Méthodologie : étude des E.D.O.

I. Well-podesness

Un outil important est le lemme de Grönwall :

Lemme 1 : *Lemme de Grönwall*

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, et $(f,g,u) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}^+)^3$ telles que :

$$\forall t \in I,\ u(t) \leqslant f(t) + \left|\int_{t_0}^t u(s)g(s)\mathrm{d}s\right|.$$

Alors,

$$\forall t \in I,\ u(t) \leqslant f(t) + \left|\int_{t_0}^t f(s)g(s)\exp\left(\left|\int_s^t g(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right|\right)\mathrm{d}s\right|.$$

L'étude d'une EDO commence toujours par montrer son caractère bien posé. Pour cela, on utilise le théorème de Cauchy-Lipschitz, version locale ou version globale.

Théorème 1 : *Théorème de Cauchy-Lipschitz - Version locale*

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Alors, pour tout $t_0 \in I$, $y_0 \in \Omega$, le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(t,y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right. \tag{1}$$

admet une unique solution maximale (J,y) définie sur un intervalle ouvert $J \subseteq I$, contenant t_0.

Théorème 2 : *Théorème de Cauchy-Lipschitz - Version globale*

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : I \times \mathbb{R}^{\mathbf{d}} \to \mathbb{R}^{\mathbf{d}}$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Alors, pour tout $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^d$, le problème de Cauchy (1) admet une unique solution globale.

Remarque :

1. La preuve repose sur l'application du théorème du point fixe de Picard à la formulation intégrale du problème de Cauchy; dans le cas des fonctions localement lipschitziennes, il faut introduire les cylindres de sécurité. Dans le cas globalement lipschitzien, on peut conclure en montrant qu'un des itérés est contractant, ou en appliquant un changement de norme.
2. Une fonction localement lipschitzienne est continue, l'hypothèse de continuité porte sur la dépendance en t.
3. L'hypothèse : f est localement lipschitzienne sur Ω est équivalent à : f est globalement lipschitzienne sur tout compact de Ω (puisque par Borel-Lebesgue, un compact est recouvert par un nombre fini de boules).
4. Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux EVN, $\Omega_E \subseteq E$ un ouvert, et $f : \Omega_E \to F$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Alors, f est localement lipschitzienne sur Ω_E. En effet, fixons $x_0 \in \Omega_E$. Alors, il existe $\delta > 0$, tel que $B_E^\circ(x_0,\delta) \subseteq \Omega_E$. De plus, par définition de la continuité de $df : (\Omega_E,\|\cdot\|_E) \to (\mathscr{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$, en x_0, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in B_E^\circ(x_0,r)$, $|||df(x) - df(x_0)||| \leqslant 1$. Ainsi,

$$\sup_{x \in B_E^\circ(x_0,r)} |||df(x)||| \leqslant |||df(x_0)||| + 1 =: M < \infty.$$

On pose $\mathscr{V}_{x_0} := B_E^\circ(x_0, \min(\delta,r))$. Alors, pour tout $x,y \in \mathscr{V}_{x_0}$, on a, par inégalité des accroissements finis sur le convexe $\mathscr{V}_{x_0}$, $\|f(x)-f(y)\|_F \leqslant \sup_{z\in[x,y]} |||df(z)|||\, \|x-y\|_E \leqslant M\|x-y\|_E$. Ceci conclut.

5. Le théorème de Cauchy-Lipschitz se généralise aux fonctions f définies sur $I\times\Omega_E$, avec Ω_E un ouvert (connexe) d'un espace de Banach. La complétude est nécessaire; afin de donner un sens à la formulation intégrale de l'équation différentielle, et pour appliquer le théorème du point fixe de Picard.

Exemple 1:

L'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \sin(x)-2y+3 \\ y' &=& \arctan(xy)-\cos(x) \\ x(0) &=& 2 \\ y(0) &=& 78 \end{array}\right.$$

admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 car la fonction suivante est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ donc continue et localement lipschiztienne par rapport à la seconde variable :

$$f:\left[\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (t,(x,y)) & \mapsto & (\sin(x)-2y+3,\arctan(xy)-\cos(x)) \end{array}\right].$$

Pour aller plus loin ...

Il existe un autre théorème donnant l'existence de solution à une EDO : le théorème de Cauchy-Arzela-Peano. Le voici :

Propriété 1 : *Théorème de Cauchy-Arzela-Peano*

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f: I\times\Omega\to\mathbb{R}^d$, une application continue. Alors pour tout $t_0\in I$, $y_0\in\Omega$, il existe une solution (J,y) du problème de Cauchy (1).

Remarque :

1. Ce théorème ne fournit pas d'unicité. En effet : $t\mapsto 0$ et $t\mapsto t^3$ sont deux solutions sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy : $\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) &=& 3y(t)^{\frac{2}{3}} \\ y(0) &=& 0. \end{array}\right.$.
2. La preuve de ce théorème repose sur le théorème du point fixe de Schauder et le théorème d'Ascoli. Un preuve alternative existe, et fait intervenir des ε solutions approchées (et le théorème d'Ascoli).
3. Dans la preuve, on utilise fortement la compacité des cyclindres et des segments, c'est pourquoi la preuve est profondément basée sur la dimension finie. Le théorème est d'ailleurs faux en dimension infinie : considérons l'espace de Banach $(c_0(\mathbb{N}),\|\cdot\|_\infty)$. On définit :

$$f:(u_n)_{n\geq 0}\in c_0(\mathbb{N})\mapsto\left(\sqrt{|u_n|}+\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0}\in c_0(\mathbb{N}).$$

Elle est bien définie et continue : soient $\varepsilon>0$, $(u,v)\in c_0(\mathbb{N})^2$ telles que $\|u-v\|_\infty\leqslant\delta:=\varepsilon^2$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, Si $\sqrt{|u_n|}+\sqrt{|v_n|}\leqslant\varepsilon$, alors, $|f(u_n)-f(v_n)|\leqslant\varepsilon$ par inégalité triangulaire.
Sinon,

$$|f(u_n)-f(v_n)|\leqslant\frac{||u_n|-|v_n||}{\sqrt{|u_n|}+\sqrt{|v_n|}}\leqslant\frac{\|u-v\|_\infty}{\sqrt{|u_n|}+\sqrt{|v_n|}}\leqslant\varepsilon.$$

Néanmoins, le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) &=& f(u(t)) \\ u(0) &=& 0 \end{array}\right.$ n'admet pas de solution. Si (I,y) est solution, alors :

$$\forall t\in I,\forall n\in\mathbb{N},\ y_n'(t)=\sqrt{|y_n(t)|}+\frac{1}{n+1}>0.$$

Donc, pour tout $t\in I\cap\mathbb{R}_+^*$, $y_n(t)>y_n(0)=0$. Ainsi,

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in I\cap\mathbb{R}_+^*,\ y_n'(t)\geqslant\sqrt{|y_n(t)|}=\sqrt{y_n(t)}\ \textit{i.e.}\ \forall n\in\mathbb{N},\forall t\in I\cap\mathbb{R}_+^*,\ y_n(t)\geqslant 4t^2>0.$$

Ainsi, $y_n(t)\notin c_0(\mathbb{N})$. Impossible.

II. Globalité des solutions

Pour montrer que les solutions maximales d'un problème de Cauchy sont globales, on utilise le théorème de sortie de tout compact/théorème des bouts/principe de majoration a priori/théorème d'explosion en temps fini :

Théorème 3 : *Théorème de sortie de tout compact*

Soient, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $f \in \mathscr{C}^0((a,b)\times\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et (y, J) une solution maximale avec $J = (T_*, T^*)$. Alors

- soit $T^* = b$
- ou bien $\lim\limits_{\substack{t\to T^*,\\ t<T^*}} ||y(t)|| = +\infty$.

Voici quelques cas particuliers fréquents :

Propriété 2 : *Fonction à croissance au plus linéaire*

Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable vérifiant : il existe $M_1, M_2 \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ tels que

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d,\ \left\| f(t,x) \right\| \leqslant M_1(t)\,\|x\| + M_2(t).$$

Alors, les solutions maximales du problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$ sont globales.

Exemple 2:

La fonction définie dans l'exemple 1 rentre dans ce cadre, car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left\| f(x,y) \right\|_1 = |\sin(x) - 2y + 3| + |\arctan(xy) - \cos(y)| \leqslant 5 + \frac{\pi}{2} + 2\left\| (x,y) \right\|_1.$$

Propriété 3 : *Ligne de niveau*

En dimension finie, si la solution maximale d'une équation différentielle évolue dans les lignes de niveaux d'une fonction coercive continue, alors elle est globale (car les lignes de niveaux d'une fonction coercive continue sont compactes).

Démonstration. Soit $H : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une telle fonction. Alors, on considère $\alpha \in \mathbb{R}$ et $K = H^{-1}(\{\alpha\})$. L'ensemble K est fermé, par continuité de H. De plus, si K n'est pas borné, on considère $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ tel que $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La coercivité de H contredit alors le fait que pour tout entier naturel n, $H(x_n) = \alpha$. Puisque K est de dimension finie, il est compact. □

Exemple 3:

On peut aussi trouver des **intégrales premières** : on remarque que $f : (t,(x,y)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \mapsto (-x-2y^2, xy-y) \in \mathbb{R}^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Ainsi, le problème de Cauchy associé à f admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I contenant 0. Montrons qu'elle est globale. On introduit : $H : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + 2y^2 \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $t \in I$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t),y(t)) = 2x(t)x'(t) + 4y(t)y'(t) = 2x(t)\left(-x(t) - 2y^2(t)\right) + 4y(t)\left(x(t)y(t) - y(t)\right).$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t),y(t)) = -2H(x(t),y(t)).$$

Alors, $\forall t \in I$, $H(x(t),y(t)) = e^{-2t} H(x_0,y_0)$. Donc,

$$\forall t \in I,\ \ \left\|(x,y)(t)\right\|_2 \leqslant \sqrt{2}e^{-t}\left\|(x_0,y_0)\right\|_2.$$

Par le théorème de sortie de tout compact, on en déduit que l'unique solution maximale est globale.

III. Cas particuliers des systèmes linéaires

Théorème 4 : *Well-posedness globale des systèmes linéaires*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, et $B \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$, alors le système différentiel :

$$\begin{cases} X'(t) & = & A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) & = & X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution **globale**.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ est un sous-espace affine de dimension n de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Définition 1:

On définit la résolvante $R \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathscr{M}_d(\mathbb{R}))$ comme suit : pour tout $s \in \mathbb{R}$, $R(\cdot, s)$ est l'unique solution globale de l'EDO suivante :

$$\begin{cases} \partial_t R(t,s) & = & A(t)R(t,s) \\ R(s,s) & = & I_d \end{cases}$$

La résolvante a pour but de généraliser la notion d'exponentielle matricielle dans le cas des systèmes à coefficients variables.

Propriété 4 :

Les propositions suivantes sont vérifiées :

1. Pour tous réels t_0, t_1, t_2, $R(t_0, t_1)R(t_1, t_2) = R(t_0, t_2)$.
2. En particulier, pour tous réels t_0, t_1, $R(t_0, t_1) \in GL_d(\mathbb{R})$, et $R(t_0, t_1)^{-1} = R(t_1, t_0)$.

La formule de Duhamel donne l'expression explicite de la solution de cette équation différentielle à partir de la résolvante :

Théorème 5 : *Formule de Duhamel*

Soient $A \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathscr{M}_d(\mathbb{R}))$, $b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$. Alors, l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) & = & A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}$$

est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)\mathrm{d}s.$$

Remarque :

Dans le cas des systèmes à coefficients constants, la résolvante est donnée par $R(t,s) = e^{A(t-s)}$. On retiendra notamment la relation suivante :

Propriété 5 :

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $[A, B] = 0$ alors :

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Sans cette hypothèse, la relation est fausse en général. La réciproque est fausse également. De plus, $A \in \mathbb{K}[A]$ est un fait à avoir en tête (sous-espace vectoriel de dimension finie donc fermé).

IV. Étude des points d'équilibre

Définition 2:

On rappelle qu'étant donné une équation différentielle autonome $y' = f(y)$, on appelle point d'équilibre du système tout zéro de f.

Définition 3:

Étant donné une équation différentielle autonome $y' = f(y)$ et y^* un point d'équilibre, on dit que y^* est un point d'équilibre :

- stable si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que pour tout $y_0 \in B(y^*, \delta)$, la solution de $y' = f(y)$ avec condition initiale $y(0) = y_0$ est définie en tout temps positif et vérifie : $\forall t \geqslant 0, \left\| y(t) - y^* \right\| \leqslant \varepsilon$.
- asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe un voisinage de y^* tel que pour toute condition initiale dans ce voisinage, la solution est définie en tout temps positif, et converge vers y^* quand $t \to +\infty$.
- instable s'il n'est pas stable.

1. Cas des systèmes à coefficients constants

Dans le cas des systèmes linéaires à coefficients constants, on connait des conditions nécessaires et suffisantes à l'étude de la stabilité.

Théorème 6 : *Critère de Routh*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère le système différentiel : $x' = Ax$. Alors, 0 est un point d'équilibre :

- stable du système différentielle $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(A)$, $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$ et $\mathrm{Re}(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ est non défective (i.e. admet la même multiplicité algébrique et géométrique).
- asymptotiquement stable $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(A)$, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

2. Théorème de linéarisation en première approche

Théorème 7 : *Théorème de linéarisation de Lyapounov*

Soit $v \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $x^* \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre. Notons $A = Jac(v)(x^*)$. Si $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, Re(z) < 0\}$, alors x^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système $x'(t) = v(x(t))$.

Remarque :

1. La stabilité aymptotique est une notion locale, on peut donc espérer déduire des informations sur le système non linéaire à partir du système linéarisé (comme dans le théorème d'inversion locale). Le théorème de Lyapounov assure que si x^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système linéarisé $x'(t) = Jac(v)(x^*)x(t)$ (critère de Routh), alors, il en est de même pour le système non linéaire.
2. On a aussi le théorème suivant :

   Théorème 8 : *Théorème d'instabilité en première approche*

   Soit $v \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $x^* \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre. Notons $A = Jac(v)(x^*)$. S'il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $Re(\lambda) > 0$, alors, x^* est un point d'équilibre instable du système non linéaire $x'(t) = v(x(t))$.

3. La notion de stabilité (non asymptotique) est une notion trop fine pour passer du linéaire au non linéaire. Si la jacobienne de v admet une valeur propre de partie réelle nulle, alors, on ne peut rien conclure. Les quatre cas de figure sont possibles.

Exemple 4:

Reprenons le système de l'exemple 3. Remarquons que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} -x-2y^2 & = & 0 \\ xy - y & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 & = & -x \\ y = 0 & \text{ou} & x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Le système admet donc un unique point d'équilibre. Étudions sa nature. On a :

$$Jac(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -4y \\ y & x-1 \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = -I_2.$$

Ainsi, le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable pour le problème linéarisé en vertu du critère de Routh. Par le théorème de linéarisation en première approche, le point $(0, 0)$ est donc asymptotiquement stable pour le système non linéaire.

Méthode :

En résumé, afin d'étudier une EDO :

1. Éventuellement, vectoriser l'équation.
2. Éventuellement, reconnaître un système linéaire.
3. Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz local/global.
4. Éventuellement, tester la globalité des solutions, via une intégrale première de l'énergie, les lignes de niveau d'une fonction continue coercive, une fonction au plus linéaire etc.
5. Déterminer les points d'équilibre de l'équation
6. Étudier la nature des points d'équilibre via le critère de Routh/le théorème de linéarisation de Lyapounov.

Pour aller plus loin ...

On considère le problème de Cauchy (1) que l'on souhaite résoudre numériquement sur un intervalle de temps $[0, T]$, donné. On suppose que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ est globalement lipschitzienne. Ce cadre permet d'assurer que le problème de Cauchy admet une unique solution globale. On introduit la subdivision régulière de l'intervalle $[0, T]$ à $N+1$ points, $(t_n)_{0\leq n\leq N}$ où $N \in \mathbb{N}^*$, et on définit $h = \frac{T}{N}$ le pas de la subdivision. On souhaite déterminer une suite $(y_n)_{0\leq n\leq N(h)}$ qui approxime la suite $(y(t_n))_{0\leq n\leq N}$. On initialise le processus à y_0, et on souhaite déterminer un processus récursif qui permet d'approximer les termes de proche en proche.

Pour cela, on approche le taux d'accroissement définissant la dérivée en une différence finie d'ordre 1 à droite, *i.e.*

$$y'(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \simeq \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$$

par $h > 0$ petit. La valeur y_n étant définie, on définit y_{n+1} par la relation suivante : $\dfrac{y_{n+1}-y_n}{h} = f(t_n, y_n)$. On pose alors :

$$\forall n \in [\![0, N-1]\!], \quad y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

On appelle ce processus d'approximation la méthode d'Euler explicite.

Théorème 9 : *Convergence de la méthode d'Euler*

La méthode d'Euler explicite est convergente d'ordre 1, *i.e.*, il existe $C > 0$ tel que pour tout $h > 0$,

$$\left\|(y_n - y(t_n))_{0\leq n\leq N(h)}\right\|_\infty \leq Ch.$$

La preuve repose sur la démonstration de la consistance et la stabilité de la méthode.