Feuille 1

Exercice 1 [Équations différentielles linéaires du premier ordre.]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \cos(t)$,
2. $(1+t^2)y' = 2ty + 5(1+t^2)$,
3. $(1+t^2)y' = ty + 5(1+t^2)$,
4. $y' - y = e^{\alpha t}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 [Équations différentielles linéaires du premier ordre : recollement de solutions.]

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $xy' + 2y = \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. (E) admet-elle une/des solutions sur $\mathbb{R}$, et si oui laquelle/lesquelles ?

Exercice 3 [Résolution explicite : équations à variables séparées.]

1. Résoudre le problème de Cauchy suivant, pour $y_0 \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} y'(t) = (1-y(t))y(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
Indication : On pourra distinguer les cas $y_0 = 0, 1$, $y_0 > 1$, $y_0 < 0$ et $y_0 \in]0,1[$.
2. Résoudre l'équation différentielle $t\ln(t)y' - y - 1 = 0$ sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. L'équation admet-elle une/des solutions sur $]0,+\infty[$ et si oui laquelle/lesquelles ?
3. On considère le problème de Cauchy suivant :
$$\begin{cases} y'(t) = t\sqrt{y(t)}, & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
Montrer que si $y_0 > 0$, il existe une unique solution globale que l'on explicitera, mais que si $y_0 = 0$, ce problème de Cauchy admet une infinité de solutions.

Exercice 4 [Résolution explicite : équations de Ricatti et Bernoulli.]

1. Résoudre le problème de Cauchy suivant, pour $y_0 \in [0,+\infty[$:
$$\begin{cases} y' = y - \sqrt{y}, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
(Indication : On pourra distinguer les cas $y_0 < 1$, $y_0 = 1$ et $y_0 > 1$.)
2. Résoudre le problème de Cauchy suivant, pour $y_0 \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} y' = y^2 - xy + 1, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Exercice 5 [Équations différentielles linéaires du premier ordre : étude qualitative.]
Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a(x) \geq 1$.

1. On suppose ici que la limite en $+\infty$ de b est égale à 0. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + ay = b$ admet la limite 0 en $+\infty$.

2. On suppose ici que la limite en $-\infty$ de b est égale à 0. Montrer qu'il existe une solution et une seule sur $\mathbb{R}$ de $y' + ay = b$ qui admette la limite 0 en $-\infty$.

Exercice 6 [Équations différentielles linéaires du premier ordre : étude qualitative.]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'' + f \geqslant 0$. Montrer que pour tout réel x, on a $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Exercice 7 [Équations différentielles linéaires du premier ordre : résolution et recollement de solutions.]

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ l'équation (E) suivante : $x^2y'' - 3xy' + 3y = x^2(2x-1)$. *(Indication : On pourra chercher des solutions de l'équation homogène associée sous la forme $x \mapsto x^n$.)*

2. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 [Équations différentielles d'ordre 2 non linéaire.]
On se propose d'étudier les solutions y définies pour $x > 0$ de l'équation :

$$x^2y'' + axy' + by = 0 : \ (\star),$$

où a et b sont des nombres réels.

1. On pose $x = e^t$ et $u(t) = y\left(e^t\right)$. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par u ?

2. Résoudre cette équation si $c := (a-1)^2 - 4b > 0$.

3. Déduire les solutions de $(\star)$.

Exercice 9 [Équations différentielles d'ordre 1 non linéaire.]
On envisage l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$:

$$y' = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On va montrer l'existence et l'unicité de la solution nulle en 0 de cette équation (cette solution n'est pas exprimable à l'aide des fonctions élémentaires).

1. **Une inégalité élémentaire** : l'utilisation de la distance dans le plan permet de prouver l'inégalité :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+ \text{ avec } b \leq c, \quad \sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \leq c - b.$$

a) Expliquer comment.
b) Obtenir brièvement ce résultat sans recourir à la géométrie.

2. **Existence de la solution nulle en** 0 : On définit la suite $(f_n)_n$ de fonctions sur $\mathbb{R}_+$ par $f_0(x) = 0$, et, pour $n \geq 1$, $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2 + f_{n-1}^2(t)}dt$.
a) Montrer que chaque f_n ainsi définie est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0, strictement croissante si $n \geq 1$. Calculer $f_1(x)$. Montrer qu'on a, pour $n \geq 1$:

$$0 \leq f_n(x) - f_{n-1}(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

pour tout x dans $\mathbb{R}_+$.
b) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f vérifiant :

$$0 \leq f(x) \leq e^x - x - 1,$$

pour tout x dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
c) Montrer que la suite $(f_n')_n$ des dérivées vérifie pour $n \geq 1$:

$$0 \leq f_{n+1}'(x) - f_n'(x) \leq f_n(x) - f_{n-1}(x),$$

pour tout x dans $\mathbb{R}_+$. En déduire que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, nulle en 0, vérifiant:

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + f(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

3. **Unicité de la solution nulle en** 0 : on suppose que y_1 et y_2 sont des solutions sur $\mathbb{R}_+$ nulles en 0 de $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$. On pose $\delta = (y_1 - y_2)^2$. Montrer que la fonction $x \mapsto \delta(x)e^{-2x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Conclure.