Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Voici les notes que j'ai réalisées lors de mon année de préparation à l'agrégation sur la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Table des matières

Dans tout ce document, d désigne un entier naturel non nul.

1 Espace de Schwartz

Définition 1 (*Espace de Schwartz*)

On définit l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ comme l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées, i.e. vérifiant pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\right| < +\infty.$$

Exemple 1. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 2. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{1+x^2} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$. *En effet, il est clair que $x \mapsto x^3 f(x)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 3. *Pour tout $\lambda > 0$, $g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\lambda x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En effet, on peut démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_{n,\lambda} \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout réel x :*

$$g^{(n)}(x) = P_{n,\lambda}(x) e^{-\lambda x^2}.$$

Ainsi, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$|x^\alpha g^{(\beta)}(x)| = \left|x^\alpha P_{\beta,\lambda}(x) e^{-\lambda x^2}\right|,$$

qui est continue et tend vers 0 en $\pm\infty$. Ainsi, cette quantité est bornée. Ceci montre le résultat.

Définition 2 (*Convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*)

Soient $(\varphi_n)_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors, on dit que $\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, si, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\alpha \partial^\beta (\varphi_n - \varphi)(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

C'est la topologie associée à la famille de semi-normes : pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$N_p : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \mapsto \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant p} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\right|\right) \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1 (***Stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par dérivation et multiplication par un monôme***)

Soient $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$. Alors,

$$x \mapsto x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Démonstration : Soient $\gamma, \delta \in \mathbb{N}^d$, alors, on obtient par la formule de Leibnitz,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \ \left| x^\gamma \partial^\delta \left(x \mapsto x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right)(x) \right| = \left| x^\gamma \sum_{|k| \leqslant |\delta|} \binom{\delta}{k} \partial^k (x^\alpha) \partial^{\delta-k} (\partial^\beta \varphi)(x) \right|.$$

$$\left| x^\gamma \partial^\delta \left(x \mapsto x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right)(x) \right| = \left| x^\gamma \sum_{|k| \leqslant \min(|\delta|,|\alpha|)} \binom{\delta}{k} \frac{\alpha!}{(\alpha-k)!} x^{\alpha-k} \partial^{\delta-k+\beta} \varphi(x) \right|.$$

En utilisant le fait que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left| x^\gamma \partial^\delta \left(x \mapsto x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right)(x) \right| \leqslant \sum_{|k| \leqslant \min(|\delta|,|\alpha|)} \binom{\delta}{k} \frac{\alpha!}{(\alpha-k)!} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^{\alpha-k+\gamma} \partial^{\beta-k+\delta} \varphi(x) \right|.$$

Ceci montre que $x \mapsto x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a de plus montré l'inégalité suivante sur les semi-normes : pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$N_p(x \mapsto x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)) \leqslant C N_{p+\max(|\alpha|,|\beta|)}(\varphi).$$

■

Lemme 1 (***Un lemme utile***)

Soit $r \in \mathbb{R}$, avec $r \geqslant 1$, $N \geqslant 1$, et $a_1, \cdots, a_N \in \mathbb{R}^+$, alors,

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i \right)^r \leqslant N^{r-1} \sum_{i=1}^N a_i^r.$$

Démonstration : Il suffit de constater que $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^r$ est convexe. Ainsi, l'inégalité de Jensen appliquée à f donne :

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i \right)^r = N^r \left(\sum_{i=1}^N \frac{a_i}{N} \right)^r = N^r f \left(\sum_{i=1}^N \frac{a_i}{N} \right) \leqslant N^r \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} f(a_i) = N^{r-1} \sum_{i=1}^N a_i^r.$$

■

Corollaire 1

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $r \geqslant 2$, alors, $\|x\|^r \leqslant d^{\frac{r}{2}-1} \sum_{i=1}^d |x_i|^r$.

Démonstration : Par définition, $\|x\|^r = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^2 \right)^{\frac{r}{2}}$. Le lemme précédent conclut immédiatement. ■

Proposition 2 (***Injection***)

On a l'injection suivante : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq \bigcap_{p=1}^{+\infty} L^p(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Il est clair que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On considère $p \in [1, +\infty[$. Alors, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant N_0(\varphi)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{1+\|x\|^{d+1}} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x)(1+\|x\|^{d+1})|.$$

Le corollaire 2 fournit :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \left(\left(1+d^{\frac{d-1}{2}}\right)\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{1+\|x\|^{d+1}}\right) N_0(\varphi)^{p-1} N_{d+1}(\varphi) < +\infty.$$

Ceci conclut. ■

Définition 3 (*Fonction à croissance au plus polynomiale*)

Un fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est dite à croissance au plus polynomiale s'il existe $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ |f(x)| \leqslant C(1+\|x\|^n).$$

Proposition 3

Soient $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que f et toutes ses dérivées sont à croissance au plus polynomiale. Alors, $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$x^\alpha \partial^\beta (f\varphi)(x) = \sum_{|\gamma| \leqslant |\beta|} \binom{\beta}{\gamma} x^\alpha \partial^\gamma f(x) \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x).$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse sur f, on a :

$$\left|x^\alpha \partial^\beta (f\varphi)(x)\right| \leqslant \sum_{|\gamma| \leqslant |\beta|} \binom{\beta}{\gamma} \left|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)\right| C_\gamma (1+\|x\|^{n_\gamma}).$$

En utilisant le corollaire 1, il vient :

$$\left|x^\alpha \partial^\beta (f\varphi)(x)\right| \leqslant \sum_{|\gamma| \leqslant |\beta|} \binom{\beta}{\gamma} C_\gamma \left|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)\right| \left(1 + d^{\frac{n_\gamma}{2}-1}\sum_{i=1}^d |x_i|^{n_\gamma}\right).$$

$$\left|x^\alpha \partial^\beta (f\varphi)(x)\right| \leqslant \sum_{|\gamma| \leqslant |\beta|} \binom{\beta}{\gamma} C_\gamma \left(1+d^{\frac{n_\gamma}{2}-1}\right) \left|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)\right| \left(1 + \sum_{i=1}^d |x_i|^{n_\gamma}\right).$$

Ainsi,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\alpha \partial^\beta (f\varphi)(x)\right| \leqslant \sum_{|\gamma| \leqslant |\beta|} \binom{\beta}{\gamma} C_\gamma \left(1+d^{\frac{n_\gamma}{2}-1}\right) N_{\max\left(|\alpha| + \max\limits_{|\gamma|\leqslant|\beta|} n_\gamma, |\beta|\right)}(\varphi) < +\infty.$$

Ceci conclut. ■

2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 4 (*Transformée de Fourier*)

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on définit la transformée de Fourier de φ, $\mathcal{F}(\varphi)$ par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x.$$

Remarque 1. *Cette fonction est clairement bien définie, puisque $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$,*

$$\left|\varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}\right| \leqslant |\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

au vu de la proposition 2. De plus, dans cette définition $x \cdot \xi$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$.

Proposition 4 (*Lien entre multiplication et dérivabilité*)

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors,

1. *$\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a :*
$$\partial^\alpha(\mathcal{F}(\varphi)) = \mathcal{F}(x \mapsto (-ix)^\alpha \varphi(x)).$$
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a :*
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi)(\xi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(\xi).$$

Démonstration : Pour le premier point, remarquons que : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \varphi(x)e^{-ix\cdot\xi} \in \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, pour tout $\xi, x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\left|\partial_\xi^\alpha(\varphi(x)e^{-ix\cdot\xi})\right| = \left|(-ix)^\alpha \varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}\right| = \left|x^\alpha \varphi(x)\right|.$$

Cette fonction est indépendante de ξ, et intégrable, car dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en vertu de la première proposition. Le théorème de dérivabilité sous le signe intégral permet donc de conclure à la régularité de $\mathcal{F}(\varphi)$, et donne la formule recherchée.
Pour la deuxième partie, il convient de remarquer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha\varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial^{\alpha_1}\left(\partial^{\alpha-\alpha_1 e_1}\varphi\right)(x)e^{-ix_1\xi_1}\mathrm{d}x_1\right) e^{-i\sum\limits_{k\neq 1} x_k\xi_k} \mathrm{d}x_{d-1},$$

grâce au théorème de Fubini-Lebesgue, en notant $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$. On effectue des intégrations par parties sur l'intégrale centrale : les termes de bord sont nuls au vu de la régularité de φ.

$$\int_{\mathbb{R}} \partial^{\alpha_1}\left(\partial^{\alpha-\alpha_1 e_1}\varphi\right)(x)e^{-ix_1\cdot\xi_1}\mathrm{d}x_1 = +(i\xi_1)^{\alpha_1}\int_{\mathbb{R}} \partial^{\alpha-\alpha_1 e_1}\varphi(x)e^{-ix_1\xi_1}\mathrm{d}x_1.$$

On obtient alors :

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha\varphi)(\xi) = (i\xi_1)^{\alpha_1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial^{\alpha_2}\left(\partial^{\alpha-\alpha_1 e_1-\alpha_2 e_2}\varphi\right)(x)e^{-ix_2\xi_2}\mathrm{d}x_2\right) e^{-i\sum\limits_{k\neq 2} x_k\xi_k} \mathrm{d}x_{d-1}.$$

En répétant le principe, il vient directement :

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = (i\xi_1)^{\alpha_1}\cdots(i\xi_d)^{\alpha_d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x = (i\xi)^\alpha\mathcal{F}(\varphi)(\xi).$$

■

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ échange donc dérivation et multiplication. Plus précisément, plus une fonction est régulière (dérivable), plus sa transformée de Fourier décroît rapidement à l'infini. Il a été montré dans le polycopié sur la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$ que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ n'est pas stable par la transformée de Fourier ; c'est donc un mauvais espace pour définir la transformée de Fourier d'une distribution par dualité-transposition. Néanmoins, l'espace de Schwartz semble être un bon candidat. En effet, cette remarque donne de bonnes raisons de penser que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par $\mathcal{F}$. Comme toute fonction de $S(\mathbb{R}^d)$ est régulière, sa transformée de Fourier est à décroissance rapide. De plus, les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sont à décroissance rapide. Ainsi, leur transformée de Fourier est régulière.

Theorème 1 (*Stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par $\mathcal{F}$*)

L'espace de Schwartz est stable par la transformée de Fourier. Plus précisément,

$$\mathcal{F} : \begin{bmatrix} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ \varphi & \mapsto & \mathcal{F}(\varphi) \end{bmatrix}$$

est bien définie et est continue (au sens de la convergence séquentielle) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : On fixe $p \in \mathbb{N}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ vérifiant $|\alpha|, |\beta| \leqslant p$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, en vertu de la proposition précédente :

$$\left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \left(\mathcal{F}(\varphi)\right)(\xi)\right| = \left|\mathcal{F}\left(x \mapsto \partial_x^\alpha (x^\beta \varphi(x))\right)\right|.$$

Ainsi,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \left(\mathcal{F}(\varphi)\right)(\xi)\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left|\partial_x^\alpha (x^\beta \varphi(x))\right| \mathrm{d}x \leqslant \sum_{|\gamma| \leqslant |\alpha|} \binom{\alpha}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\partial_x^\gamma (x^\beta) \partial_x^{\alpha-\gamma} \varphi(x)\right| \mathrm{d}x.$$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \left(\mathcal{F}(\varphi)\right)(\xi)\right| \leqslant \sum_{|\gamma| \leqslant \min(|\alpha|, |\beta|)} \binom{\alpha}{\gamma} \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} \int_{\mathbb{R}^d} \left|x^{\beta-\gamma} \partial_x^{\alpha-\gamma} \varphi(x)\right| \mathrm{d}x.$$

Ainsi,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \left(\mathcal{F}(\varphi)\right)(\xi)\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \|x\|^{d+1}} \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant |\alpha|, \\ |\gamma| \leqslant |\beta|}} \binom{\alpha}{\gamma} \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left|x^{\beta-\gamma} (1 + \|x\|^{d+1}) \partial_x^{\alpha-\gamma} \varphi(x)\right|.$$

On obtient alors, en vertu du corollaire 1,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \left(\mathcal{F}(\varphi)\right)(\xi)\right| \leqslant C(d) \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant |\alpha|, \\ |\gamma| \leqslant |\beta|}} \binom{\alpha}{\gamma} \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left|x^{\beta-\gamma} \left(1 + \sum_{i=1}^d |x_i|^{d+1}\right) \partial_x^{\alpha-\gamma} \varphi(x)\right|.$$

Il vient finalement,

$$N_p(\mathcal{F}(\varphi)) \leqslant C(d) N_{p+d+1}(\varphi).$$

Cette inégalité montre à la fois la stabilité de l'espace de Schwartz par la transformée de Fourier, ainsi que la convergence séquentielle, relativement à la famille de semi-normes considérées. ■

2.2 Inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Theorème 2 (*Isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*)

La transformée de Fourier est un isomorphisme bi continue (au sens de la convergence séquentielle dans l'espace de Schwartz) de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément, on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \ \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi.$$

Démonstration rapide : Il convient de remarquer que ce théorème est contenu dans le théorème d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, démontré dans le polycopié concerné. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il est clair que $\mathcal{F}(\varphi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, par stabilité de la classe de Schwartz. Ainsi, la formule proposée est vraie pp sur $\mathbb{R}^d$ en vertu du théorème d'inversion de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. L'égalité est vraie partout par continuité. Enfin, la continuité de $\mathcal{F}^{-1}$ découle directement de celle de $\mathcal{F}$. ■

Remarque 2. *Il convient de remarquer qu'il n'est pas nécessaire de connaître le théorème d'inversion de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ pour obtenir le résultat souhaité. La preuve s'adapte facilement à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, avec une simplification à la fin. La voici ; elle repose, elle aussi, sur le lemme de calcul du la transformée de Fourier de la gaussienne, que je rappelle sans le redémontrer (voir le polycopié lié à l'étude de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$).*

Lemme 2 (*Transformée de Fourier de la Gaussienne*)

Soit $a > 0$, on définit : $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-a\frac{x^2}{2}}$. Alors, on a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \ \mathcal{F}(f_a)(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}}.$$

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On considère $\varepsilon > 0$ et on définit

$$\mathcal{F}_\varepsilon : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon\frac{\|\xi\|^2}{2}} \mathrm{d}\xi.$$

Le fait d'introduire un poids exponentiel permet de légitimer les inversions des intégrales (il faut rendre l'intégrande intégrable par rapport à la mesure produit). On effectue donc les calculs avec ce poids, et le but est de le faire disparaître à la fin, en passant à la limite $\varepsilon \to 0^+$.

Premièrement, par stabilité, $\mathcal{F}(\varphi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, cette fonction est bien définie. De plus,

- $\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}(\varphi)(\xi) e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon\frac{\|\xi\|^2}{2}} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) e^{ix\cdot\xi}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\left| \mathcal{F}(\varphi)(\xi) e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon\frac{\|\xi\|^2}{2}} \right| \leqslant |\mathcal{F}(\varphi)(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Par théorème de convergence dominée, on obtient donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi.$$

On injecte maintenant la formule qui définie $\mathcal{F}(\varphi)$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z) e^{-iz\cdot\xi} \mathrm{d}z \right) e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon\frac{\|\xi\|^2}{2}} \mathrm{d}\xi.$$

Par le théorème de Fubini-Lebesgue (légitimé par la présence du poids),

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon\frac{\|\xi\|^2}{2}} e^{-i(z-x)\cdot\xi} \mathrm{d}\xi \right) \varphi(z) \mathrm{d}z$$

Alors, en reprenant les notations introduites dans le lemme 2,

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\prod_{j=1}^d \mathcal{F}(f_\varepsilon)(z_j - x_j) \right) \varphi(z) \mathrm{d}z.$$

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|x-z\|^2}{2\varepsilon}} \varphi(z) \mathrm{d}z = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|u\|^2}{2}} \varphi(x + u\sqrt{\varepsilon}) \mathrm{d}u.$$

Alors, on obtient par théorème de convergence dominée

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|u\|^2}{2}} \mathrm{d}u \cdot \varphi(x) = \varphi(x)$$

Par unicité de la limite, on conclut à l'égalité recherchée. ■

Corollaire 2

Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors, on a :

$$(\varphi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\mathcal{F}(\varphi), \mathcal{F}(\psi) \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

En particulier, la transformée de Fourier est un isomorphisme quasi-isométrique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \|\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration : On sait que, pour tout $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$(\varphi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \overline{\psi(x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi)(z) e^{ix\cdot z} \mathrm{d}z \right) \overline{\psi(x)} \mathrm{d}x,$$

par le théorème d'inversion de Fourier. On obtient, par le théorème de Fubini-Lebesgue,

$$(\varphi,\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}(\varphi)(z)\left(\int_{\mathbb{R}^d}\overline{\psi(x)}e^{ix\cdot z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}(\varphi)(z)\left(\overline{\int_{\mathbb{R}^d}\psi(x)e^{-ix\cdot z}\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}z,$$

Ainsi, par définition de la transformée de Fourier,

$$(\varphi,\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}(\varphi)(z)\mathcal{F}(\psi)(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\mathcal{F}(\varphi),\mathcal{F}(\psi)\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

■

Remarque 3. *En montrant que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on peut utiliser la densité de la classe de Schwartz dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour prolonger la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ à partir de ce corrolaire. On utilise pour cela le théorème de prolongement des applications uniformément continues.*

3 Distributions tempérées

3.1 Définitions et premiers exemples

Définition 5 (*Distributions tempérées*)

On appelle distribution tempérée toute forme linéaire T, sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ vérifiant :

$$\exists C>0, \exists p\in\mathbb{N},\ \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \left|(T,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant CN_p(\varphi).$$

On note $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 5 (*Cas des fonctions $L^p(\mathbb{R}^d)$*)

Toute fonction $L^p(\mathbb{R}^d)$ définit une distribution tempérée, quelque soit $p\in[1,+\infty]$. Plus précisément, pour tout $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$,

$$T_f : \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\mapsto\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

définit une distribution tempérée.

Démonstration : Cette application est bien définie. En effet, pour tout $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, par l'inégalité de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)\varphi(x)|\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} < +\infty.$$

De plus, c'est bien une distribution tempérée : pour tout $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left|(T_f,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Ceci conclut si $q=+\infty$, car on a $\left|(T_f,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}N_0(\varphi)$. Si $q<\infty$, alors :

$$\left|(T_f,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|^q\mathrm{d}x \leqslant \|\varphi\|^{q-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\mathrm{d}x}{1+\|x\|^{d+1}}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left((1+\|x\|^{d+1})|\varphi(x)|\right) \leqslant CN_0(\varphi)^{q-1}N_{d+1}(\varphi).$$

Alors,

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant CN_0(\varphi)^{1-\frac{1}{q}}N_{d+1}(\varphi)^{\frac{1}{q}} \leqslant CN_{d+1}(\varphi)^{1-\frac{1}{q}}N_{d+1}(\varphi)^{\frac{1}{q}} = CN_{d+1}(\varphi).$$

Pour conclure,

$$\left|(T_f,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}N_{d+1}(\varphi).$$

Ceci montre que T_f définit une distribution tempérée. ■

Exemple 4. *L'application $f : x \mapsto \cos(e^x)$ définit une distribution tempérée, car elle est bornée sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 6 (*Cas des fonctions à croissance au plus polynomiale*)

Toute fonction à croissance au plus polynomiale définit une distribution tempérée. Plus précisément, pour toute fonction f à croissance au plus polynomiale,

$$T_f : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

définit une distribution tempérée.

Démonstration : Cette application est bien définie. En effet, il existe $C > 0$, et $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $|f(x)| \leqslant C(1 + \|x\|^n)$. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)\varphi(x)|\mathrm{d}x \leqslant \left(C \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \|x\|^{d+1}}\right) \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|^n)(1 + \|x\|^{d+1})|\varphi(x)| < +\infty.$$

De plus, c'est bien une distribution tempérée : pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left|(T_f, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant \left(C \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \|x\|^{d+1}}\right) N_{n+d+1}(\varphi).$$

■

Proposition 7 (*Inclusion*)

Toute distribution tempérée est une distribution (d'ordre fini), i.e. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors, il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left|(T, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant CN_p(\varphi).$$

Ainsi, pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, il existe $R > 1$ tel que $K \subseteq [-R, R]^d$, et pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ supportée dans K,

$$\left|(T, \varphi)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant C \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant p,\\ |\beta|\leqslant p}} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)\right| = C \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant p,\\ |\beta|\leqslant p}} \sup_{x\in K} \left|x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)\right| \leqslant \tilde{C}R^p \sum_{|\beta|\leqslant p} \left\|\partial^\beta \varphi\right\|_{\infty,K}.$$

Ceci montre que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est une distribution d'ordre fini, au plus p. ■

Exemple 5 (Peigne de Dirac modifié). *On considère $T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_k$, où $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Alors, c'est une distribution. On suppose qu'il existe $p > 0$, $C > 0$, tel que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,*

$$|a_k| \leqslant C(1 + |k|^p).$$

Alors, sous cette hypothèse, la distribution est tempérée. Cette quantité est déjà bien définie : en effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k||\varphi(k)| \leqslant \left(C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 + |k|^2}\right) \sup_{x\in\mathbb{R}} \left((1 + |x|^2)(1 + |x|^p)|\varphi(x)|\right) < +\infty.$$

C'est de plus une distribution tempérée : pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\left|(T, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}\right| \leqslant \left(C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 + |k|^2}\right) \sup_{x\in\mathbb{R}} \left((1 + |x|^2)(1 + |x|^p)|\varphi(x)|\right) \leqslant \tilde{C}N_{2+p}(\varphi).$$

Exemple 6 (Valeur principale)**.** *On rappelle que la valeur principale est définie par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \left(vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right)_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|\geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

C'est une distribution. Montrons qu'elle est tempérée. Remarquons que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*,*

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(xt)\mathrm{d}t = \varphi(0) + xr_0[\varphi](x),$$

où $r_0[\varphi] \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *et* $\|r_0[\varphi]\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \|\varphi'\|_{\infty,\mathbb{R}}$*. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$*,*

$$\int_{|x|\geqslant \varepsilon} \frac{|\varphi(x)|}{|x|}\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\mathrm{d}x}{|x|(1+x^2)}\right)\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|\varphi(x)| < \infty.$$

Ainsi, cette intégrale a bien un sens. De plus, la limite quand $\varepsilon \to 0^+$ *existe. En effet, par imparité de* $x \mapsto \frac{\varphi(0)}{x}$*, on a, pour tout* $\varepsilon > 0$*,*

$$\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} r_0[\varphi](x)\mathrm{d}x \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \int_{-1}^1 r_0[\varphi](x)\mathrm{d}x,$$

par théorème de convergence dominée. Montrons que cette distribution est bien tempérée : soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $0 < \varepsilon < 1$*,*

$$\left|\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\|\varphi'\|_{\infty,\mathbb{R}} + \frac{\pi}{4}N_2(\varphi).$$

Alors,

$$\left|\left(vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}\right| \leqslant 3N_2(\varphi).$$

Exemple 7. *La fonction* $f \equiv \exp$ *est* $L^1_{loc}(\mathbb{R})$*, donc elle définit une distribution, montrons qu'elle n'est pas tempérée. On raisonne par l'absurde et on suppose que c'est le cas : il existe* $C > 0$*, et* $p \in \mathbb{N}$*, tel que, pour tout* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*,*

$$\left|(T_f, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}\right| \leqslant CN_p(\varphi).$$

On considère $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *telle que* $0 \leqslant \theta \leqslant 1$*, Supp*$(\theta) \subseteq (-2,2)$*, et* $\theta \equiv 1$ *sur* $[-1,1]$*. Pour* $n \geqslant 1$*, on définit* $\theta_n = \theta\left(\frac{\cdot}{n}\right)$*. Alors, pour tout* $n \geqslant 1$*,*

$$(T_f, \theta_n)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} = \int_{-2n}^{2n} \theta_n(x)e^x\mathrm{d}x \geqslant \int_{-n}^{n} e^x\mathrm{d}x \geqslant e^n - 1.$$

De plus,

$$N_p(\theta_n) = \sum_{k,l\leqslant p}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^k\theta_n^{(l)}(x)\right| = \sum_{k,l\leqslant p}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x^k}{n^l}\theta^{(l)}\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k,l\leqslant p} n^{k-l}\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|y^k\theta^{(l)}(y)\right| \leqslant Cn^p.$$

Alors, on obtient pour $n \geqslant 1$*,*

$$e^n - 1 \leqslant Cn^p.$$

C'est impossible.

Proposition 8 (*Caractérisation séquentielle de la continuité*)

Une forme linéaire T *sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *est une distribution tempérée ssi elle est séquentiellement continue (pour la notation de convergence définie dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*).*

Démonstration : On suppose que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est une distribution tempérée. Montrons qu'elle est séquentiellement continue. On considère $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}{\longrightarrow}} \varphi$. Alors, puisque T est tempérée, on sait qu'il existe $C > 0$, et $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left|(T, f)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant CN_p(f).$$

Alors, par linéarité,

$$\left|(T, \varphi_n)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} - (T, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| = \left|(T, \varphi_n - \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant CN_p(\varphi_n - \varphi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci montre le résultat. Réciproquement, on raisonne par l'absurde en supposant que T est séquentiellement continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, mais n'est pas une distribution tempérée. Ainsi, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi_{n,k} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, telle que

$$\left|(T, \varphi_{n,k})_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| > kN_n(\varphi_{n,k}).$$

On pose alors $\psi_n = \dfrac{\varphi_{n,n}}{(T, \varphi_{n,n})_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}}$. Alors, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geqslant p$,

$$N_p(\psi_n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p(\psi_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors, $\psi_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}{\longrightarrow}} 0$. Par continuité séquentielle de T, et par linéarité de T,

$$1 = (T, \psi_n)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (T, 0)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

C'est impossible. ■

3.2 Propriétés

Proposition 9 (*Dérivation des distributions tempérées*)

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, un multi-indice. Alors, $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Par définition d'une distribution tempérée, il existe $C > 0$, et $p \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left|(T, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant CN_p(\varphi).$$

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left|(\partial^\alpha T, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| = \left|(T, \partial^\alpha \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant CN_p(\partial^\alpha \varphi) \leqslant CN_{p+|\alpha|}(\varphi).$$

■

Exemple 8. *L'application $x \mapsto e^x e^{ie^x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. En effet, son module vaut e^x, qui n'est pas une distribution tempérée, comme le montre l'exemple 7. Néanmoins, on peut interpréter cette fonction comme la dérivée de $x \mapsto -ie^{ie^x}$. Cette fonction est de module 1, donc dans $L^\infty(\mathbb{R})$. La proposition 5 montre que c'est une distribution tempérée. Ainsi, par la dernière proposition, c'est le cas pour sa dérivée. Ceci conclut. Intuitivement, la croissance forte de l'application est annihilée par les oscillations rapides.*

Proposition 10 (*Stabilité par multiplication par une fonction*)

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, dont la fonction et toutes ses dérivées sont à croissance au plus polynomiale. Alors, $fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Par hypothèse, il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left|(T, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant CN_p(\varphi).$$

Alors,

$$\left|(fT,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant CN_p(f\varphi).$$

Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$, avec $|\alpha|,|\beta| \leqslant p$, soit $x \in \mathbb{R}^d$, on obtient par la formule de Leibnitz,

$$\left|x^\alpha \partial^\beta (f\varphi)(x)\right| = \left|x^\alpha \sum_{|\gamma|\leqslant|\beta|} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma f(x) \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)\right| \leqslant \sum_{|\gamma|\leqslant|\beta|} \binom{\beta}{\gamma} C^\gamma (1+\|x\|^{n_\gamma}) \left|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)\right|.$$

Ainsi,

$$\left|x^\alpha \partial^\beta (f\varphi)(x)\right| \leqslant C \sum_{|\gamma|\leqslant|\beta|} \binom{\beta}{\gamma} C^\gamma \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)\left(1+\sum_{i=1}^d |x_i|^{n_\gamma}\right)\right|.$$

On obtient enfin,

$$\left|(fT,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant CN_{p+\max\limits_{|\gamma|\leqslant p} n_\gamma}(\varphi).$$

Ceci montre que la distribution est tempérée. ■

Définition 6 (*Convergence*)

Soient $(T_n)_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On dit que la suite $(T_n)_n$ converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, si, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$(T_n,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (T,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}.$$

Proposition 11

Soient $(T_n)_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $(T_n)_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors,

1. *pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,*
$$\partial^\alpha T_n \overset{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} \partial^\alpha T.$$
2. *pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que f et toutes ses dérivées sont à croissance au plus polynomiale, alors,*
$$fT_n \overset{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} fT.$$

Démonstration : Pour le premier point, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$(\partial^\alpha T_n,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} - (\partial^\alpha T,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (-1)^{|\alpha|}\left((T_n,\partial^\alpha\varphi)_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} - (T,\partial^\alpha\varphi)_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

puisque $\partial^\alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, par la proposition 1. On montre le deuxième point de la même façon : pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$(fT_n,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} - (fT,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (T_n,f\varphi)_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} - (T,f\varphi)_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

puisque $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, par la proposition 3. ■

3.3 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Définition 7 (*Transformée de Fourier*)

Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on définit $\mathcal{F}(T)$ par :

$$\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ (\mathcal{F}(T),\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (T,\mathcal{F}(\varphi))_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}.$$

Alors, $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Premièrement, on sait qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, et $C > 0$, tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left|(T, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant CN_p(\varphi).$$

De plus, il a été montré au théorème 1 que la transformée de Fourier est un endomorphisme continu de l'espace de Schwartz. Plus précisément, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$N_p(\mathcal{F}(\varphi)) \leqslant CN_{p+d+1}(\varphi).$$

Ainsi, en combinant les informations, il vient :

$$\left|(\mathcal{F}(T), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| = \left|(T, \mathcal{F}(\varphi))_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant CN_p(\mathcal{F}(\varphi)) \leqslant CN_{p+d+1}(\varphi).$$

Ceci conclut. ■

Exemple 9. *Calculons la transformée de Fourier de δ_a, pour $a \in \mathbb{R}^d$. C'est clairement une distribution tempérée. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\left|(\delta_a, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| = |\varphi(a)| \leqslant \|\varphi\|_{\infty,\mathbb{R}^d} = N_0(\varphi).$$

Calculons sa transformée de Fourier : pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$(\mathcal{F}(\delta_a), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (\delta_a, \mathcal{F}(\varphi))_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)e^{-ia\cdot x}\mathrm{d}x = (x \mapsto e^{-ix\cdot a}, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)},$$

où $x \mapsto e^{-ix\cdot a} \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Ainsi,

$$\mathcal{F}(\delta_a) \underset{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}{=} x \mapsto e^{-ia\cdot x}.$$

Exemple 10. *Calculons la transformée de Fourier de $\partial_x^\alpha \delta_a$, pour $a \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. C'est une distribution tempérée. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\left|(\partial_x^\alpha \delta_a, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\right| = \left|(-1)^{|\alpha|}\partial_x^\alpha \varphi(a)\right| \leqslant \|\partial_x^\alpha \varphi\|_{\infty,\mathbb{R}^d} \leqslant N_{|\alpha|}(\varphi).$$

Calculons sa transformée de Fourier : pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$(\mathcal{F}(\partial_x^\alpha \delta_a), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (\partial_x^\alpha \delta_a, \mathcal{F}(\varphi))_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (-1)^{|\alpha|}(\delta_a, \partial_x^\alpha \mathcal{F}(\varphi))_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}.$$

Par la proposition 4, on obtient :

$$(\mathcal{F}(\partial_x^\alpha \delta_a), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (-1)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x \mapsto (-ix)^\alpha \varphi(x))(a) = i^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha \varphi(x)e^{-ix\cdot a}\mathrm{d}x$$

Ainsi,

$$(\mathcal{F}(\partial_x^\alpha \delta_a), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (x \mapsto i^{|\alpha|}x^\alpha e^{-ix\cdot a}, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)},$$

où $x \mapsto i^{|\alpha|}x^\alpha e^{-ix\cdot a} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, car elle est à croissance au plus polynomiale. Ainsi,

$$\mathcal{F}(\partial_x^\alpha \delta_a) \underset{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}{=} x \mapsto i^{|\alpha|}x^\alpha e^{-ia\cdot x}.$$

Exemple 11. *Calculons la transformée de Fourier de 1. C'est une distribution tempérée, car elle est bornée. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,*

$$(\mathcal{F}(1), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (1, \mathcal{F}(\varphi))_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\varphi)(x)\mathrm{d}x.$$

Par inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{ix\cdot\xi}\mathrm{d}\xi.$$

Alors,

$$(\mathcal{F}(1), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^d \varphi(0) = ((2\pi)^d \delta_0, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}.$$

Alors,

$$\mathcal{F}(1) \underset{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}{=} (2\pi)^d \delta_0.$$

Exemple 12. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors, f définit une distribution tempérée, $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, et on a alors : $\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}(f)}$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,*

$$(\mathcal{F}(T_f), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (T_f, \mathcal{F}(\varphi))_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}(\varphi)(x)\mathrm{d}x.$$

Par le théorème de Fubini-Lebesgue,

$$(\mathcal{F}(T_f), \varphi)_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-iz\cdot x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z)\mathcal{F}(f)(z)\mathrm{d}z = (T_{\mathcal{F}(f)}, \varphi)_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}.$$

Proposition 12 (*Dérivation et multiplication par un monôme*)

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors,

1. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,*
$$\partial^\alpha \left(\mathcal{F}(T)\right) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha T).$$
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,*
$$\mathcal{F}\left(\partial^\alpha T\right) = \xi \mapsto (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(T)(\xi).$$

Remarque 4. *Cette propriété est l'alter-égo de la propriété 4, pour les distributions.*

Démonstration : Pour le premier point, remarquons que $x^\alpha T$ est bien une distribution tempérée (car c'est le produit d'une distribution tempérée et d'une fonction à croissance au plus polynomiale). Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$(\partial^\alpha \mathcal{F}(T), \varphi)_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = (-1)^{|\alpha|}(T, \mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi))_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = (-1)^{|\alpha|}(T, \xi \mapsto (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(\xi))_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}.$$

Alors, il vient

$$(\partial^\alpha \mathcal{F}(T), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = ((-ix)^\alpha T, \mathcal{F}(\varphi))_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (\mathcal{F}((-ix)^\alpha T), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}.$$

Le deuxième point se démontre exactement de la même manière. ■

Exemple 13. *Calculons la transformée de Fourier de la valeur principale, notée T. On a déjà vu qu'elle était tempérée (exemple 6). On a la relation $xT = 1$. En passant à la transformée de Fourier, il vient grâce à la proposition 12 et l'exemple 11 que :*

$$i\mathcal{F}(T)' = 2\pi\delta_0, \text{ i.e. } \mathcal{F}(T)' = -2i\pi\delta_0 = (-2i\pi H)',$$

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathcal{F}(T) = -2i\pi H + C.$$

On souhaite déterminer C : remarquons que la valeur principale est une distribution impaire, c'est-à-dire que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{F}(T), \check{\varphi})_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} = -\left(\mathcal{F}(T), \varphi\right)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})},$$

où $\check{\varphi} = \varphi(-\cdot)$. En effet,

$$(\mathcal{F}(T), \check{\varphi})_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} = (T, \mathcal{F}(\check{\varphi}))_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})},$$

Or, les opérateurs $\mathcal{F}$ et $\check{}$ commutent sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(\check{\varphi})(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(-\xi) e^{-ix\xi} \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) e^{-i(-x)\xi} \mathrm{d}\xi = \mathcal{F}(\varphi)(-x) = \check{\mathcal{F}}(\varphi)(x).$$

Alors,

$$(\mathcal{F}(T), \check{\varphi})_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} = \left(T, \check{\mathcal{F}}(\varphi)\right)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\check{\mathcal{F}}(\varphi)(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Avec un changement de variables, on a :

$$(\mathcal{F}(T), \check{\varphi})_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|\geqslant \varepsilon} \frac{\mathcal{F}(\varphi)(x)}{x} \mathrm{d}x = -\left(T, \mathcal{F}(\varphi)\right)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*, telle que* $Supp(\varphi) \subseteq \mathbb{R}^+$*, et* $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$*. Alors,*

$$C = (-2i\pi H + C, \check{\varphi})_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} = (\mathcal{F}(T), \check{\varphi})_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} = -\left(\mathcal{F}(T), \varphi\right)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} = +2i\pi - C,$$

Ceci donne donc $C = i\pi$*. Ainsi,*

$$\mathcal{F}\left(vp\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{\mathcal{S}'(\mathbb{R})}{=} i\pi - 2i\pi H = -i\pi sgn.$$

Exemple 14. *Calculons la transformée de Fourier de la distribution tempérée (car à croissance au plus polynomiale)* x^α*, où* $\alpha \in \mathbb{N}^d$*. On sait que, par la proposition* 12*,*

$$\mathcal{F}(x^\alpha) = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \mathcal{F}(1).$$

De plus, par l'exemple 11*, on obtient directement :*

$$\mathcal{F}(x^\alpha) \underset{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}{=} (2\pi)^d i^{|\alpha|}\delta_0^\alpha.$$

Exemple 15. *Calculons la transformée de Fourier de la distribution tempérée (car bornée sur* $\mathbb{R}$*)* $\frac{x^2}{1+x^2}$*. On sait que, par la proposition* 12*,*

$$\mathcal{F}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = -\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)''.$$

De plus, par l'exemple 12*, on obtient directement (résultat connu, voir mes notes de cours sur la transformée de Fourier dans* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *et* $L^2(\mathbb{R}^d)$*)*

$$\mathcal{F}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = -\pi\left(e^{-|x|}\right)'' = +\pi\left(sgn(x)e^{-|x|}\right)'.$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \underset{\mathcal{S}'(\mathbb{R})}{=} \pi e^{-|x|}\left(2\delta_0 - 1\right).$$

Proposition 13

Soit $(T_n)_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *et* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *telle que* $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*. Alors,*

$$\mathcal{F}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}(T) \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors :

$$(\mathcal{F}(T_n), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} - (\mathcal{F}(T), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (T_n, \mathcal{F}(\varphi))_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} - (T, \mathcal{F}(\varphi))_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par continuité de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. ■

Theorème 3 (*Inversion de Fourier dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$)

La transformée de Fourier est un isomorphisme bi-continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*. De plus, pour tout* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*,*

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(T)) = (2\pi)^d \check{T},$$

où $\check{T} : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \mapsto (T, \check{\varphi} := \varphi(-\cdot))_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$.

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors :

$$(\mathcal{F}(\mathcal{F}(T)), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (\mathcal{F}(T), \mathcal{F}(\varphi))_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (T, \mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi)))_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}.$$

Par théorème 2 (d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$),

$$(\mathcal{F}(\mathcal{F}(T)), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = (T, (2\pi)^d \check{\varphi})_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = ((2\pi)^d \check{T}, \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}.$$

Ceci montre le résultat. ■

Exemple 16. *Calculons la transformée de Fourier de la distribution de Heaviside : On a montré en exemple* 13 *que :*

$$\mathcal{F}\left(vp\left(\frac{1}{x}\right)\right) = i\pi - 2i\pi H.$$

Ainsi, en utilisant l'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*,*

$$2\pi \check{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathcal{F}(i\pi - 2i\pi H) = i\pi\mathcal{F}(1) - 2i\pi\mathcal{F}(H).$$

Puisque la distribution valeur principale est impaire (exemple 13*), il vient, grâce à l'exemple* 11

$$-2\pi vp\left(\frac{1}{x}\right) = i\pi \cdot 2\pi\delta_0 - 2i\pi\mathcal{F}(H).$$

Alors,

$$\mathcal{F}(H) \underset{\mathcal{S}'(\mathbb{R})}{=} \pi\delta_0 - ivp\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exemple 17. *Déterminons la transformée de Fourier de* $x^k e^{ix}$*, où* $k \in \mathbb{N}$*. On a :*

$$\mathcal{F}(x^k e^{ix}) = i^k \mathcal{F}(e^{ix})^{(k)}.$$

On a vu à l'exemple 9 *que* $\mathcal{F}(\delta_{-1}) = e^{ix}$*. Par inversion de Fourier, il vient :*

$$\mathcal{F}(e^{ix}) = 2\pi\check{\delta_{-1}} = 2\pi\delta_1.$$

Ainsi on obtient le résultat :

$$\mathcal{F}(x^k e^{ix}) \underset{\mathcal{S}'(\mathbb{R})}{=} 2\pi i^k \delta_1^{(k)}.$$

Lemme 3 (*Formule sommatoire de Poisson*)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ *telle que :*

1. *Il existe* $M > 0$, $\alpha > 1$ *tel que, pour tout* x *réel,*

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}.$$

2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}(f)(n)| < +\infty.$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$*,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)e^{inx}.$$

Démonstration : On considère $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)$. Montrons que φ est bien définie, et est continue : soit $K > 0$. Pour tout $x \in [-K, K]$,

$$|f(x+2\pi n)| \leqslant \frac{M}{(1+|x+2\pi n|)^\alpha}.$$

Or, pour $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geqslant K$, il vient :

$$|x + 2\pi n| \geqslant |2\pi|n| - |x|| \geqslant 2\pi|n| - K.$$

Alors, pour tout $|n| \geqslant K$,

$$\|x \mapsto f(x + 2\pi n)\|_{\infty,[-K,K]} \leqslant \frac{M}{(1 + |2\pi n - K|)^{\alpha}}.$$

Alors, la série est normalement convergente sur $[-K, K]$ (série de Riemann, $\alpha > 1$). La fonction φ ainsi définie est donc continue comme limite uniforme de telles fonctions. Ceci valant pour tout $K > 0$, φ est donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est clairement $2\pi-$périodique. Calculons ses coefficients de Fourier : pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} f(t + 2n\pi)e^{-ikt}\mathrm{d}t,$$

où l'interversion est légitimée par convergence uniforme de la série de fonctions. Alors, par un changement de variables, et par $2\pi-$périodicité,

$$c_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(f)(k).$$

La deuxième hypothèse assure que la série de Fourier de φ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par continuité, c'est nécessairement vers φ. Par suite, pour tout réel x,

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(f)(n)e^{inx}.$$

Ceci conclut. ■

Exemple 18. *Calculons la transformée de Fourier du Peigne du Dirac. On a montré en exemple 5 que c'était une distribution tempérée. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\left(\mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k\right), \varphi\right)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(\varphi)(k).$$

On utilise le lemme précédent, en remarquant qu'une fonction de la classe de Schwartz vérifie clairement les hypothèses, et en évaluant la conclusion en 0, il vient :

$$\left(\mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k\right), \varphi\right)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(2\pi k) = \left(2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi k}, \varphi\right)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k\right) \underset{\mathcal{S}'(\mathbb{R})}{=} 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi k}.$$