Centre de Mathématiques

Année universitaire 2022/23
3ème année **Outils d'analyse pour l'ingénieur**
Liste d'exercices 1

Intégration

Exercice 1 Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur $\mathbb{R}$? Leurs carrés sont-ils intégrables ?

$$f_1(x) = e^{-x^2} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0,+\infty[, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \qquad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

1. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt$ existe. *[Intégrer par parties.]*
2. En déduire que $f \notin L^1([1,+\infty[)$.
   [Considérer la fonction $x \mapsto f(x)\sin(x)$ et utiliser 1.]
3. Démontrer que $f \in L^2([1,+\infty[)$.

Exercice 3 Étudier la limite, quand $n \to +\infty$, des intégrales suivantes

$$\int_0^1 n^2 x e^{-nx} dx, \qquad \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{x^2+2+\cos(x)}}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n+e^x} dx, \qquad \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx, \ \alpha > 1.$$

[INDICATIONS. 1: Intégrer par parties. 2: Appliquer Beppo-Levi. 3: Appliquer la convergence dominée. Pour 4, on pourra utiliser l'inégalité $\forall u \geq 0$, $\ln(1+u) \leq u$.]

Exercice 4 On veut calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx$.

1. En utilisant les théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe intégral, démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. Démontrer que
$$F'(t) = -2Ie^{-t^2} \quad \text{pour tout } t \in]0,+\infty[.$$
2. En intégrant l'égalité précédente, démontrer que
$$F(T) - F(t) = -2I \int_t^T e^{-x^2} dx \quad \text{pour tous } 0 \leq t < T.$$
3. Démontrer que $F(t) = 2I \displaystyle\int_t^{+\infty} e^{-x^2} dx$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 5

1. Démontrer que si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f*g(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \int_{\mathbb{R}} |g(x)|dx$.
2. Démontrer que si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f*g(x)| \leq \sqrt{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}\sqrt{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt}$.

Transformation de Fourier

On rappelle la liste des **transformées de Fourier usuelles.** Dans ce qui suit, $\mathbf{1}_{[\alpha,\beta]}(x)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ (qui vaut 1 si $x \in [\alpha, \beta]$ et 0 sinon), $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ est le sinus cardinal, H est la fonction d'Heaviside (qui vaut 1 si $x \geq 0$ et 0 sinon) et $\operatorname{sgn}(x)$ est la fonction signe (qui vaut -1 si $x < 0$ et 1 si $x > 0$).

Le nombre a est un complexe tel que $\operatorname{Re}(a) > 0$, k est un entier positif et ω un réel tel que $\omega > 0$.

Fonction $f : x \mapsto f(x)$	Transformée de Fourier $\hat{f} : \xi \mapsto \hat{f}(\xi)$
$\mathbf{1}_{[\alpha,\beta]}(x)$	$(\beta-\alpha)\, e^{-i(\alpha+\beta)\pi\xi} \operatorname{sinc}((\beta-\alpha)\pi\xi)$
$H(x)e^{-ax}$	$\dfrac{1}{a+2i\pi\xi}$
$H(-x)e^{ax}$	$\dfrac{-1}{-a+2i\pi\xi}$
$e^{-a\|x\|}$	$\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}$
$\operatorname{sgn}(x)e^{-a\|x\|}$	$\dfrac{-4i\pi\xi}{a^2+4\pi^2\xi^2}$
$H(x)\dfrac{x^k}{k!}e^{-ax}$	$\dfrac{1}{(a+2i\pi\xi)^{k+1}}$
$H(-x)\dfrac{x^k}{k!}e^{ax}$	$\dfrac{-1}{(-a+2i\pi\xi)^{k+1}}$
$\dfrac{1}{a+2i\pi x}$	$H(-\xi)e^{a\xi}$
$\dfrac{1}{a-2i\pi x}$	$H(\xi)e^{-a\xi}$
$e^{-\omega x^2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{\omega}}e^{-\frac{\pi^2}{\omega}\xi^2}$
$\operatorname{sinc}(x)$	$\pi\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}(\xi)$

Exercice 6 Recalculer les transformées de Fourier de la colonne de droite du tableau en précisant à chaque fois s'il s'agit d'une transformée dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.
[INDICATIONS (le numéro désigne la ligne du tableau). 1,2: calcul direct. 3,4,5: se déduit de 2 avec des propriétés du cours. 6,7: calcul avec des propriétés du cours. 8,9: par inversion. 10: utiliser une équation différentielle, cf. cours. 11: par inversion.]

Exercice 7 Soit $a > 0$ et $f_a(t) = \dfrac{\pi}{a}\mathbf{1}_{\left[\frac{-a}{2\pi},\frac{a}{2\pi}\right]}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de f_a (à l'aide du tableau).

2. Calculer la transformée de Fourier du produit de convolution $f_a * f_a$.

3. En déduire la transformée de Fourier de la fonction $h(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ ainsi que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx$.

Exercice 8 Calculer la valeur de l' intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\, dx,\ \omega > 0$.
[INDICATION: on pourra utiliser la 4ème ligne du tableau.]

Exercice 9 Résolution d'équations différentielles avec la transformée de Fourier.
La transformation de Fourier permet de résoudre des équations différentielles suivant le principe suivant :

$$\text{équation différentielle} \overset{\mathcal{F}}{\to} \text{équation plus simple} \to \text{solution} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\to} \text{solution équation différentielle}$$

En particulier, lorsque l'équation différentielle est une EDO linéaire à coefficients constants d'inconnue f, on est ramené à résoudre une équation algébrique pour trouver $\hat{f}$ qui s'exprimera alors comme un produit dans l'espace de Fourier. Ainsi, la solution f s'écrira comme un produit de convolution.

1. Utiliser la méthode ci-dessus pour résoudre l'EDO $-f''(t) + f(t) = e^{-t^2}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Retrouver le résultat précédent en résolvant l'EDO avec la méthode de variations des constantes.

INSA Institut National des Sciences Appliquées Rennes

Centre de Mathématiques

Année universitaire 2022/23
3ème année **Outils d'analyse pour l'ingénieur**
Liste d'exercices 3

Analyse complexe

Exercice 10 On note log le logarithme complexe principal défini dans le demi-plan fendu $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ avec des arguments à valeurs dans $]-\pi,\pi[$. Soit $z = \dfrac{-1-i}{\sqrt{3}+i}$. Déterminer module et argument de z. Calculer z^3, $\mathrm{Log}\,(z)$, $z^{1/2}$ et $z^{2/3}$.

Exercice 11 Les fonctions ci-dessous sont-elles holomorphes sur $\mathbb{C}$ (ou une partie de $\mathbb{C}$)?

$$f_1(z) = z^2 \qquad f_2(z) = \mathcal{R}e\,(z) \qquad f_3(z) = \bar{z} \qquad f_4(z) = \frac{1}{z^2+z+1}.$$

Exercice 12 Déterminer les rayons de convergence des séries suivantes et calculer la somme pour les 2 premières.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)z^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n2^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n^2} z^n.$$

Exercice 13 Développer en série entière les fonctions suivantes et indiquer les domaines de convergence des séries obtenues.

$$f_1(z) = \frac{z^2}{1+z} \text{ en } z=0 \text{ et en } z=i, \quad f_2(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ en } z=0, \quad f_3(z) = \frac{1}{z^2-3z+2} \text{ en } z=0.$$

Exercice 14 Calculer $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dans les cas suivants.

1. $\omega = \mathcal{I}m(z)dz$ et γ est le demi-cercle trigonométrique supérieur.
2. $\omega = \bar{z}^m dz$ et γ est le cercle trigonométrique, $m \in \mathbb{Z}$.
3. $\omega = \mathcal{R}e(z)dz$ et γ est le triangle $[-i, 1-i, 1+i, -i]$.

Exercice 15 Étudier les singularités des fonctions suivantes et calculer les résidus correspondants.

$$f_1(z) = \frac{z}{z^2+2z-3} \qquad f_2(z) = \frac{\exp(i\pi z)}{(z+2)^3} \qquad f_3(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Exercice 16 Calculer les intégrales suivantes ($C^+(0,R)$ désigne le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru dans le sens trigonométrique).

$$I_1 = \int_{C^+(0,R)} \frac{\cos z}{z(z-1)} dz \text{ pour } R > 0 \qquad I_2 = \int_{C^+(0,3)} \frac{\exp(2z)}{(z+1)^4} dz$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\sin\theta} \qquad I_4 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta+\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta$$

$$I_5 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \qquad I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2+1} dx, \;\; \omega > 0.$$

Solutions : $I_1 = -2i\pi$ *pour* $0<R<1$; I_1 *non défini pour* $R=1$; $I_1 = 2i\pi(\cos(1)-1)$ *pour* $R>1$.
$I_2 = (8i\pi)/(3e^2)$. $\quad I_3 = 2\pi/\sqrt{3}$. $\quad I_4 = -\pi/3$. $\quad I_5 = \pi/2$. $\quad I_6 = \pi e^{-\omega}/2$.