Feuille 1

Rappel 1

On considère une équation différentielle, linéaire, d'ordre 1*, sous forme résolue, à coefficients constants et continus, de la forme :*

$$y' + a(t)y = b(t) \tag{1}$$

On rappelle que l'ensemble des solutions de cette équation est un espace vectoriel affine de dimension 1*. En d'autre terme, la solution s'écrit comme la somme de la solution générale de l'équation homogène (i.e. pour $b \equiv 0$), et d'une solution particulière. La solution générale de l'équation homogène est donnée par :*

$$t \mapsto \lambda \exp\left(-\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Afin de déterminer une solution particulière, on applique la méthode de la variation de la constante.

Exercice 1 [Équations différentielles linéaires du premier ordre.]

1. La solution de l'équation homogène est donnée par $t \mapsto \lambda e^{-t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Afin de déterminer une solution particulière, on applique la méthode de la variation de la constante, on cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p(t) = C(t)e^{-t}$, pour $C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de (1)} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(C'(t) - C(t)\right)e^{-t} + C(t)e^{-t} = \cos(t) \\ &\Leftrightarrow \quad C'(t) = e^t \cos(t) \\ &\Leftrightarrow \quad C(t) = \Re\left(\int e^{(1+i)t}\mathrm{d}t\right) = \Re\left(\tfrac{1-i}{2}e^{(1+i)t}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad C(t) = \tfrac{1}{2}\left(\cos(t) + \sin(t)\right)e^t \end{aligned}$$

   On aurait aussi pu chercher une solution particulière sous la forme : $\alpha\cos + \beta\sin$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \lambda e^{-t} + \frac{1}{2}\left(\cos(t) + \sin(t)\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. L'équation n'est pas sous forme résolue, mais le coefficient devant y' ne s'annule pas. On a donc :

$$(2) \Leftrightarrow y' - \frac{2t}{1+t^2}y = 5.$$

   La solution de l'équation homogène est donnée par $t \mapsto \lambda\left(1+t^2\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p(t) = C(t)(1+t^2)$, pour $C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de (2)} \quad &\Leftrightarrow \quad (1+t^2)C'(t) + 2tC(t) - \tfrac{2t}{1+t^2}C(t)(1+t^2) = 5 \\ &\Leftrightarrow \quad C(t) = \int \tfrac{5}{1+t^2}\mathrm{d}t = 5\arctan(t) \end{aligned}$$

   Alors,

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \lambda(1+t^2) + 5(1+t^2)\arctan(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. Comme dans le cas précédent, l'équation n'est pas sous forme résolue, mais le coefficient devant y' ne s'annule pas. On a donc :

$$(2) \Leftrightarrow y' - \frac{t}{1+t^2}y = 5.$$

   La solution de l'équation homogène est donnée par $t \mapsto \lambda\sqrt{1+t^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p(t) = C(t)\sqrt{1+t^2}$, pour $C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de (3)} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+t^2}C'(t) + \tfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}C(t) - \tfrac{t}{1+t^2}C(t)\sqrt{1+t^2} = 5 \\ &\Leftrightarrow \quad C(t) = \int \tfrac{5}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = 5\ln(t + \sqrt{1+t^2}) = 5\mathrm{Argsh}(t) \end{aligned}$$

Alors,
$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \lambda(1+t^2) + 5\sqrt{1+t^2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Les solutions de l'équation homogène sont $t \mapsto \lambda e^t$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution sous la forme $y_p(t) = C(t)e^t$, pour $C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
$$\begin{array}{rcl} y_p \text{ est solution de (3)} & \Leftrightarrow & e^t\left(C'(t) + C(t)\right) - e^t C(t) = e^{\alpha t} \\ & \Leftrightarrow & C(t) = \int e^{(\alpha-1)t}\mathrm{d}t \end{array}$$
Pour $\alpha \neq 1$, on obtient alors :
$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \lambda e^t + \frac{1}{\alpha - 1}e^{\alpha t}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$
Pour $\alpha = 1$, il vient :
$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto (\lambda + t)e^t, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque. *On cherche une solution particulière de l'équation*
$$y' - \lambda y = P(t)e^{\alpha t}.$$
Une base de solutions de l'équation homogène est donnée par $t \mapsto e^{\lambda t}$. Si $\alpha \neq \lambda$, on peut trouver une solution particulière sous la forme $y_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}$, où Q est un polynôme de même degré que P. Si $\alpha = \lambda$, on peut trouver une solution particulière sous la forme $y_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}$, où $\deg(Q) = \deg(P) + 1$. *Cette méthode s'étend pour les équations de degré 2.*

Exercice 2

1. L'équation n'est pas sous forme résolue. On travaille donc sur les intervalles où le coefficient devant y' ne s'annule pas, c'est-à-dire sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$. On a :
$$(E) \Leftrightarrow y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{1+x^2}.$$
Ainsi, l'équation homogène admet comme solution
$$x \mapsto \frac{\lambda}{x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \frac{C(x)}{x^2}$. Alors,
$$y_p'(x) + \frac{2}{x}y_p(x) = \frac{C'(x)x^2 - 2xC(x)}{x^4} + \frac{2}{x}\frac{C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x^2}.$$
Ainsi,
$$y_p \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow C(x) = \int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = x - \arctan(x).$$
Ainsi, sur les intervalles $]-\infty;0[$ et$]0;+\infty[$, on a :
$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{\arctan(x)}{x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. On suppose que l'équation admet une solution f sur $\mathbb{R}$. Alors, $f\big|_{]0;+\infty[}$ est solution sur $]0;+\infty[$ (respectivement $f\big|_{]-\infty;0[}$ sur $]-\infty;0[$). Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :
$$f\big|_{]0;+\infty[} : x \mapsto \frac{\lambda}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{\arctan(x)}{x^2},$$
et
$$f\big|_{]-\infty;0[} : x \mapsto \frac{\mu}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{\arctan(x)}{x^2}.$$

On remarque que, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\lambda}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2} + o_{x\to 0^+}(1) = \frac{\lambda}{x^2} + o_{x\to 0^+}(1).$$

Ainsi, si $\lambda \neq 0$, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\lambda}{x^2}$, et $|f(x)| \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Nécessairement, $\lambda = 0$. De le même façon, $\mu = 0$. Ainsi, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \frac{x - \arctan(x)}{x^2}.$$

Cette fonction est développable en série entière, donc continue et dérivable en 0. De plus, on vérifie qu'elle est effectivement solution de l'EDO. Ainsi,

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \frac{x - \arctan(x)}{x^2}\right\}.$$

Rappel 2

On rappelle le théorème de Cauchy-Lipschitz : soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et Ω un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$, un espace de Banach. Soit $f : I \times \Omega \to E$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$. Alors, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert de I contenant t_0.

Rappel 3

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN, Ω un ouvert de E, et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$. Alors, f est localement lipschitzienne.

Exercice 3

1. On considère

$$f : \begin{bmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto & (1-x)x \end{bmatrix}.$$

Alors, elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.

a. $y_0 = 0, 1$: l'application constante égale à y_0 est solution sur $\mathbb{R}$. Par unicité, c'est l'unique solution globale.

b. $y_0 \in]0, 1[$: pour un tel y_0, l'unique solution maximale définie sur I, intervalle ouvert contenant 0, vérifie : pour tout $t \in I$, $y(t) \in]0, 1[$ (les courbes intégrales ne se croisent pas) (le théorème des bouts affirme alors que la solution est globale). Alors,

$$\forall t \in I, \quad \frac{y'(t)}{y(t)(1 - y(t))} = 1.$$

Il vient, en intégrant :

$$\forall t \in I, \quad \ln\left|\frac{y(t)}{1 - y(t)}\right| - \ln\left|\frac{y_0}{1 - y_0}\right| = t. \tag{2}$$

Ainsi,

$$\forall t \in I, \quad y(t) = \frac{e^t \frac{y_0}{1-y_0}}{1 + e^t \frac{y_0}{1-y_0}}.$$

Cette formule étant toujours bien définie, on obtient $I = \mathbb{R}$. Il s'agit de l'unique solution globale.

c. $y_0 \in]1;+\infty[$. Similairement, pour tout $t \in I$, $y(t) \in]1;+\infty[$. Alors, on reprend (2) en adaptant les valeurs absolues, et il vient :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = \frac{e^{t\frac{y_0}{y_0-1}}}{e^{t\frac{y_0}{y_0-1}} - 1}.$$

On remarque que cette expression est définie sur $]-\infty; \ln(1-\frac{1}{y_0})[$ et sur $]\ln\left(1-\frac{1}{y_0}\right); +\infty[$. Il faut que 0 soit dans l'intervalle d'existence de la solution, on a donc construit une solution sur $]\ln\left(1-\frac{1}{y_0}\right); +\infty[$. Est-elle maximale ? Si on suppose que f prolonge cette solution, i.e. est une solution définie sur un intervalle contenant strictement $]\ln(1-\frac{1}{y_0}); +\infty[$, alors, par unicité, on a :

$$\forall t \in \left]\ln\left(1-\frac{1}{y_0}\right); +\infty\right[, \quad f(t) = \frac{e^{t\frac{y_0}{y_0-1}}}{e^{t\frac{y_0}{y_0-1}} - 1}.$$

En prenant la limite quand $t \to \ln(1-\frac{1}{y_0})^+$, on a :

$$f\left(\ln\left(1-\frac{1}{y_0}\right)\right) = +\infty.$$

C'est impossible. Il s'agit donc de la solution maximale.

d. $y_0 \in]-\infty; 0[$. On raisonne de la même façon que pour c, et il vient que la solution maximale est :

$$\forall t \in \left]-\infty; \ln\left(1-\frac{1}{y_0}\right)\right[, \quad y(t) = \frac{e^{t\frac{y_0}{y_0-1}}}{e^{t\frac{y_0}{y_0-1}} - 1}.$$

2. Sur $]-\infty; 0[$, $]0, 1[$, ou $]1; +\infty[$, l'équation s'écrit sous forme résolue :

$$(E) \Leftrightarrow y' - \frac{1}{t\ln(t)} y = \frac{1}{t\ln(t)}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donnée par $t \mapsto \lambda \ln|t|$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que -1 est solution particulière. Ainsi,

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto \lambda \ln|t| - 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On suppose donnée une solution f de (E) sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Alors, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t > 1, \quad f(t) = \lambda \ln(t) - 1,$$
$$\forall t \in]0; 1[, \quad f(t) = \mu \ln(t) - 1.$$

Puisque $\lim_{t \to 1^+} f(t) = \lim_{t \to 1^-} f(t) = -1$, f est continue en 1. De plus, f est dérivable sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. On a :

$$\forall t > 1, \quad f'(t) = \frac{\lambda}{t},$$
$$\forall t \in]0; 1[, \quad f'(t) = \frac{\mu}{t}.$$

Ainsi, une condition nécessaire et suffisante à la dérivabilité de f en 1 est $\lambda = \mu$. Réciproquement, on vérifie que $t \mapsto \lambda \ln(t) - 1$ est solution de (E) sur $]0; +\infty[$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque. *Puisque, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \to 0^+} (\lambda \ln(t) - 1) = \pm\infty$, il n'existe pas de solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation ; on ne peut prolonger ces solutions de façon continue.*

3. On remarque que $y \mapsto \sqrt{y}$ n'est pas localement lipschitzienne sur $[0; +\infty[$. Supposons $y_0 > 0$. On raisonne par analyse-synthèse : soit (I, y) une solution. Alors :

$$\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+, \quad y'(t) = t\sqrt{y(t)} \geqslant 0.$$

Alors,

$$\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+, \quad y(t) \geqslant y(0) = y_0 > 0.$$

Alors, on peut séparer les variables : il vient :

$$\frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} = t.$$

Alors,

$$\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+, \quad y(t) = \left(\sqrt{y_0} + \frac{t^2}{4}\right)^2.$$

Réciproquement, cette fonction est solution globale du problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ (il convient de remarquer que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique car $f : (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mapsto t\sqrt{y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$). On s'intéresse au cas où $y_0 \equiv 0$. Il convient de remarquer que :

$$y_C(t) := \left(\frac{t^2}{4} + C\right)^2$$

est solution de l'EDO

- sur $\mathbb{R}$ si $C \geqslant 0$.
- sur $\left]-\infty; -2\sqrt{-C}\right] \cup \left[2\sqrt{-C}; +\infty\right[$ si $C < 0$.

De plus,

$$y_C(\pm 2\sqrt{-C}) = y_C'(\pm 2\sqrt{-C}) = 0.$$

On peut donc raccorder cette solution à la solution nulle : pour tout $C < 0$,

$$y : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-2\sqrt{-C}; 2\sqrt{-C}] \\ \left(\frac{t^2}{4} + C\right)^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une solution sur $\mathbb{R}$.

Rappel 4 (*Équation de Bernoulli*)

Une équation de Bernoulli est une équation différentielle de la forme :

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^m(x),$$

pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $a, b : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On introduit $u(x) := y^{1-m}(x)$. Alors, u est solution de l'EDO :

$$u'(x) = (1 - m)a(x)u(x) + (1 - m)b(x).$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, d'ordre 1. On la résout donc, avant de remonter à l'expression de y.

Rappel 5 (*Équation de Riccati*)

Une équation de Riccati est une équation différentielle de la forme :

$$y'(x) = q_0(x) + q_1(x)y(x) + q_2(x)y^2(x),$$

pour $q_0, q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On suppose donnée une solution particulière y_1 de cette équation et on introduit $u = y - y_1$. Alors, u est solution de l'EDO :

$$u'(x) = (q_1(x) + 2q_2(x)y_1(x))u(x) + q_2(x)u^2(x).$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire de Bernoulli, que l'on résout comme expliqué précédemment.

Exercice 4

1. On considère $u(x) = \sqrt{y(x)}$. Alors, il vient :
$$u'(x) = \frac{1}{2}u(x) - \frac{1}{2}.$$
Ainsi, l'expression de u est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = \lambda e^{\frac{x}{2}} + 1.$$
Ainsi, on obtient :
$$y(x) = \left((\sqrt{y_0} - 1)e^{\frac{x}{2}} + 1\right)^2.$$
On vérifie : cette fonction est solution si $y_0 \geqslant 1$. Cette solution est unique puisque si $y_0 \geqslant 1$, il en est de même pour y, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Si $y_0 \in [0, 1[$, alors y est solution sur $[-2\ln(1 - \sqrt{y_0}); +\infty[$. On prolonge cette solution par 0 (possible) pour obtenir une solution globale.
2. Le champ de vecteurs $f(x, y) = y^2 - xy + 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et l'équation admet une unique solution maximale. On remarque que l'application $y_1(x) = x$ est solution particulière de l'EDO. On introduit alors $u(x) = y(x) - x$. Alors, u vérifie :
$$u'(x) = xu(x) + u^2(x).$$
En posant $v(x) = \frac{1}{u(x)}$, on transforme l'équation de Bernoulli en l'EDOL d'ordre 1 suivante :
$$v'(x) + xv(x) = -1.$$
Alors,
$$y(x) = x + \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\dfrac{1}{y_0} - \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t}.$$
On sait que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est strictement croissante, et continue. C'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{x^*} e^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{y_0}$. Si $y_0 = 0$, $y(x) = x$ est l'unique solution globale de (E) sur $\mathbb{R}$. Si $y_0 > 0$, alors $x^* > 0$ et l'unique solution maximale est définie sur $]-\infty; x^*[$. Si $y_0 < 0$, alors l'intervalle d'existence de la solution maximale est $]x^*; +\infty[$. Ces solutions sont maximales, puisqu'elles explosent au bord de leur intervalle d'existence. Ainsi, elles n'admettent pas de prolongement continu.

Exercice 5 La formule (cas particulier de la formule de Duhamel) qui donne la solution de $y' + ay = b$ est :
$$y(x) = \lambda \exp\left(-\int_0^x a(t)\mathrm{d}t\right) + \int_0^x b(t)\exp\left(-\int_t^x a(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

1. Il convient de remarque pour, pour tout $x \geqslant 0$,
$$0 \leqslant \exp\left(-\int_0^x a(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant e^{-x}.$$
Ainsi, il est clair que la solution de l'équation homogène tend vers 0. Examinons le deuxième terme : avec la même majoration, il vient, pour $x \geqslant 0$,
$$\left|\int_0^x b(t)\exp\left(-\int_t^x a(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |b(t)|e^{-(x-t)}\mathrm{d}t \underset{u=x-t}{=} \int_0^x |b(x-u)|e^{-u}\mathrm{d}u.$$
On applique le théorème de convergence dominée : remarquons que, pour tout $u \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{1}_{[0;x]}(u)|b(x-u)|e^{-u} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, b étant continue et admettant une limite finie en $+\infty$, elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\mathbb{1}_{[0;x]}(u)|b(x-u)|e^{-u} \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(u)\,\|b\|_{L^\infty(0,+\infty)}\,e^{-u} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Ceci fournit le résultat.

2. On remarque que (3) se réécrit :

$$y(x) = \left(\lambda + \int_0^x b(t)\exp\left(\int_0^t a(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\right)\exp\left(-\int_0^x a(t)\mathrm{d}t\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

De plus, pour $x \leqslant 0$,

$$\exp\left(-\int_0^x a(t)\mathrm{d}t\right) \geqslant e^{-x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Pour tout $t \leqslant 0$,

$$\exp\left(\int_0^t a(u)\mathrm{d}u\right) \leqslant e^t.$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^0 |b(t)|\exp\left(\int_0^t a(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \leqslant \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^-)}\int_{-\infty}^0 e^t\mathrm{d}t < +\infty.$$

Cette intégrale existe. Ainsi, **nécessairement**, si $\lambda \neq \displaystyle\int_{-\infty}^0 b(t)\exp\left(\int_0^t a(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$, on obtient directement que $|y(x)| \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ceci montre l'unicité. Montrons maintenant que l'unique solution associée à cette constante tend vers 0 en $-\infty$:

$$y(x) = \int_{-\infty}^x b(t)\exp\left(-\int_t^x a(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

Alors, pour tout $x \leqslant 0$,

$$|y(x)| \leqslant \int_{-\infty}^x |b(t)|e^{-(x-t)}\mathrm{d}t \underset{u=t-x}{=} \int_{-\infty}^0 |b(u+x)|e^u\mathrm{d}u.$$

On conclut comme précédemment, via le théorème de convergence dominée.

Rappel 6

On considère une équation différentielle d'ordre 2, linéaire, homogène à coefficients constants, sous forme résolue, du type

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{4}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est un espace vectoriel de dimension 2. On appelle équation caractéristique l'équation : $r^2 + ar + b = 0$. *Alors :*

1. *Si l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes* r_1 *et* r_2*, une base de solutions réelles de (4) est donnée par :* $x \mapsto e^{r_1 x}$, $x \mapsto e^{r_2 x}$.
2. *Si l'équation caractéristique admet une racine double* r_0*, alors, une base de solutions réelles de (4) est donnée par :* $x \mapsto e^{r_0 x}$, $x \mapsto xe^{r_0 x}$.
3. *Sinon, l'équation caractéristique admet deux racines complexes non réelles conjuguées* $\alpha \pm i\beta$. *Une base de solutions réelles de (4) est donnée par :* $x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $x \mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

Rappel 7

On cherche la solution particulière d'une équation différentielle linéaire, d'ordre 2,

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x), \tag{5}$$

dont on a déjà trouvé une base de solutions f_1, f_2 *de l'équation homogène. On applique la* *méthode de la variation de la constante en dimension 2 : on cherche $y_p := \alpha f_1 + \beta f_2$, avec $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^1$. Alors, on peut trouver une solution sous cette forme vérifiant :*

$$\begin{cases} y_p = \alpha f_1 + \beta f_2 \\ y_p' = \alpha f_1' + \beta f_2' \end{cases} \tag{6}$$

En effet, (f_1, f_2) étant une base de solutions, la matrice résolvante associée $R := \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix}$ est inversible. Remarquons que la condition (6) est équivalente à :

$$\begin{cases} y_p = \alpha f_1 + \beta f_2 \\ 0 = \alpha' f_1 + \beta' f_2 \end{cases}.$$

Ainsi, en vérifiant ces conditions, y_p est solution de l'équation (5) ssi $R(t) \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Par définition, f est solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = g,$$

avec $g = f'' + f \geqslant 0$. Ainsi, on résout cette équation différentielle : une base de solutions de l'équation différentielle homogène est : $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ puisque les solutions de l'équation caractéristique sont $\pm i$. On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x).$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \alpha'(x) \\ \beta'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est facilement inversible, puisque c'est la matrice de rotation d'angle $-x$. Alors,

$$\alpha'(x) = -\sin(x)g(x) \qquad \text{et} \qquad \beta'(x) = \cos(x)g(x).$$

Ainsi, f s'écrit :

$$f(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)g(t)\mathrm{d}t, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + f(x+\pi) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\mathrm{d}t + \int_0^{x+\pi} \sin(x+\pi-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

$$f(x) + f(x+\pi) = \int_{\pi+x}^x \sin(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \underset{u=t-x}{=} \int_0^{\pi} \sin(u)g(u+x)\mathrm{d}u \geqslant 0.$$

Ceci conclut.

Exercice 7

1. L'équation est sous forme résolue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique puisque les coefficients sont continus : ainsi, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Puisque les coefficients sont variables, on n'a pas de méthode générale : l'énoncé nous invite à chercher des solutions sous forme de monôme. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$n(n-1)x^2x^{n-2} - 3nxx^{n-1} + 3x^n = 0 \Leftrightarrow n(n-1) - 3n + 3 = 0 \Leftrightarrow n = 1, 3.$$

   Réciproquement, on vérifie que $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^3$ sont deux solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Puisqu'elles sont libres, c'est une base de solutions de l'équation homogène. (Rappel : si on connaît une solution de l'équation homogène, on peut en déterminer une deuxième via la méthode d'abaissement du degré). On cherche alors une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \alpha(x)x + \beta(x)x^3$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'(x) \\ \beta'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2(2x-1) \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\alpha'(x) = -x + \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}.$$

Par suite,

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ax + Bx^3 + x^2 + x^3 \ln|x|, \qquad A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. On suppose donnée une solution f de (E) sur $\mathbb{R}$. Alors, il existe $A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = Ax + Bx^3 + x^2 + x^3 \ln|x|.$$

$$\forall x < 0, \quad f(x) = \alpha x + \beta x^3 + x^2 + x^3 \ln|x|.$$

La fonction est immédiatement continue en 0. Étudions la dérivée :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = A + (3B+1)x^2 + 2x + 3x^2 \ln|x|.$$

$$\forall x < 0, \quad f'(x) = \alpha + (3\beta+1)x^2 + 2x + 3x^2 \ln|x|.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) \Leftrightarrow A = \alpha.$$

Enfin,

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = (6B+5)x + 2 + 6x \ln|x|.$$

$$\forall x < 0, \quad f''(x) = (3\beta+5)x + 2 + 6x \ln|x|.$$

Alors,

$$\lim_{x \to 0^+} f''(x) = \lim_{x \to 0^-} f''(x) = 2.$$

Réciproquement, on vérifie que pour tout $A, B, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$f : \begin{bmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} Ax + Bx^3 + x^2 + x^3 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ Ax + \beta x^3 + x^2 + x^3 \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{bmatrix}$$

est solution de (E).

Exercice 8 Il s'agit d'une équation d'Euler

1. Remarquons que $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t \in \mathbb{R}_+^*$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. On l'applique alors comme changement de variables pour notre équation. On définit : $u(t) = y \circ \varphi(t)$. Alors, $y(x) = u(\ln(x))$. Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$y'(x) = \frac{1}{x} u'(\ln(x)).$$

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2} u'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} u''(\ln(x)).$$

Alors,

$$x^2 y'' + axy' + by = 0 \Leftrightarrow -u'(\ln(x)) + u''(\ln(x)) + au'(\ln(x)) + bu(\ln(x)) = 0.$$

On résout donc sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire, d'ordre 2, **à coefficients constants** suivante :

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0.$$

2. On suppose que $c := (a-1)^2 - 4b > 0$. Alors, l'équation caractéristique admet deux racines réelles, distinctes, $r_{1/2} = \dfrac{1-a \pm \sqrt{c}}{2}$. Ainsi, les solutions de cette équation sont :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Sous l'hypothèse $c > 0$, au vu de la correspondance entre les deux équations établie en question 1, on a :

$$\mathcal{S} := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto Ax^{r_1} + Bx^{r_2}, \quad A, B \in \mathbb{R} \right\},$$

avec $r_{1/2} = \dfrac{1-a \pm \sqrt{c}}{2}$.
On obtient pour $c = 0$,

$$\mathcal{S} := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (A\ln(x) + B)x^r, \quad A, B \in \mathbb{R} \right\},$$

avec $r = \dfrac{1-a}{2}$.
On obtient enfin pour $c < 0$,

$$\mathcal{S} := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)), \quad A, B \in \mathbb{R} \right\},$$

avec $\alpha = \dfrac{1-a}{2}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{c}}{2}$.

Remarque. *On peut aussi faire les choses grossièrement afin d'avoir une idée des solutions, les expliciter, et invoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz : si on trouve deux solutions libres, ceci conclut.*

Rappel 8

On rappelle que la convergence simple préserve :

1. *Les inégalités larges.*
2. *La monotonie.*
3. *La convexité/concavité.*

*En particulier, la continuité n'est pas préservée par convergence simple : $(x \in [0,1] \mapsto x^n)_n$ converge simplement vers $x \in [0,1] \mapsto \mathbb{1}_{\{1\}}(x)$. C'est le cas pour la convergence uniforme. Attention, la **dérivabilité** n'est pas préservée par convergence uniforme : en effet :*

$$\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \left| \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

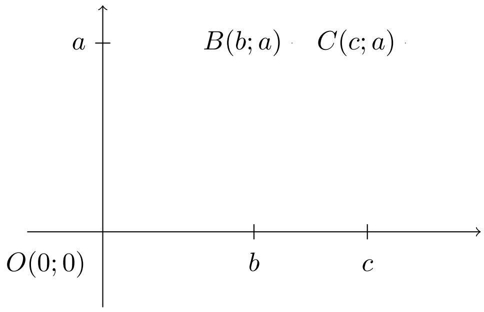
Ainsi, $\left(x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \right)_n$ converge uniforme vers $|\cdot|$. Il convient enfin de noter que la convergence uniforme sur tout intervalle de I n'implique pas la convergence uniforme sur I (même si cela suffit pour montrer la continuité/dérivabilité, qui est une notion locale). Exemple : pour tout $0 < a < 1$, pour tout $x \in [0,a]$,

$$|x^n| \leqslant a^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $(x \in [0,1] \mapsto x^n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle strict de $[0,1]$, mais pas sur $[0,1]$.

Exercice 9

1.a. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Il convient de considérer le graphique suivant :



On a directement, par inégalité triangulaire,

$$d(O,C) \leqslant d(O,B) + d(B,C),$$

i.e.

$$\sqrt{a^2+c^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2} + |c-b|.$$

Puisque $b \leqslant c$, on obtient le résultat. Il convient de remarquer que cette inégalité assure que $y \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, quelque soit $x \in \mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz global assure donc l'existence d'une unique solution globale.

1.b. La propriété est clairement vraie si $b = 0$ ou $c = 0$ Pour $b, c \in \mathbb{R}_+^*$, tels que $b \leqslant c$, on considère $f : a \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{a^2+b^2}$. La fonction est dérivable et,

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad f'(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a\left(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right)}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} \leqslant 0.$$

Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}^+$,

$$f(a) \leqslant f(0) = |c| - |b| = c - b.$$

Ceci conclut.

2.a. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. L'initialisation est claire, puisque f_0 est la fonction nulle. Supposons le résultat acquis au rang n. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f_n^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Par hypothèse de récurrence, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, elle est continue. Par somme et composée de fonctions continues, c'est le cas pour l'intégrande. Par théorème fondamental de l'analyse, f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Ceci montre le résultat. Il est clair que f_n est nulle en 0, au vu de sa définition.

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f_1(x) = \int_0^x |t|\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

C'est donc le cas pour f_1. On suppose le résultat acquis pour f_n. Alors, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_{n+1}'(x) = \sqrt{x^2 + f_n^2(x)} > 0.$$

Ainsi, f_{n+1} est strictement croissante.

Montrons enfin l'estimation souhaitée par récurrence sur $n \geqslant 1$. L'initialisation est claire puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$0 \leqslant f_1(x) - f_0(x) = \frac{x^2}{2} \leqslant \frac{x^2}{2},$$

ce qui montre le résultat. Supposons le résultat acquis au rang n. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x \left(\sqrt{t^2 + f_n^2(t)} - \sqrt{t^2 + f_{n-1}^2(t)}\right) \mathrm{d}t.$$

On utilise l'inégalité démontrée en première partie, qui s'applique puisque $f_{n-1} \leqslant f_n$ (par hypothèse de récurrence), et il vient, en utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant \int_0^x (f_n(t) - f_{n-1}(t))\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{d}t = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Ceci montre l'inégalité de droite. Pour l'inégalité de gauche, puisque l'hypothèse de récurrence donne $0 \leqslant f_{n-1} \leqslant f_n$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x \left(\sqrt{t^2 + f_n^2(t)} - \sqrt{t^2 + f_{n-1}^2(t)}\right) \mathrm{d}t \geqslant 0.$$

2.b. En sommant les inégalités précédentes, il vient, pour $N \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}^+$,

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{N} (f_k(x) - f_{k-1}(x)) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

i.e.

$$0 \leqslant f_N(x) \leqslant e^x - 1 - x.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite $(f_n(x))_n$ est croissante, et bornée, donc elle converge vers $f(x) \in \mathbb{R}$. De plus, f vérifie l'inégalité souhaitée. Montrons la convergence uniforme sur tout compact :

$$\forall A > 0, \forall x \in [0, A], \forall n \geqslant 1, \qquad \|f_n - f_{n-1}\|_{L^\infty(0,A)} \leqslant \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \in l^1(\mathbb{N}^*).$$

Ainsi, la série de terme général $(f_n - f_{n-1})$ est normalement, donc, uniformément convergente sur tout intervalle $[0, A]$ avec $A > 0$. Ainsi, c'est le cas pour la suite $(f_n)_n$. Sa limite est donc continue sur tout intervalle de la forme $[0, A]$, donc, sur $\mathbb{R}^+$.

2.c. Pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f'_{n+1}(x) - f'_n(x) = \sqrt{t^2 + f_n^2(t)} - \sqrt{t^2 + f_{n-1}^2(t)} \leqslant f_n(x) - f_{n-1}(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

De la même façon que précédemment, la suite (f'_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Finalement, le passage à la limite dans la définition de f_n fournit le résultat souhaité.

3. Un simple calcul de dérivée donne :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\delta(x)e^{-2x}\right) = 2(y_1(x) - y_2(x))\left(y'_1(x) - y'_2(x) - (y_1(x) - y_2(x))\right) e^{-2x}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $y_1(x) \leqslant y_2(x)$. Alors,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\delta(x)e^{-2x}\right) = -2(y_1(x) - y_2(x)) \underbrace{\left(\sqrt{x^2 + y_2^2(x)} - \sqrt{x^2 + y_1^2(x)} + y_1(x) - y_2(x)\right)}_{\leqslant y_2(x) - y_1(x) + y_1(x) - y_2(x) \leqslant 0} e^{-2x}.$$

Alors,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\delta(x)e^{-2x}\right) \leqslant 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $y_1(x) \geqslant y_2(x)$. Alors, on conclut de la même façon. Ceci montre que la fonction est décroissante. Puisque la fonction s'annule en 0, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$(y_1 - y_2)^2(x)e^{-2x} \leqslant 0.$$

Ainsi, $y_1 = y_2$.