Feuille Supplémentaire 1

Exercice 1 [Existence de solutions à une équation différentielle avec conditions au bord en dimension 1 par la méthode de tir.] On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{sur} \quad I = [a,b] \\ u(a) = u_a, \ u(b) = u_b \end{cases},$$

où $a < b$, $u_a, u_b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $q \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^+)$ et $p \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ vérifiant : il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout $x \in [a,b]$, $p(x) \geq \alpha$. Le but est de montrer l'existence de solutions à cette équation différentielle $u \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.

1. Montrer que les EDO suivantes admettent une unique solution sur $[a,b]$, notée respectivement u_1 et u_2

$$\begin{cases} -(pu_1')' + qu_1 = f & \text{sur} \quad I = [a,b] \\ u_1(a) = u_a, \ u_1'(a) = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -(pu_2')' + qu_2 = 0 & \text{sur} \quad I = [a,b] \\ u_2(a) = 0, \ u_2'(a) = 1 \end{cases}.$$

✰ **Solution.** Remarquons que, le premier système est équivalent à

$$\begin{cases} -pu_1'' - p'u_1' + qu_1 = f & \text{sur} \quad I = [a,b] \\ u_1(a) = u_a, \ u_1'(a) = 0 \end{cases},$$

Puisque p est minorée par une constante strictement positive, elle ne s'annule pas et on peut mettre l'équation sous forme résolue. On a donc équivalence avec le système :

$$\begin{cases} u_1'' + \frac{p'}{p}u_1' - \frac{q}{p}u_1 = -\frac{f}{p} & \text{sur} \quad I = [a,b] \\ u_1(a) = u_a, \ u_1'(a) = 0 \end{cases},$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, scalaire, d'ordre 2, à coefficients continus. Le théorème de Cauchy linéaire assure que cette équation admet une unique solution globale (quitte à vectoriser). Il en va de même pour la seconde.

2. Montrer que

$$p(b)u_2'(b)u_2(b) = \int_a^b \left(pu_2'^2 + qu_2^2\right).$$

✰ **Solution.** Remarquons que,

$$\int_a^b u_2\left(-(pu_2')' + qu_2\right) = 0.$$

Ainsi, après une intégration par parties sur des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, il vient

$$-p(b)u_2'(b)u_2(b) + p(a)u_2'(a)\underbrace{u_2(a)}_{=0} + \int_a^b pu_2'^2 + \int_a^b qu_2^2 = 0.$$

Alors,

$$p(b)u_2'(b)u_2(b) = \int_a^b \left(pu_2'^2 + qu_2^2\right).$$

3. Conclure.

✰ **Solution.** On considère $k \in \mathbb{R}$ et on définit $u := u_1 + ku_2$. La fonction u est bien solution de l'équation voulue (par linéarité) et la première condition au bord est respectée. On doit donc choisir k de telle façon que $u(b) = u_b$, *i.e.*

$$u_1(b) + ku_2(b) = u_b.$$

Il suffit donc de prendre $k = \dfrac{u_b - u_1(b)}{u_2(b)}$. Il suffit de vérifier que $u_2(b) \neq 0$. Pour cela, on se reporte à l'équation obtenue à la question 2 : le terme de droite est strictement positif (clairement positif, s'il est nul, alors, u_2' l'est, ce qui est impossible au vu de sa valeur en a). Ainsi, k est bien définie et on conclut.

Remarque. *Via le principe du maximum, on peut montrer l'unicité.*

Exercice 2 [Équation de Sylvester.] On considère une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ et on note $|||\cdot|||$ la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $\delta > 0$. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) < -\delta\}$. Le but de cette question est de démontrer le lemme de décroissance exponentielle suivant : il existe $K > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |||e^{tA}||| \leqslant Ke^{-\delta t}.$$

   (a) On note le polynôme caractéristique de A, $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$. Justifier que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, où F_i est l'espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i.
   ✰ **Solution.** Par le lemme des noyaux, on obtient directement que

$$\ker(\chi_A(A)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker((A-\lambda_i I_n)^{m_i}) = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i.$$

   Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, donc $\ker(\chi_A(A)) = \mathbb{C}^n$. Ceci conclut.

   (b) Soient $i \in \{1, \cdots, r\}$ et $v \in F_i$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\|e^{tA}v\|e^{\delta t} \leqslant e^{(\Re(\lambda_i)+\delta)t} \sum_{j=0}^{m_i-1} \frac{t^j}{j!} |||(A-\lambda_i I_n)^j|||\,\|v\|\,.$$

   ✰ **Solution.** Soient $i \in \{1, \cdots, r\}$ et $v \in F_i$. Alors, pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$e^{tA}v = e^{(\lambda_i I_n + A - \lambda_i I_n)t}v \underbrace{=}_{[\lambda_i I_n, A-\lambda_i I_n]=0} e^{\lambda_i t}e^{(A-\lambda_i I_n)t}v = e^{\lambda_i t}\sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda_i I_n)^k v,$$

   puisque v est un élément de F_i. Il vient alors

$$\left\|e^{tA}v\right\| \leqslant e^{\Re(\lambda_i)t}\sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{t^k}{k!}|||(A-\lambda_i I_n)^k|||\,\|v\|\,.$$

   Ainsi,

$$\left\|e^{tA}v\right\| e^{\delta t} \leqslant \; e^{(\Re(\lambda_i)+\delta)t}\sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{t^k}{k!}|||(A-\lambda_i I_n)^k|||\,\|v\|\,.$$

   (c) Conclure.
   ✰ **Solution.** Donc, pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|||e^{tA}|||e^{\delta t} \leqslant \max_{i\in\{1,\cdots,r\}} \underbrace{\left(e^{(\Re(\lambda_i)+\delta)t}\sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{t^k}{k!}|||(A-\lambda_i I_n)^k|||\right)}_{=:f_i(t)}.$$

   Comme $\Re(\lambda_i)+\delta < 0$, on obtient par croissance comparée $\lim_{t\to+\infty} f_i(t) = 0$. Par continuité, f_i est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |||e^{tA}||| \leqslant Ke^{-\delta t}.$$

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont de parties réelles strictement négatives. Le but de cette exercice est de montrer le résultat suivant : pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation matricielle $AX + XB = C$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$X := -\int_0^{+\infty} e^{tA}Ce^{tB}\mathrm{d}t.$$

(a) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le problème de Cauchy suivant admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on explicitera.

$$\begin{cases} Y' &= AY + YB \\ Y(0) &= C \end{cases}$$

☆ **Solution.** Quitte à identifier une matrice de taille $n \times n$ avec un vecteur n^2, on peut appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz linéaire, qui assure que cette équation différentielle admet une unique solution globale. Vérifions qu'il s'agit de $Y : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA}Ce^{tB}$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Y'(t) = AY(t) + e^{tA}CBe^{tB} \underbrace{=}_{B \in \mathbb{R}[B]} AY(t) + e^{tA}Ce^{tB}B = AY(t) + Y(t)B, \qquad Y(0) = C.$$

On obtient le résultat par unicité.

(b) En écrivant la formulation intégrale de l'équation différentielle vérifiée par Y et en utilisant l'estimation donnée par la question 1, montrer l'existence d'une solution à l'équation matricielle $AX + XB = C$.

☆ **Solution.** Par définition pour tout réel t,

$$Y(t) - C = \int_0^t (AY(s) + Y(s)B)\,\mathrm{d}s. \tag{1}$$

Remarquons que, par la question 1, on obtient l'existence de K et $\delta > 0$, tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|||e^{tA}||| \leq Ke^{-\delta t}, \qquad |||e^{tB}||| \leq Ke^{-\delta t}.$$

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} |||AY(s)|||\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} |||Ae^{sA}Ce^{sB}|||\mathrm{d}s \leq K^2|||A||| \times |||C||| \int_0^{+\infty} e^{-2\delta s}\mathrm{d}s < +\infty,$$

$$\int_0^{+\infty} |||Y(s)B|||\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} |||e^{sA}Ce^{sB}B|||\mathrm{d}s \leq K^2|||B||| \times |||C||| \int_0^{+\infty} e^{-2\delta s}\mathrm{d}s < +\infty,$$

$$|||Y(t)||| \leq K^2|||C|||e^{-\delta t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les deux premières inégalités justifient l'intégrabilité et on obtient finalement en faisant tendre t vers $+\infty$ dans (1)

$$0 - C = \int_0^{+\infty} \left(Ae^{tA}Ce^{tB} - e^{tA}Ce^{tB}B\right)\mathrm{d}t.$$

Ceci donne le résultat annoncé avec $X := -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{tA}Ce^{tB}\mathrm{d}t$.

(c) Montrer l'unicité.

☆ **Solution.** On a montré à la question précédente que $\varphi : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AX + XB$ est une application surjective. Puisqu'il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie, elle est forcément bijective. Ceci conclut.

Remarque. *On montre plus généralement que cette équation admet une unique solution ssi A et $-B$ n'ont pas de valeur propre commune.*

Exercice 3 [D'après CC2 2022.] On considère $\|\cdot\|$ la norme euclidienne et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. On notera $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$. Soient $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des applications continues. On suppose qu'il existe $\kappa > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle A(t)x, x)\rangle \leq -\kappa\|x\|^2. \tag{2}$$

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) \\ X(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{3}$$

et on note $(U(t,s))_{t,s\in\mathbb{R}}$ la résolvante associée à (3). Montrer que pour $t \geq s$

$$\|U(t,s)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \leq e^{-\kappa(t-s)}.$$

✰ **Solution.** L'équation (3) admet une unique solution globale par le théorème de Cauchy–Lipschitz linéaire, que l'on note X. On définit $u : t \in \mathbb{R} \mapsto \|X(t)\|^2$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u'(t) = 2\langle X(t), X'(t)\rangle = 2\langle X(t), A(t)X(t)\rangle \leq -2\kappa u(t).$$

Ainsi, pour tout t réel,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u(t)e^{2\kappa t}\right) \leq 0.$$

Par suite, pour tout $t \geq t_0$,

$$u(t)e^{2\kappa t} \leq u(t_0)e^{2\kappa t_0} \quad i.e. \quad \|X(t)\| \leq e^{-(t-t_0)\kappa}\|X(t_0)\|.$$

On sait que, pour tout $t \geq s$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$X(t; x_0, s) = U(t,s)x_0,$$

Donc, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on obtient

$$\|U(t,s)x_0\| = \|X(t;x_0,s)\| \leq e^{-\kappa(t-s)}\|x_0\|.$$

Alors,

$$\|U(t,s)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)} \leq e^{-\kappa(t-s)}.$$

2. On suppose que $t_0 = 0$ et b bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que toutes les solutions de $X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$. Plus précisément, montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$\|X(t)\| \leq e^{-\kappa t}\|X(0)\| + \frac{\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}}{\kappa}.$$

✰ **Solution.** Pour tout t positif, on a, par la formule de Duhamel,

$$\|X(t)\| = \left\|U(t,0)X(0) + \int_0^t U(t,s)b(s)\mathrm{d}s\right\|.$$

Ainsi, par l'estimation prouvée à la question précédente, on a

$$\|X(t)\| \leq e^{-\kappa t}\|X(0)\| + \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}\int_0^t e^{-\kappa(t-s)}\mathrm{d}s.$$

D'où,

$$\|X(t)\| \leq e^{-\kappa t}\|X(0)\| + \frac{\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}}{\kappa}e^{-\kappa t}\left[e^{\kappa s}\right]_0^t \leq e^{-\kappa t}\|X(0)\| + \frac{\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}}{\kappa}.$$

3. On suppose que A et b sont périodiques de période T. Montrer que $X(t) := \int_{-\infty}^t U(t,s)b(s)\mathrm{d}s$ est une solution de $X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$ et que celle-ci est périodique, de période T.

✰ **Solution.** On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $s \in]-\infty, t]$, on a

$$\|U(t,s)b(s)\| \leq \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R})}e^{-\kappa(t-s)} = o_{-\infty}\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

La norme infinie de b est bien finie puisque b est continue et périodique. L'intégrande est donc intégrable en $-\infty$ et est continue, donc X est bien définie. Montrons que X est périodique.

Soit $s \in \mathbb{R}$, on définit, pour $t \in \mathbb{R}$, $Y_s(t) = U(t+T, s+T)$. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_s'(t) = A(t+T)U(t+T, s+T) = A(t)U(t+T, s+T) = A(t)Y_s(t).$$

De plus,

$$Y_s(s) = U(s+T, s+T) = I_d.$$

Par unicité, on obtient $Y_s = U(\cdot, s)$. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t+T) = \int_{-\infty}^{t+T} U(t+T, s)b(s)\mathrm{d}s \underset{u=s-T}{=} \int_{-\infty}^{t} U(t+T, u+T)b(u+T)\mathrm{d}u,$$

en ayant appliqué un changement de variables $\mathcal{C}^1$ bijectif. Par la propriété démontrée précédemment et par T-périodicité de b, on conclut ; $X(t+T) = X(t)$. Enfin, vérifions que c'est bien une solution. Afin de dérivier, on introduit le point 0 grâce à l'identité de la résolvante. Plus précisement,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = U(t,0)\int_{-\infty}^{t} U(0,s)b(s)\mathrm{d}s.$$

Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A(t)U(t,0)\int_{-\infty}^{t} U(0,s)b(s)\mathrm{d}s + U(t,0)U(0,t)b(t) = A(t)X(t) + U(0,0)b(t) = A(t)X(t) + b(t).$$

4. On suppose maintenant que $A(t) = A$ ne dépend pas de t et vérifie toujours (2). Montrer que A est inversible. Montrer que si $b(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} b_\infty$, alors toutes les solutions convergent vers $-A^{-1}b_\infty$.

☆ **Solution.** Soit $x \in \ker(A)$. Alors, $Ax = 0$, donc $0 \le -\kappa \|x\|^2$, donc $x = 0$ et A est inversible.
Remarquons que : $\displaystyle\int_0^t e^{A(t-s)} = e^{At}\int_0^t e^{-As}\mathrm{d}s = e^{At}(-A^{-1})\left[e^{-As}\right]_0^t$. Puisque $e^A \in \mathbb{R}[A]$ et $A^{-1} \in \mathbb{R}[A]$ (théorème de Cayley-Hamilton), les deux quantités commutent et

$$\int_0^t e^{A(t-s)}\mathrm{d}s = -A^{-1}\left(I_d - e^{At}\right).$$

Ainsi,

$$\left\| \int_0^t e^{A(t-s)}\mathrm{d}s + A^{-1} \right\| \le \left\|A^{-1}\right\| \left\|e^{At}\right\|. \tag{4}$$

Remarquons enfin que puisque A ne dépend pas du temps, on obtient par (2) : $\left\|e^{At}\right\| = \|U(t,0)\| \le e^{-\kappa t}$.
Toute solution s'écrit : $X(t) = e^{At}x_0 + \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)A}b(s)\mathrm{d}s$. Le premier terme temps vers 0, par l'inégalité précédente. Pour le second, on remarque :

$$\left\| \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)\mathrm{d}s + A^{-1}b_\infty \right\| \le \underbrace{\left\| \int_0^t e^{(t-s)A}(b(s) - b_\infty)\mathrm{d}s \right\|}_{=:\alpha} + \underbrace{\left\| \int_0^t e^{(t-s)A}b_\infty \mathrm{d}s + A^{-1}b_\infty \right\|}_{=:\beta}.$$

On a, par (4), $\beta = \left\| \left(\displaystyle\int_0^t e^{(t-s)A}\mathrm{d}s + A^{-1} \right) b_\infty \right\| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Enfin, à l'aide du changement de variables $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = t - s$,

$$\alpha = \left\| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,t]}(u)e^{Au}(b(t-u) - b_\infty)\mathrm{d}u \right\|.$$

On applique le théorème de convergence dominée : l'intégrande converge vers 0 par définition de la limite. Enfin, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall u \in [0,t]$,

$$\left|\mathbb{1}_{[0,t]}(u)e^{Au}(b(t-u) - b_\infty)\right| \le \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(u)2e^{-\kappa u}\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \in L^1(\mathbb{R}).$$

La norme infinie de b est bien finie sur $\mathbb{R}^+$ car b est continue et admet une limite finie. Ceci conclut.

Exercice 4 [Théorème de Massara.]

1. Démontrer le Théorème de Kakutani : soit E un espace vectoriel normé et K un compact convexe non vide de E. Toute application affine continue $T : E \to E$ stabilisant K admet un point fixe dans K.
   Hint : on pourra considérer $a \in K$, un point de K et considérer la suite des moyennes de Césaro des itérées de a par T.

   ✰ **Solution.** On définit donc pour $a \in K$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ comme suit : pour tout entier naturel n, $x_n := \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} T^k(a)$. Puisque $a \in K$ et que T stabilise K, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^k(a) \in K$. Par convexité de K, toute combinaison convexe d'éléments de K et dans K et $x_n \in K$. On a alors définit une suite d'éléments d'un ensemble compact. On peut en extraire une sous-suite convergente : il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, une extractrice telle que

   $$x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in K.$$

   Montrons que x est point fixe de T. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\left\|T(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\right\| = \left\| T\left(\frac{1}{\varphi(n)+1}\sum_{k=0}^{\varphi(n)} T^k(a)\right) - \frac{1}{\varphi(n)+1}\sum_{k=0}^{\varphi(n)} T^k(a)\right\|.$$

   Par propriété d'une application affine sur les barycentres, il vient

   $$\left\|T(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\right\| = \left\|\frac{1}{\varphi(n)+1}\sum_{k=0}^{\varphi(n)} T^{k+1}(a) - \frac{1}{\varphi(n)+1}\sum_{k=0}^{\varphi(n)} T^k(a)\right\| = \frac{1}{\varphi(n)+1}\left\|T^{\varphi(n)+1}(a) - a\right\|.$$

   Puisque K est compact, il est borné et on a :

   $$\left\|T(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\right\| \leq \frac{\operatorname{diam}(K)}{\varphi(n)+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Ainsi, le découpage

   $$\|T(x) - x\| \leq \left\|T(x) - T(x_{\varphi(n)})\right\| + \left\|T(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\right\| + \left\|x_{\varphi(n)} - x\right\|$$

   permet de conclure, en exploitant la continuité de T.

2. Le but de cet exercice est de démontrer le Théorème de Massara : soient $T > 0$, $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ deux applications continues et T-périodiques. Si l'équation différentielle linéaire $x' = Ax + b$ admet une solution bornée sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une solution T-périodique.

   (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'équation $\begin{cases} x'(t) &= A(t)x(t) + b(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la notera $\varphi^t(x_0)$.

   ✰ **Solution.** Le théorème de Cauchy–Lipschitz linéaire assure que ce problème de Cauchy admet une unique solution globale, les applications étant continues.

   (b) Justifier que, pour tout temps t, φ^t est une application affine.

   ✰ **Solution.** La formule de Duhamel assure que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$\varphi^t(x_0) = R(t,0)x_0 + \int_0^t R(t,s)b(s)\mathrm{d}s.$$

   Ceci montre que l'application est affine.

   (c) Montrer que $x' = Ax + b$ admet une solution T-périodique *ssi* φ^T admet un point fixe.

   ✰ **Solution.** Supposons que l'équation $x' = Ax + b$ admette une solution T-périodique. Alors, il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$x(t+T, x_0) = x(t, x_0) \quad \textit{i.e.} \quad \varphi^{t+T}(x_0) = \varphi^t(x_0).$$

En prenant $t = 0$, on obtient le résultat. Réciproquement, si φ^T admet un point fixe, il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi^T(x_0) = x_0$. On considère $X(t) := \varphi^{t+T}(x_0)$. Alors,

$$X'(t) = A(t+T)X(t) + b(t+T) = A(t)X(t) + b(t), \qquad X(0) = \varphi^T(x_0) = x_0.$$

Par unicité dans le théorème de Cauchy–Lipschitz linéaire, on en déduit que, pour tour réel t,

$$X(t) = \varphi^t(x_0), \quad i.e. \quad \varphi^{t+T}(x_0) = \varphi^t(x_0).$$

C'est donc une solution périodique à l'équation.

(d) Conclure en utilisant la question 1.

☆ **Solution.** On considère le $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pour lequel la solution $\varphi^{\cdot}(x_0)$ est bornée. On considère

$$K' := \left\{\varphi^{nT}(x_0),\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

C'est par définition un borné et $K := \overline{\mathrm{conv}(K')}$ est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$. En effet, c'est un fermé borné en dimension finie. On rappelle que l'enveloppe convexe d'un borné est borné et que l'adhérence d'un convexe est convexe.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on obtient par propriété de composition du flot

$$\varphi^T\left(\varphi^{nT}(x_0)\right) = \varphi^{(n+1)T}(x_0) \in K'.$$

Puisque φ^T est affine par (b), continue et qu'elle stabilise K' puis K par continuité, le Théorème du point fixe de Kakutani démontré en question 1 assure que φ^T admet un point fixe. Ceci conclut par la question (c).

(e) La réciproque est-elle vraie ?

☆ **Solution.** Oui. En effet, toute fonction périodique et continue est bornée (on se ramène à un compact).