 1.

Démonstration : C'est clairement un opérateur linéaire. L'inégalité (1) montre la continuité de l'opérateur, et donne $|||\mathcal{F}_1|||_{\mathcal{L}_c(L^1, \mathcal{C}^0_{\to 0})} \leqslant 1$. Pour l'égalité, revenons à l'exemple 2. On sait que :

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi.$$

De plus, $\left\|\xi \mapsto \pi e^{-|\xi|}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \pi$. Ceci montre le résultat. ■

Proposition 5 (*Convolution*)

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ deux fonctions. Alors, elles sont convolables, i.e., pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d \mapsto f(y)g(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$. De plus, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et on a la relation suivante : $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$.

Démonstration : Étant donnés $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on obtient par Fubini-Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)| \mathrm{d}x \right) |f(y)| \mathrm{d}y = \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} < +\infty.$$

Puisque, $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \mathrm{d}y$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, elle est finie pp en $x \in \mathbb{R}^d$. Ceci montre que les fonctions f et g sont convolables. De plus, l'égalité précédente montre que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$. Enfin, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f * g(x) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) \mathrm{d}y \right) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x.$$

Par le théorème de Fubini-Lebesgue (l'intégrande est intégrable pour la mesure produit),

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) e^{-i(x-y)\cdot\xi} \mathrm{d}y \right) f(y) e^{-iy\cdot\xi} \mathrm{d}x.$$

Après un changement de variable affine, on obtient directement le résultat. ■

Remarque 5. *Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité, et qu'elles sont indépendantes, alors, la densité de $X + Y$ est donnée comme étant $f_X * f_Y$. Ainsi,*

$$\varphi_{X+Y} = \widehat{f_{X+Y}}(-\cdot) = \widehat{f_X * f_Y}(-\cdot) = \widehat{f_X}(-\cdot)\widehat{f_Y}(-\cdot) = \varphi_X \varphi_Y.$$

Proposition 6 (*Fourier et dualité*)

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration : Il convient de remarquer que ces deux expressions sont bien définies puisqu'il s'agit à chaque fois d'un produit d'une fonction $L^1(\mathbb{R}^d)$ et d'une fonction $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. On obtient donc une fonction $L^1(\mathbb{R}^d)$. Ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(z)e^{-ix\cdot z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x.$$

En utilisant le théorème de Fubini-Lebesgue, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix\cdot z}\mathrm{d}x\right)g(z)\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(z)g(z)\mathrm{d}z.$$

■

1.3 Dérivation

Proposition 7 (*Transformée de Fourier de la dérivée*)

On considère $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et $j \in [\![1, d]\!]$ tel que $\partial_{x_j} f$ existe et est $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, on a la relation suivante :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi).$$

Démonstration : Par définition, on a : $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_j} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x.$$

Par le théorème de Fubini-Lebesgue,

$$\widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} \partial_{x_j} f(x)e^{-ix_j\xi_j}\mathrm{d}x\right)e^{-i\sum_{k\neq j} x_k\xi_k}\mathrm{d}x.$$

On souhaiterait effectuer une intégration par parties mais on ne sait pas comment gérer le terme du crochet... On introduit alors une fonction de troncature : on considère $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Supp}(\chi) \subseteq B(0,1)$, et $\chi \equiv 1$ sur $B(0, \frac{1}{2})$. Pour $n \geqslant 1$, on introduit $\chi_n = \chi\left(\frac{\cdot}{n}\right)$. On définit $f_n = \chi_n f$ et on a pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{\partial_{x_j} f_n}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} \partial_{x_j}(\chi_n f)(x)e^{-ix_j\xi_j}\mathrm{d}x\right)e^{-i\sum_{k\neq j} x_k\xi_k}\mathrm{d}x.$$

Cette fois, on peut intégrer par parties et obtenir directement :

$$\widehat{\partial_{x_j} f_n}(\xi) = i\xi_j\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_n(x)f(x)e^{-ix_j\xi_j}\mathrm{d}x\right)e^{-i\sum_{k\neq j} x_k\xi_k}\mathrm{d}x = i\xi_j\hat{f}_n(\xi).$$

De plus, on a par théorème de convergence dominée :

$$\|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_n(x) - 1||f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement,

$$\left\|\partial_{x_j} f_n - \partial_j f\right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_n(x) - 1||\partial_{x_j} f(x)|\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\left(\partial_{x_j}\chi\right)\left(\frac{x}{n}\right)\right||f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

en traitant le première intégrale comme précédemment, la deuxième étant évidente. En utilisant la continuité de la transformée de Fourier, on conclut directement. ■

Exemple 3. *Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. En effet, en itérant la proposition précédente, on obtient : $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{f''}(\xi) = -\xi^2 \hat{f}(\xi)$. Alors,*

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \left|\hat{f}(\xi)\right| \leqslant \frac{1}{|\xi|^2}\left|\widehat{f''}(\xi)\right| \leqslant \frac{1}{|\xi|^2}\|f''\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Donc, $\hat{f}$ est donc intégrable car continue, la majoration précédente montrant l'intégrabilité en $\pm\infty$.

Proposition 8 (*Dérivée de la transformée de Fourier*)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On suppose que, pour $j \in [\![1,d]\!]$, $x \mapsto x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, $\hat{f}$ admet une dérivée partielle selon e_j, et la relation suivante est vérifiée :

$$\partial_{\xi_j}\hat{f} = -i\widehat{x \mapsto x_j f(x)}.$$

Démonstration : On applique le théorème de dérivation sous le signe intégral : premièrement, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\xi_j \in \mathbb{R} \mapsto f(x)e^{-ix\cdot\xi}$ est dérivable. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi_j \in \mathbb{R},\ \left|\partial_{\xi_j}(f(x)e^{-ix\cdot\xi})\right| = \left|-ix_j f(x)e^{-ix\cdot\xi}\right| = |x_j f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Ainsi, on obtient directement le résultat. ∎

1.4 Inversion de Fourier et conséquences

Lemme 1 (*Transformée de Fourier de la Gaussienne*)

Soit $a > 0$, on définit : $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-a\frac{x^2}{2}}$. Alors, on a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{f_a}(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{2a}}.$$

Nous proposons deux preuves de ce résultat : la première est basée sur le principe des zéros isolés pour les fonctions holomorphes, et la deuxième sur une équation différentielle. Il existe d'autre preuves, notamment une faisant intervenir le calcul d'une intégrale sur un contour rectangulaire.

Démonstration : Soit $a > 0$. On définit pour $z \in \mathbb{C}$,

$$g_a(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a\frac{x^2}{2}}e^{-ixz}\mathrm{d}x.$$

Cette quantité est bien définie. En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\int_{\mathbb{R}}\left|e^{-a\frac{x^2}{2}}e^{-ixz}\right|\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-a\frac{x^2}{2}}e^{x\mathrm{Im}(z)}\mathrm{d}x < +\infty,$$

puisque $e^{-a\frac{x^2}{2}}e^{x\mathrm{Im}(z)} = o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. De plus, on a : pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$g_a(iz) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{a}{2}\left(x^2 - 2\frac{xz}{a}\right)}\mathrm{d}x = e^{\frac{z^2}{2a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{z}{a}\right)^2}\mathrm{d}x.$$

Alors,

$$g_a(iz) \underset{u=x-\frac{z}{a}}{=} e^{\frac{z^2}{2a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{a}{2}u^2}\mathrm{d}u \underset{v=\sqrt{a}u}{=} \frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{z^2}{2a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{\frac{z^2}{2a}} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\frac{(iz)^2}{2a}}.$$

Remarquons que g_a est entière. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z \mapsto e^{-a\frac{x^2}{2}}e^{-ixz}$ est entière. De plus,

$$\forall R > 0, \forall z \in B(0,R), \forall x \in \mathbb{R},\ \left|e^{-a\frac{x^2}{2}}e^{-ixz}\right| \leqslant e^{-a\frac{x^2}{2}}e^{R|x|} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Ainsi, les deux fonctions entières g_a et $z \mapsto \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{z^2}{2a}}$ coïncident sur $i\mathbb{R}$, donc le principe des zéros isolés appliqué sur l'ouvert connexe $\mathbb{C}$ montre que ces deux applications sont égales sur $\mathbb{C}$. En particulier, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f_a}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} \mathrm{d}x = g_a(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}}$$

■

Voilà la deuxième preuve du lemme 1 sur le calcul de la transformée de Fourier de la Gaussienne :

Démonstration : On fixe $a > 0$, et $\xi \in \mathbb{R}$. Remarquons que $x \mapsto xe^{-a\frac{x^2}{2}} e^{-ixz}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors, la proposition 8 assure que :

$$\widehat{f_a}'(\xi) = -i\widehat{x \mapsto xf(x)} = -i \int_{\mathbb{R}} xe^{-a\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} \mathrm{d}x.$$

On obtient alors par intégration par parties :

$$\widehat{f_a}'(\xi) = -i\left(\left[-\frac{1}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}} e^{-ix\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty} - i\frac{\xi}{a} \int_{\mathbb{R}} e^{-a\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} \mathrm{d}x\right) = -\frac{\xi}{a} \widehat{f_a}(\xi).$$

Ainsi, on en déduit que : il existe $C > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_a(\xi) = Ce^{-\frac{\xi^2}{2a}}$. En calculant $f(0)$, on conclut. ■

Rappel. *On appelle approximation de l'unité toute famille de fonctions $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ intégrables sur $\mathbb{R}^d$, vérifiant :*

- $\forall \varepsilon > 0,\ \varphi_\varepsilon \geqslant 0.$
- $\forall \varepsilon > 0,\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x) \mathrm{d}x = 1.$
- $\forall \delta > 0,\ \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\|x\|>\delta} \varphi_\varepsilon(x) \mathrm{d}x = 0.$

Alors, on rappelle que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a : $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$ (voir annexe pour plus de détails).

Exemple 4. *La famille définie par $\varphi_\varepsilon : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \dfrac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\varepsilon}}$ est une approximation de l'unité, dite approximation de l'unité de Gauss. En effet, il s'agit bien d'une famille de fonctions positives de $L^1(\mathbb{R}^d)$. De plus, on a, en vertu du théorème de Fubini-Tonelli, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\varepsilon}} \mathrm{d}x = \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_j^2}{2\varepsilon}} \mathrm{d}x_j \underset{u_j = \frac{x_j}{\sqrt{\varepsilon}}}{=} \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u_j^2}{2}} \mathrm{d}u_j = 1.$$

Enfin, pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{d}{2}}} \int_{\|x\|>\delta} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\varepsilon}} \mathrm{d}x \underset{u = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|u\|^2}{2}} \mathbb{1}_{\|u\|>\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}} \mathrm{d}u \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

par théorème de convergence dominée.

Theorème 1 (*Inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$*)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi, \quad pp \text{ en } x.$$

Démonstration : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On considère $\varepsilon > 0$ et on définit

$$\mathcal{F}_\varepsilon : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon \frac{\|\xi\|^2}{2}} \mathrm{d}\xi.$$

Le fait d'introduire un poids exponentiel permet de légitimer les inversions des intégrales (il faut rendre l'intégrande intégrable par rapport à la mesure produit). On effectue donc les calculs avec ce poids, et le but est de le faire disparaître à la fin, en passant à la limite $\varepsilon \to 0^+$.

Premièrement, $\hat{f}$ étant supposé $L^1(\mathbb{R}^d)$, cette fonction est bien définie. De plus,

- $\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon \frac{\|\xi\|^2}{2}} \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \left| \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon \frac{\|\xi\|^2}{2}} \right| \leqslant \left| \hat{f}(\xi) \right| \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Par théorème de convergence dominée, on obtient donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi.$$

On injecte maintenant la formule qui définie $\hat{f}$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) e^{-iz\cdot\xi} \mathrm{d}z \right) e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon \frac{\|\xi\|^2}{2}} \mathrm{d}\xi.$$

Par le théorème de Fubini-Lebesgue (légitimé par la présence du poids),

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon \frac{\|\xi\|^2}{2}} e^{-i(z-x)\cdot\xi} \mathrm{d}\xi \right) f(z) \mathrm{d}z$$

Alors, en reprenant les notations introduites dans le lemme 1,

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon \frac{\xi_j^2}{2}} e^{-i(z_j - x_j)\xi_j} \mathrm{d}\xi_j \right) f(z) \mathrm{d}z = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\prod_{j=1}^d \hat{f}_\varepsilon(z_j - x_j) \right) f(z) \mathrm{d}z.$$

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|x-z\|^2}{2\varepsilon}} f(z) \mathrm{d}z = \varphi_\varepsilon * f(x),$$

où φ_ε est l'approximation de l'unité introduite à l'exemple 3. Puisque $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$, il existe une sous-suite qui converge presque sûrement sur $\mathbb{R}^d$. On obtient donc, par unicité de la limite, le résultat. ■

Remarque 6. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors, on a $f = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{\hat{f}}(-\cdot)$. De plus, l'égalité précédente donne l'existence d'un représentant continu de f sur $\mathbb{R}^d$.*

Exemple 5. *On peut retrouver beaucoup plus facilement le résultat de l'exemple 2. En effet, on pose $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \pi e^{-|x|}$. Alors,*

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \pi \int_{-\infty}^0 e^{x(1-i\xi)} \mathrm{d}x + \pi \int_0^{+\infty} e^{-x(1+i\xi)} \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{1+\xi^2} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Par inversion de Fourier,

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \pi e^{-|\xi|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2\pi e^{ix\xi}}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

Ceci conclut.

Corollaire 1 (*Injectivité de l'opérateur de Fourier*)

L'opérateur de Fourier $\mathcal{F}_1$ est injectif.

Démonstration : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathcal{F}_1(f) = 0$. Alors, $\hat{f} = \mathcal{F}_1(f) = 0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Par inversion de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi = 0, \quad \text{pp en } x \in \mathbb{R}^d.$$

Ceci conclut. ∎

Corollaire 2 (*Non surjectivité de l'opérateur de Fourier*)

L'opérateur de Fourier $\mathcal{F}_1$ n'est pas surjectif.

Démonstration : On suppose que $\mathcal{F}_1$ est surjectif. Alors, c'est un isomorphisme entre deux espaces complets. Le théorème d'isomorphisme de Banach assure que $\mathcal{F}_1^{-1}$ est continu : il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C \left\|\hat{f}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

On introduit alors, pour $n \geqslant 1$, $f_n := \mathbb{1}_{[-n,n]} * \mathbb{1}_{[-1,1]}$. Alors, on a, grâce à l'exemple 1,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^*,\ \hat{f_n}(\xi) = 4\frac{\sin(n\xi)\sin(\xi)}{\xi^2}.$$

De plus, $\hat{f_n} \in L^1(\mathbb{R})$. On pose $g_n = \hat{f_n}$. La formule d'inversion de Fourier assure que $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\hat{g_n}(-\cdot)$. Ainsi, on a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\|g_n\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant C \|\hat{g_n}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant 2\pi C.$$

Enfin,

$$\|g_n\|_{L^1(\mathbb{R})} \geqslant 4\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(n\xi)|\sin(\xi)}{\xi^2}\mathrm{d}\xi \geqslant \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(n\xi)|}{\xi}\mathrm{d}\xi \underset{u=n\xi}{=} \frac{8}{\pi}\int_0^{n\pi/2}\frac{|\sin(u)|}{u}\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ceci contredit l'inégalité précédente. ∎

On peut même trouver un exemple explicite d'une fonction continue, qui tend vers 0, et qui n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R})$. On utilise pour cela le lemme suivant :

Lemme 2

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, impaire (pp sur $\mathbb{R}$). Alors,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{\hat{f}(t)}{t}\mathrm{d}t = -2i\int_0^{+\infty} f(x)\left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

Démonstration : Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^0 f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} f(x)e^{ix\xi}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.$$

$$\hat{f}(\xi) = -2i\int_0^{+\infty} f(x)\sin(x\xi)\mathrm{d}x.$$

On pose $\phi : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$. Cette application est bien définie (car il s'agit d'une intégrale semi-convergente), continue (par théorème fondamental de l'analyse, après prolongement en 0 de l'intégrande), et bornée (elle tend vers 0 en $+\infty$, comme reste d'une intégrale convergente). Enfin, pour $R > 1$,

$$\int_1^R \frac{\hat{f}(t)}{t}\mathrm{d}t = -2i\int_1^R\left(\int_0^{+\infty} f(x)\sin(xt)\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Par le théorème de Fubini-Lebesgue,

$$\int_1^R \frac{\hat{f}(t)}{t}\mathrm{d}t = -2i\int_0^{+\infty}\left(\int_1^R \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{d}t\right)f(x)\mathrm{d}x.$$

Avec un changement de variables,

$$\int_1^R \frac{\hat{f}(t)}{t}\mathrm{d}t \underset{v=xt}{=} -2i\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{xR}\frac{\sin(v)}{v}\mathrm{d}v\right)f(x)\mathrm{d}x = -2i\int_0^{+\infty}\left(\phi(x)-\phi(Rx)\right)f(x)\mathrm{d}x.$$

On applique le théorème de convergence dominée :

- $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $(\phi(x)-\phi(Rx))\,f(x) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x)f(x)$, comme reste d'une intégrale convergente.
- $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $\forall R>1$, $|(\phi(x)-\phi(Rx))\,f(x)| \leqslant 2\,\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}\,|f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

Ceci conclut. ■

Démonstration : On introduit alors $g : x\in\mathbb{R}\mapsto \dfrac{\arctan(x)}{\ln(2+x^2)}$. Cette fonction est clairement continue sur $\mathbb{R}$, et tend vers 0 en $\pm\infty$; elle est impaire. On suppose que g est la transformée de Fourier d'une fonction $f\in L^1(\mathbb{R})$. Alors, f est nécessairement impaire : on pose $h=-f(-\cdot)$. Ainsi, pour tout $\xi\in\mathbb{R}$,

$$\hat{h}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}} f(-x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \underset{u=-x}{=} -\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{iu\xi}\mathrm{d}u = -g(-\xi) = g(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

Par injectivité de la transformée de Fourier, on a alors $h=f$, donc, f est impaire. Ainsi, on peut appliquer l'énoncé précédent, et obtenir :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_1^R\frac{g(t)}{t}\mathrm{d}t = -2i\int_0^{+\infty}f(x)\left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

Or,

$$\frac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4x\ln(x)}.$$

C'est une intégrale (de Bertrand) divergente, c'est donc impossible ■

Corollaire 3

La seule solution de l'équation $f*f=f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ est la fonction nulle.

Démonstration : Soit $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $f*f=f$. Alors, pour tout $\xi\in\mathbb{R}^d$, $\hat{f}(\xi)^2=\hat{f}(\xi)$. Ainsi, $\forall\xi\in\mathbb{R}^d$, $\hat{f}(\xi)=0$ ou $\hat{f}(\xi)=1$. Puisque $\hat{f}$ est continue, on a : $\forall\xi\in\mathbb{R}^d$, $\hat{f}(\xi)=0$, ou $\forall\xi\in\mathbb{R}^d$, $\hat{f}(\xi)=1$. Le deuxième cas est impossible, en vertu du lemme de Riemann-Lebesgue. Ainsi, $\hat{f}\equiv 0$. Par injectivité, $f\equiv 0$. ■

Remarque 7. *Dans la première preuve du lemme 1, on a montré que la transformée de Fourier de la gaussienne s'étend en une fonction entière. On a en fait le résultat suivant :*

Proposition 9 (*Quand la transformée de Fourier devient entière..*)

Soit $f\in L^1_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors, on peut prolonger la transformée de Fourier en une fonction entière.

Démonstration : On définit pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixz}\mathrm{d}x.$$

La fonction g est bien définie :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \left|f(x)e^{-ixz}\right| \leqslant |f(x)|\left\|x\mapsto e^{-ixz}\right\|_{L^\infty(\mathrm{Supp}(f))}\mathbb{1}_{\mathrm{Supp}(f)}(x)\in L^1(\mathbb{R}).$$

On applique le théorème d'holomorphie sous le signe intégral : $z\in\mathbb{C}\mapsto f(x)e^{-ixz}$ est holomorphe pour presque tout $x\in\mathbb{R}$. De plus, pour tout K compact de $\mathbb{C}$,

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall z\in K,\ \left|f(x)e^{-ixz}\right| \leqslant |f(x)|\left\|(x,z)\mapsto e^{-ixz}\right\|_{L^\infty(\mathrm{Supp}(f)\times K)}\mathbb{1}_{\mathrm{Supp}(f)}(x)\in L^1(\mathbb{R}).$$

Alors g est holomorphe, ceci conclut. ■

Remarque 8. *La réciproque est fausse, la gaussienne n'est pas à support compact, mais comme on l'a vu, sa transformée de Fourier s'étant en une fonction analytique.*

Corollaire 4 (*Premier principe d'Heisenberg*)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, la seule fonction pour laquelle f et $\hat{f}$ sont à support compact est la fonction nulle.

Démonstration : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que f et $\hat{f}$ sont à support compact. Ainsi, il existe $R > 0$ tel que, pour tout $|x| \geqslant R$, $\hat{f}(x) = 0$. Par la proposition précédente, $\hat{f}$ se prolonge en une application entière, g. De plus, $g_{|]-\infty,-R[\cup]R,+\infty[} = 0$. Par le principe des zéros isolés appliqué sur $\mathbb{C}$, g est nulle. Ainsi, $\hat{f} \equiv 0$. Par injectivité, $f \equiv 0$. ■

Remarque 9. *Cela pose problème. En effet, on souhaite définir la transformée de Fourier d'une distribution. Comme pour le produit, la dérivation etc, toutes les opérations sur les distributions sont définies par dualité. Ainsi, on aimerait, étant donné $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, définir :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ (\hat{T}, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = (T, \hat{\varphi})_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}.$$

Néanmoins, on vient de voir que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\hat{\varphi} \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On ne peut donc pas procéder ainsi. On doit trouver un espace de fonctions régulières, stable par la transformée de Fourier : l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la classe de Schwartz !

2 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

2.1 Définition

On souhaite définir la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. On ne peut pas utiliser la définition donnée sur $L^1(\mathbb{R}^d)$, elle n'a a priori pas de sens. On va, pour cela, s'intéresser aux propriétés de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, et étendre le résultat ensuite par densité. Pour cela, on utilise les deux lemmes suivant :

Lemme 3 (*Cas particulier de l'inégalité de Young*)

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors, $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par changement de variable affine,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\, \mathrm{d}y \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Cette inégalité montre que les fonctions sont convolables, que la convolée est $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et fournit l'inégalité recherchée. ■

Lemme 4 (*Convolution dans $L^2(\mathbb{R}^d)$*)

La convolé de deux fonctions $L^2(\mathbb{R}^d)$ est continue sur $\mathbb{R}^d$, et tend vers 0 en l'infini.

Démonstration : On raisonne à nouveau par densité. Soient $f, g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Alors, il est clair que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}^d$. De plus, il est connu que $\mathrm{Supp}(f * g) \subseteq \overline{\mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(g)}$. Ainsi, $f * g$ est à support compact donc, vérifie la condition de nullité asymptotique. On considère désormais $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors il existe $(f_n)_n, (g_n)_n \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telles que $\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\|g_n - g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors, par l'inégalité de Young,

$$\|f_n * g_n - f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|(f_n - f) * g_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \|f * (g_n - g)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

$$\|f_n * g_n - f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|g_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors, $f * g \in \overline{\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})}}$. Ceci montre le résultat. ■

Proposition 10

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et on a l'égalité suivante :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. On considère $\tilde{f} = \overline{f(-\cdot)}$, et $g = f * \tilde{f}$. Alors, g est $L^1(\mathbb{R}^d)$ comme convolé de telles fonctions, et on peut alors calculer sa transformée de Fourier :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{\tilde{f}}(\xi).$$

De plus,

$$\hat{\tilde{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)} e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} e^{ix\cdot\xi}\mathrm{d}x = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x} = \overline{\hat{f}(\xi)}.$$

Ainsi, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\hat{g}(\xi) = \left|\hat{f}(\xi)\right|^2$. De plus, par le lemme précédent, g est continue et tend vers 0 en l'infini car convolé de deux fonctions $L^2(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, elle est uniformément continue, et bornée, donc, on peut appliquer le théorème rappelé en annexe, et on a, pour l'approximation de l'unité de Gauss :

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = g(0) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varphi_\varepsilon * g(0) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x) g(x)\mathrm{d}x.$$

Par inversion de Fourier, on a directement :

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi_\varepsilon}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\right) g(x)\mathrm{d}x.$$

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon\frac{\|\xi\|^2}{2}} e^{ix\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\right) g(x)\mathrm{d}x.$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\right) e^{-\varepsilon\frac{\|\xi\|^2}{2}}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(-\xi) e^{-\varepsilon\frac{\|\xi\|^2}{2}}\mathrm{d}\xi.$$

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 e^{-\varepsilon\frac{\|\xi\|^2}{2}}\mathrm{d}\xi. \tag{3}$$

L'inégalité de Fatou donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 e^{-\varepsilon\frac{\|\xi\|^2}{2}}\mathrm{d}\xi \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 e^{-\varepsilon\frac{\|\xi\|^2}{2}}\mathrm{d}\xi = (2\pi)^d \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \infty.$$

Ainsi, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et le théorème de convergence dominée appliqué à (3) conclut. ■

On peut désormais étendre la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, en une application appelée Tranformée de Fourier-Plancherel.

Theorème 2 (*Prolongement de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$*)

L'application

$$\begin{bmatrix} (L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}) & \to & (L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}) \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{bmatrix}$$

s'étend de manière unique en une application linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, notée $\mathcal{F}$, appelée transformée de Fourier-Plancherel.

Démonstration : On utilise le théorème de prolongement des applications uniformément continues : l'application est uniformément continue, car linéaire continue. L'espace $(L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)})$ est complet. De plus, $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)})$. En effet : $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on définit $f_n = f\mathbb{1}_{[-n,n]} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ (elle est clairement L^2, et L^1 par Cauchy-Schwarz). De plus

$$\|f_n - f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_{[-n,n]}(x) - 1|^2 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par convergence dominée. Le théorème conclut. ■

Remarque 10. *Il convient de remarquer que la transformée de Fourier-Plancherel est définie pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ mais ce prolongement est abstrait ; on ne peut pas utiliser la formulation intégrale si f n'est pas $L^1(\mathbb{R}^d)$*

2.2 Quelques propriétés

Theorème 3 (*Isomorphisme quasi-isométrique de Fourier-Plancherel*)

La transformée de Fourier-Plancherel est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus, on a :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration : Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On utilise la densité et on considère $(f_n)_n \in \left(L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)\right)^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, par la proposition 10, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left\|\hat{f}_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \|\mathcal{F}(f_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Par continuité de l'opérateur de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^d)} \mathcal{F}(f)$. Ainsi, le passage à la limite dans l'égalité précédente permet de conclure à la quasi-isométrie de $\mathcal{F}$. Elle est ainsi injective. Montrons qu'elle est surjective ; on montre en fait qu'elle est d'image fermée, et dense. L'image est clairement fermée, grâce à la propriété de quasi-isométrie. Montrons qu'elle est d'image dense : soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. En reprenant l'exemple 3, en dérivant selon une direction, on obtient directement que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, le théorème d'inversion de Fourier donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi,$$

la relation ayant lieu partout puisque les fonctions sont continues. En posant $g := \frac{1}{(2\pi)^d}\hat{f}(-\cdot)$, on a donc $f = \hat{g} = \mathcal{F}(g)$. Par suite, $f \in \mathrm{Im}(\mathcal{F})$. Alors,

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})}^{\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}} \subseteq \overline{\mathrm{Im}(\mathcal{F})}^{\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}} = \mathrm{Im}(\mathcal{F}) \subseteq L^2(\mathbb{R}^d).$$

Ceci conclut. ■

Remarque 11. *On connait l'inverse de $\mathcal{F}$. En effet : soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On considère $(f_n)_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors, comme vu dans la précédente preuve,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^d,\ f_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}_n(\xi) e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{\hat{f}}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{F}(\mathcal{F}(f_n))(-x).$$

En passant à la limite, on obtient

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = (2\pi)^d f(-\cdot).$$

Exemple 6. *Calculer*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(t)}{t^2} \mathrm{d}t.$$

En effet, l'intégrale est convergente, puisqu'elle est faussement impropre en 0, et a un comportement asymptotique clair. De plus, on sait, par l'exemple 1 que $f = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}$ a pour transformée de Fourier : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi}$. Alors, puisque $f \in L^2(\mathbb{R})$, la relation de Fourier-Plancherel donne

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(t)}{t^2} \mathrm{d}t = \left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2\pi \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \mathrm{d}x = \pi.$$

Corollaire 5

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors

$$(f,g)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g))_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration : On utilise les relations de polarisation : $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$(f,g)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{2}\left(\|f+g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right).$$

$$(f,g)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\frac{1}{2}\left(\|\mathcal{F}(f+g)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|\mathcal{F}(f)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|\mathcal{F}(g)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)$$

$$(f,g)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g))_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

■

Exemple 7. *Pour $a, b > 0$, calculer*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$$

On rappelle que la transformée de Fourier de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est $x \mapsto \pi e^{-|x|}$. On pose $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2} \in L^1(\mathbb{R})$. On obtient alors avec un changement de variables :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{(\frac{x}{a})^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iu(a\xi)}}{u^2+1}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{a}e^{-a|x|}.$$

Alors, puisque $f_a, f_b \in L^2(\mathbb{R})$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \int_{\mathbb{R}} f_a(x)f_b(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\pi^2}{ab}e^{-(a+b)|x|}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2ab}\frac{2}{a+b} = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

Exemple 8. *Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.*

On sait que $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$. Alors, on ne peut pas utiliser la formule donnant la définition de la transformée de Fourier ; on parle donc de la transformée de Fourier-Plancherel. Rappelons nous que la transformée de Fourier de $g := \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R})$ est f. Alors, $f = \hat{g} = \mathcal{F}(g)$. Alors,

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(g)) = 2\pi g(-\cdot) = 2\pi g.$$

Ceci conclut.

2.3 Retour sur la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$

Proposition 11 (*Convolution $L^1(\mathbb{R}^d) * L^2(\mathbb{R}^d)$*)

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors,

$$\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\mathcal{F}(g).$$

Démonstration : La convolé d'une fonction $L^1(\mathbb{R}^d)$ et d'une fonction $L^2(\mathbb{R}^d)$ étant $L^2(\mathbb{R}^d)$, il est légitime de considérer $\mathcal{F}(f * g)$. Montrons le résultat par densité : soit $(g_n) \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\|g_n - g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors, $g_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ et les deux transformations coïncident :

$$\mathcal{F}(f * g_n) = \widehat{f * g_n} = \hat{f}\hat{g_n} = \hat{f}\mathcal{F}(g_n).$$

On passe maintenant à la limite quand $n \to +\infty$ en utilisant la continuité de Fourier-Plancherel, et en remarquant que

$$\|f * g_n - f * g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g_n - g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

■

Proposition 12 (*Convolution $L^2(\mathbb{R}^d) * L^2(\mathbb{R}^d)$*)

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ Alors,

$$\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

Démonstration : Le produit de deux fonctions $L^2(\mathbb{R}^d)$ étant $L^1(\mathbb{R}^d)$, il est légitime de considérer $\widehat{fg}$. Montrons le résultat : soit $(f_n), (g_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ (la classe de Schwartz) telle que $\|f_n - g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|g_n - g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Posons $u_n = \mathcal{F}^{-1}(f_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $v_n = \mathcal{F}^{-1}(g_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors,

$$\mathcal{F}(u_n * v_n) = \mathcal{F}(u_n)\mathcal{F}(v_n) = f_n g_n.$$

Ainsi,

$$\mathcal{F}(f_n g_n) = \widehat{f_n g_n} = \mathcal{F}(\mathcal{F}(u_n * v_n)) = (2\pi)^d u_n * v_n(-\cdot).$$

En utilisant $u_n = \mathcal{F}^{-1}(f_n) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(f_n)(-\cdot)$ et $v_n = \mathcal{F}^{-1}(g_n) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(g_n)(-\cdot)$, il vient :

$$\widehat{f_n g_n} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f_n)(-y)\mathcal{F}(g_n)(\cdot + y)\mathrm{d}y \underset{y\to -y}{=} \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(f_n) * \mathcal{F}(g_n).$$

On passe maintenant à la limite quand $n \to +\infty$ pour conclure (on pourra utiliser l'inégalité du lemme 3). ■

Corollaire 6 (*Image de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$*)

On a :

$$\mathcal{F}_1\left(L^1(\mathbb{R})\right) = L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R}).$$

Démonstration : Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors, en appliquant la proposition 12 à $\mathcal{F}^{-1}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}^{-1}(g) \in L^2(\mathbb{R})$, il vient :

$$\mathcal{F}_1\left(\mathcal{F}^{-1}(g)\mathcal{F}^{-1}(f)\right) = \frac{1}{2\pi} f * g.$$

Donc,

$$f * g = \mathcal{F}_1\left(2\pi\mathcal{F}^{-1}(g)\mathcal{F}^{-1}(f)\right).$$

On a donc $L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}_1(L^1(\mathbb{R}))$. Réciproquement, soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose $u = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{|f|}\right)$ et $v = \mathcal{F}\left(\mathrm{sgn}(f)\sqrt{|f|}\right)$. Alors, il est claire que $u, v \in L^2(\mathbb{R})$. De plus, par la proposition précédente,

$$u * v = 2\pi\mathcal{F}_1\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{|f|}\mathrm{sgn}(f)\sqrt{|f|}\right) = \mathcal{F}_1(f).$$

Ceci conclut. ■

A Annexe : théorème de régularisation

Theorème 4

Soit $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'unité. Alors :

- *Pour toute fonction f, uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$, on a :*

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

- *Pour tout $p \in [1,+\infty[$, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,*

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration : Pour le premier point, remarquons que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(y) f(x-y)\mathrm{d}y - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(y)\left(f(x-y) - f(x)\right)\mathrm{d}y.$$

Puisque f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, pour tout $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, avec $\|y\| \leqslant \delta$, on a $|f(x-y) - f(x)| \leqslant \eta$.

$$|\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)| \leqslant \eta \int_{\|y\|\leqslant\delta} \varphi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y + 2\,\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{\|y\|>\delta} \varphi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y.$$

Ainsi, puisqu'on utilise une approximation de l'unité, il vient :

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} |\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)| \leqslant \eta.$$

Ceci conclut.

Soit $p \in [1,+\infty[$. Pour le second point, on raisonne par densité, et on considère $g \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$. Alors, g est bornée et uniformément continue. Elle vérifie donc le premier point. On considère alors $R > 0$, tel que $\mathrm{Supp}(g) \subseteq B(0, \frac{R}{2})$ et on décompose la quantité suivant :

$$\|\varphi_\varepsilon * g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \left\|(\varphi_\varepsilon * g - g)\mathbb{1}_{\|\cdot\|\leqslant R}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \left\|(\varphi_\varepsilon * g - g)\mathbb{1}_{\|\cdot\|>R}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Pour le premier terme, il suffit de remarquer que :

$$\left\|(\varphi_\varepsilon * g - g)\mathbb{1}_{\|\cdot\|\leqslant R}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{Vol}(B(0,R))^{\frac{1}{p}}\,\|\varphi_\varepsilon * g - g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Il nous reste à examiner le second terme : remarquons que, pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, tel que $\|x\| > R$ et $\|y\| \leqslant \frac{R}{2}$,

$$\|x - y\| \geqslant |\,\|x\| - \|y\|\,| \geqslant \frac{R}{2} \text{ donc } g(x-y) = 0.$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^d$, tel que $\|x\| > R$,

$$(\varphi_\varepsilon * g - g)(x) = \varphi_\varepsilon * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(y) g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\|y\|\geqslant\frac{R}{2}} \varphi_\varepsilon(y) g(x-y)\mathrm{d}y = \left(\varphi_\varepsilon \mathbb{1}_{\|\cdot\|\geqslant\frac{R}{2}}\right) * g(x).$$

Ainsi,

$$\left\|(\varphi_\varepsilon * g - g)\mathbb{1}_{\|\cdot\|>R}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \left\|\left(\varphi_\varepsilon \mathbb{1}_{\|\cdot\|\geqslant\frac{R}{2}}\right) * g\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \left\|\varphi_\varepsilon \mathbb{1}_{\|\cdot\|\geqslant\frac{R}{2}}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci conclut. Enfin, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on sait que pour tout $\eta > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ tel que $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\eta}{2}$. Alors,

$$\|f - \varphi_\varepsilon * f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|g - \varphi_\varepsilon * g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\varphi_\varepsilon * (g - f)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

$$\|f - \varphi_\varepsilon * f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|g - \varphi_\varepsilon * g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \eta + \|g - \varphi_\varepsilon * g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

D'où,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \|f - \varphi_\varepsilon * f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \eta.$$

Ceci conclut. ■

Remarque 12. *Le second point est faux pour* $p = +\infty$. *En effet, prenons une approximation de l'unité, composée de fonctions continues. Alors, pour tout* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, f *serait limite uniforme d'une suite de fonctions continues, donc serait continue. On aurait* $L^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, *ce qui est faux.*