Feuille Supplémentaire 1

Exercice 1 [Existence de solutions à une équation différentielle avec conditions au bord en dimension 1 par la méthode de tir.] On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{sur} \quad I = [a,b] \\ u(a) = u_a, \; u(b) = u_b \end{cases},$$

où $a < b$, $u_a, u_b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $q \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^+)$ et $p \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ vérifiant : il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout $x \in [a,b]$, $p(x) \geq \alpha$. Le but est de montrer l'existence de solutions à cette équation différentielle $u \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.

1. Montrer que les EDO suivantes admettent une unique solution sur $[a,b]$, notée respectivement u_1 et u_2

$$\begin{cases} -(pu_1')' + qu_1 = f & \text{sur} \quad I = [a,b] \\ u_1(a) = u_a, \; u_1'(a) = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -(pu_2')' + qu_2 = 0 & \text{sur} \quad I = [a,b] \\ u_2(a) = 0, \; u_2'(a) = 1 \end{cases}.$$

2. Montrer que

$$p(b)u_2'(b)u_2(b) = \int_a^b \left(pu_2'^2 + qu_2^2\right).$$

3. Conclure.

Remarque. *Via le principe du maximum, on peut montrer l'unicité.*

Exercice 2 [Équation de Sylvester.] On considère une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ et on note $|||\cdot|||$ la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $\delta > 0$. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, \; \Re(z) < -\delta\}$. Le but de cette question est de démontrer le lemme de décroissance exponentielle suivant : il existe $K > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |||e^{tA}||| \leqslant Ke^{-\delta t}.$$

   (a) On note le polynôme caractéristique de A, $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$. Justifier que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, où F_i est l'espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i.

   (b) Soient $i \in \{1, \cdots, r\}$ et $v \in F_i$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\|e^{tA}v\|e^{\delta t} \leqslant e^{(\Re(\lambda_i)+\delta)t} \sum_{j=0}^{m_i-1} \frac{t^j}{j!} |||(A - \lambda_i I_n)^j||| \, \|v\|.$$

   (c) Conclure.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont de parties réelles strictement négatives. Le but de cette exercice est de montrer le résultat suivant : pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation matricielle $AX + XB = C$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$X := -\int_0^{+\infty} e^{tA}Ce^{tB}\mathrm{d}t.$$

   (a) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le problème de Cauchy suivant admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on explicitera.

$$\begin{cases} Y' & = & AY + YB \\ Y(0) & = & C \end{cases}$$

(b) En écrivant la formulation intégrale de l'équation différentielle vérifiée par Y et en utilisant l'estimation donnée par la question 1, montrer l'existence d'une solution à l'équation matricielle $AX + XB = C$.

(c) Montrer l'unicité.

Remarque. *On montre plus généralement que cette équation admet une unique solution ssi A et $-B$ n'ont pas de valeur propre commune.*

Exercice 3 [D'après CC2 2022.] On considère $\|\cdot\|$ la norme euclidienne et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. On notera $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$. Soient $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des applications continues. On suppose qu'il existe $\kappa > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle A(t)x, x)\rangle \leq -\kappa \|x\|^2. \tag{1}$$

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) \\ X(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{2}$$

et on note $(U(t,s))_{t,s\in\mathbb{R}}$ la résolvante associée à (2). Montrer que pour $t \geq s$

$$\|U(t,s)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \leq e^{-\kappa(t-s)}.$$

2. On suppose que $t_0 = 0$ et b bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que toutes les solutions de $X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$. Plus précisément, montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$\|X(t)\| \leq e^{-\kappa t}\|X(0)\| + \frac{\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}}{\kappa}.$$

3. On suppose que A et b sont périodiques de période T. Montrer que $X(t) := \displaystyle\int_{-\infty}^{t} U(t,s)b(s)\mathrm{d}s$ est une solution de $X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$ et que celle-ci est périodique, de période T.

4. On suppose maintenant que $A(t) = A$ ne dépend pas de t, et vérifie toujours (1). Montrer que A est inversible. Montrer que si $b(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} b_\infty$, alors toutes les solutions convergent vers $-A^{-1}b_\infty$.

Exercice 4 [Théorème de Massara.]

1. Démontrer le Théorème de Kakutani : soit E un espace vectoriel normé et K un compact convexe non vide de E. Toute application affine continue $T : E \to E$ stabilisant K admet un point fixe dans K.
Hint : on pourra considérer $a \in K$, un point de K et considérer la suite des moyennes de Césaro des itérées de a par T.

2. Le but de cet exercice est de démontrer le Théorème de Massara : soient $T > 0$, $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ deux applications continues et T-périodiques. Si l'équation différentielle linéaire $x' = Ax + b$ admet une solution bornée sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une solution T-périodique.

   (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'équation $\begin{cases} x'(t) &= A(t)x(t) + b(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la notera $\varphi^t(x_0)$.

   (b) Justifier que, pour tout temps t, φ^t est une application affine.

   (c) Montrer que $x' = Ax + b$ admet une solution T-périodique *ssi* φ^T admet un point fixe.

   (d) Conclure en utilisant la question 1.

   (e) La réciproque est-elle vraie ?