Feuille 2

Exercice 1

1. Il est clair que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & x^2 \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, donc continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, le problème posé admet donc une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I, contenant 2.

   Brouillon : si y ne s'annule pas, on peut résoudre par variables séparées :
$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = 1.$$
   Ainsi,
$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(2)} = t - 2.$$
   Ainsi,
$$y(t) = -\frac{1}{t}.$$
   Cette fonction est définie sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$. Il faut choisir l'intervalle qui contient $t_0 = 2$.
   On considère
$$y(t) = -\frac{1}{t},$$
   définie sur $]0;+\infty[$. Elle est clairement solution du problème de Cauchy. Est-ce la solution maximale ? Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} y(t) = -\infty$, on ne peut la prolonger.

2. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$, donc continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, le problème posé admet donc une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I, contenant 0. Il est clair qu'une telle solution ne peut s'annuler. Puisque $y(0) > 1$, y est positive.

   Brouillon : on peut à nouveau résoudre par variables séparées :
$$y'(t)y(t) = 1.$$
   Ainsi,
$$\frac{1}{2}y^2(t) = t + \frac{1}{2}.$$
   Ainsi,
$$y(t) = \sqrt{2t+1}$$
   Cette fonction est définie sur $[-\frac{1}{2};+\infty[$ et dérivable sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$.
   On considère
$$y(t) = \sqrt{2t+1},$$
   sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$. Elle est clairement solution du problème de Cauchy. Est-ce la solution maximale ? Puisque $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} y(t) = 0$, $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} y'(t) = +\infty$, on ne peut la prolonger.

3. On raisonne toujours de la même façon : la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & 1+x^2 \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, le problème posé admet donc une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I, contenant 1.

Brouillon : on peut à nouveau résoudre par variables séparées :

$$\frac{y'(t)}{1+y^2(t)} = 1.$$

Ainsi,

$$\arctan(y(t)) - \frac{\pi}{4} = t - 1$$

Donc,

$$y(t) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + t - 1\right).$$

Cette expression est valable pourvu que $t \in]-\frac{3\pi}{4}+1; \frac{\pi}{4}+1[$.
On considère

$$y(t) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + t - 1\right),$$

définie sur $]-\frac{3\pi}{4}+1; \frac{\pi}{4}+1[$. Elle est clairement solution du problème de Cauchy. Est-ce la solution maximale ? Oui, car la solution explose aux bornes de son intervalle de définition.

Rappels 1 (*Lemme de Grönwall*)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f, g, u trois fonctions continues, à valeurs positives. Soit $t_0 \in I$. On suppose que, pour tout $t \in I$,

$$u(t) \leqslant f(t) + \left|\int_{t_0}^{t} u(s)g(s)\mathrm{d}s\right|.$$

Alors, pour tout $t \in I$,

$$u(t) \leqslant f(t) + \left|\int_{t_0}^{t} f(s)g(s)\exp\left(\left|\int_{s}^{t} g(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right|\right)\mathrm{d}s\right|.$$

Exercice 2

1. Pour $t \in I$, on définit $u(t) := \|x_1(t) - x_2(t)\|$. Alors, pour tout $t \in I$,

$$u(t) = \left\|x_1^0 - x_2^0 + \int_0^t \left(x_1'(s) - x_2'(s)\right)\mathrm{d}s\right\|.$$

Ainsi

$$u(t) \leqslant \left\|x_1^0 - x_2^0\right\| + \left\|\int_0^t \left(x_1'(s) - f(s, x_1(s))\right)\mathrm{d}s\right\| + \\ \left\|\int_0^t \left(f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\right)\mathrm{d}s\right\| + \left\|\int_0^t \left(f(s, x_2(s)) - x_2'(s)\right)\mathrm{d}s\right\|.$$

Les deux termes extrémaux se majorent par définition d'une $\varepsilon-$solution approchée. Le terme central, lui, se gère par $k-$lipschitzianité de f. Ainsi,

$$u(t) \leqslant \left\|x_1^0 - x_2^0\right\| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,t + \left|\int_0^t ku(s)\mathrm{d}s\right|.$$

Le lemme de Grönwall fournit : pour tout $t \in I$,

$$u(t) \leqslant \left\|x_1^0 - x_2^0\right\| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,t + \left|\int_0^t \left(\left\|x_1^0 - x_2^0\right\| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,s\right) ke^{k(t-s)}\mathrm{d}s\right|,$$

i.e. pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}^+$,

$$u(t) \leqslant \left\|x_1^0 - x_2^0\right\| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, t + ke^{kt} \left\|x_1^0 - x_2^0\right\| \int_0^t e^{-ks} \mathrm{d}s + ke^{kt} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_0^t se^{-ks} \mathrm{d}s.$$

À l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$u(t) \leqslant \left\|x_1^0 - x_2^0\right\| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, t + e^{kt} \left\|x_1^0 - x_2^0\right\| \left(1 - e^{-kt}\right) + e^{kt} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1 - e^{-kt}}{k} - te^{-kt}\right).$$

Finalement,

$$u(t) \leqslant e^{kt} \left\|x_1^0 - x_2^0\right\| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{kt} - 1}{k}.$$

Ceci montre le résultat. On traîte de la même manière le cas où $t \in I \cap \mathbb{R}^-$.

2. Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, on traite le cas de solution exactes. On obtient alors : pour tout $t \in I$,

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leqslant e^{kt} \left\|x_1^0 - x_2^0\right\|.$$

Il s'agit de la dépendance continue en la donnée initiale, dans le cas globalement lipschitzien.

Exercice 3 Puisque f est localement lipschitzienne, et que l'équation est autonome, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $I =]T_*, T^*[$, contenant 0. On suppose $\tau_1 < \tau_2$ (nullement restrictif) et on note $T = \tau_2 - \tau_1$. On veut montrer que y est T-périodique. **Supposons par l'absurde que $\mathbf{T}_* > -\infty$.** On considère la fonction :

$$y : t \in \mathcal{D}_y :=]T_* - T; T^* - T[\mapsto x(t + T),$$

Il est clair que y est solution du problème de Cauchy (on a bien $\tau_1 \in \mathcal{D}_y$) :

$$\begin{cases} z'(t) = f(z(t)) \\ z(\tau_1) = x(\tau_1) \end{cases},$$

puisque $x(\tau_1) = x(\tau_2)$. La fonction x est également solution. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, x et y coïncident sur l'intersection $]T_* - T; T^* - T[\cap I =]T_*; T^* - T[$.

a. *Première façon de conclure : on prolonge la solution maximale.* On considère :

$$X : t \in (T_* - T, T^*) \mapsto \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in (T_*, T^*) \\ x(t+T) & \text{si } t \in (T_* - T, T_*] \end{cases}$$

Le calcul précédent montre que X est dérivable. On vérifie facilement qu'elle est solution du problème de Cauchy. On a donc strictement prolongé la solution maximale : c'est impossible. Ainsi, $T_* = -\infty$.

b. *Utilisation du théorème des bouts :* Puisque que $T_* > -\infty$, le théorème des bouts donne : $\lim_{t \to T_*^+} \|x(t)\| = +\infty$. Alors, puisque, pour tout $t \in]T_*, T_* - T[$, $x(t) = y(t)$, on obtient alors : $\|x(t)\| = \|y(t)\| \underset{t \to T_*^+}{\longrightarrow} \|y(T_*)\|$. Ceci fournit une contradiction.

De la même façon, $T^* = +\infty$. En répétant l'argument précédent avec $I = \mathbb{R}$, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X(t + T) = X(t).$$

La fonction X, unique solution globale du problème de Cauchy est $T-$périodique.

Exercice 4

1. On travaille avec une équation différentielle scalaire d'ordre 2 : on la vectorise afin d'obtenir une équation différentielle vectorielle d'ordre 1. On introduit le vecteur : $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$. Alors, X est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ q(t)x(t) \end{pmatrix} = F(t, X(t)) \\ \\ X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases},$$

où

$$F: \begin{bmatrix} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (t,X) & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(t) & 0 \end{pmatrix} X \end{bmatrix}.$$

2. Il est clair que la fonction F est continue (car q l'est) et est globalement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable : pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|F(t,X) - F(t,Y)\| \leqslant C(\|q\|_\infty) \|X - Y\|.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et l'EDO admet une unique solution globale, notée x.

3. On remarque que l'unique solution globale x vérifie aussi la formulation intégrale du problème de Cauchy (une solution classique est aussi une solution douce (mild)). Soit $n \in \mathbb{N}$, et $t \in \mathbb{R}$,

$$\|X_{n+1}(t) - x(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t F(s, X_n(s))\mathrm{d}s - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \int_0^t F(s, x(s))\mathrm{d}s \right\|.$$

Par k-lipschitziannité de F (observée en question 2), il vient :

$$\|X_{n+1}(t) - x(t)\| \leqslant \left| \int_0^t k \|X_n(s) - x(s)\| \,\mathrm{d}s \right|$$

Ainsi, il vient, pour tout $\alpha > 0$,

$$\|X_{n+1} - x\|_{L^\infty(-\alpha,\alpha)} \leqslant k\alpha \|X_n - x\|_{L^\infty(-\alpha,\alpha)}.$$

Finalement, il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|X_n - x\|_{L^\infty(-\alpha,\alpha)} \leqslant (k\alpha)^n \|X_0 - x\|_{L^\infty(-\alpha,\alpha)}.$$

Ainsi, pour $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{k}$, on obtient le résultat.

Exercice 5 [Théorème d'Osgood] On doit montrer que les deux solutions coïncident. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $t^* \in I$ tel que $x_1(t^*) = x_2(t^*)$ (on suppose $t^* > t_0$, ce n'est aucunement restrictif). On introduit $v(t) := \|x_1(t) - x_2(t)\|$. On souhaite dériver cette fonction : il faut donc travailler sur un intervalle sur lequel la fonction ne s'annule pas. C'est ce qui nous motive à introduire les données suivantes : puisque $v(t^*) \neq 0$, par continuité de la fonction, il existe $t_1, t_2 \in I$ avec $t_1 < t_2$, et pour tout $t \in [t_1, t_2]$, $v(t) \neq 0$. Or $v(t_0) = 0$, on a donc $t_0 < t_1$. Soit

$$\tau := \inf \{t \leqslant t_2, \quad \forall s \in [t; t_2], \quad v(s) \neq 0\}.$$

Cette quantité est bien définie car, l'ensemble est minoré par t_0 et non vide (contient t_1). Alors, on a :

a. $\forall t \in]\tau, t_2]$, $v(t) \neq 0$. Si ce n'est pas le cas, alors, il existe $t \in]\tau, t_2[$ tel que $v(t) = 0$. Puisque $\tau < t$, ce n'est pas un minorant, donc il existe $\tau \leqslant s < t$, tel que, pour tout $u \in [s; t_2]$, $v(u) \neq 0$. Prendre $v = t$ fournit une contradiction.

b. $v(\tau) = 0$. Si ce n'est pas le cas, on construit par continuité de v un voisinage ouvert de τ sur lequel v ne s'annule pas. Dans ce cas, on contredit la minimalité de τ.

Alors, pour tout $t \in]\tau, t_2]$,

$$v'(t) = \frac{(x_1(t) - x_2(t), x_1'(t) - x_2'(t))}{\|x_2(t) - x_2(t)\|}.$$

Par Cauchy-Schwarz,

$$|v'(t)| \leqslant \|f(x_2(t)) - f(x_1(t))\| \leqslant \omega(v(t)).$$

Par suite, pour tout $t \in]\tau, t_2]$ (les hypothèses sur la fonction ω permette de diviser),

$$(F \circ v)'(t) = \frac{v'(t)}{\omega(v(t))} \leqslant 1,$$

avec $F(u) := \displaystyle\int_1^u \frac{\mathrm{d}\sigma}{\omega(\sigma)}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient en intégrant :

$$\int_{v(\tau+\varepsilon)}^{v(t_2)} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\omega(\sigma)} \leqslant \tau - t_2 - \varepsilon.$$

On obtient une contradiction en faisant tendre ε vers 0^+. Ainsi, $v \equiv 0$. Les deux solutions sons égales.

Exercice 6

1. Il suffit de vérifier que ces fonctions sont solutions de l'EDO : pour tout $t \in]\alpha, +\infty[$,

$$y(t) = \frac{(t-\alpha)^2}{4}.$$

Alors, $y'(t) = \dfrac{t-\alpha}{2}$ et $\sqrt{|y(t)|} = \dfrac{|t-\alpha|}{2}$. Il est facile de remarquer que la solution nulle est également solution. Puisque $\alpha > 0$, la condition initiale est également respectée. Il faut finalement s'intéresser à la régularité de y :

$$\lim_{t \to \alpha^+} y(t) = \lim_{t \to \alpha^+} \frac{(t-\alpha)^2}{4} = 0 = y(\alpha^-),$$

et

$$\lim_{t \to \alpha^+} y'(t) = \lim_{t \to \alpha^+} \frac{t-\alpha}{2} = 0 = y'(\alpha^-).$$

2. On sait que $f(x_0) \neq 0$. Par continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \epsilon; x + \epsilon[$, f ne s'annule pas. On peut supposer (aucunement restrictif que $f > 0$). On introduit alors

$$F : x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \mapsto \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, cette fonction est $\mathcal{C}^1$.
Brouillon : si x est une solution locale (existe par le théorème de Cauchy-Arzela-Peano), tant que $x(t) \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(x(t)) = \frac{x'(t)}{f(x(t))} = 1,$$

Donc,

$$F(x(t)) = t + F(x_0) = t.$$

De plus, pour F est continue et strictement monotone (dérivée strictement positive),

$$x(t) = F^{-1}(t).$$

On a donc une formule : la solution est bien unique. Analyse : soit x une solution locale de l'équation différentielle (qui existe, en vertu du théorème de Cauchy-Arzela-Peano). On considère le plus grand intervalle, $]T_*; T^*[$ sur lequel x prend ses valeurs dans $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$. On peut par exemple introduire :

$$T^* = \sup \{t > 0, \quad \forall s \in [0; t], \quad x(s) \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)\}.$$

Sur cette intervalle, ce qui a été fait sur le brouillon est correct, ainsi, on obtient une formule pour x. Il faut que celle-ci convienne sur un intervalle fixe, I, indépendant de la solution, par exemple $I = (F(x_0 - \varepsilon); F(x_0 + \varepsilon))$. C'est clair que $I \subseteq]T_*; T^*[$.
Synthèse : on vérifie aisément que cette fonction est bien définie sur I, et est solution locale.

3.a. La fonction f est bien définie et continue : soient $\varepsilon > 0$, $(u, v) \in c_0(\mathbb{N})^2$ telles que $\|u - v\|_\infty \leq \delta := \varepsilon^2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
Si $\sqrt{|u_n|} + \sqrt{|v_n|} \leq \varepsilon$, alors, $|f(u_n) - f(v_n)| \leq \varepsilon$ par inégalité triangulaire. Sinon,

$$|f(u_n) - f(v_n)| \leq \frac{||u_n| - |v_n||}{\sqrt{|u_n|} + \sqrt{|v_n|}} \leq \frac{\|u - v\|_\infty}{\sqrt{|u_n|} + \sqrt{|v_n|}} \leq \varepsilon.$$

3.b. Si (I, y) est solution du problème de Cauchy, alors :

$$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n'(t) = \sqrt{|y_n(t)|} + \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc, pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}_+^*$, $y_n(t) > y_n(0) = 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I \cap \mathbb{R}_+^*, \quad y_n'(t) \geqslant \sqrt{|y_n(t)|} = \sqrt{y_n(t)},$$

i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I \cap \mathbb{R}_+^*, \quad y_n(t) \geqslant 4t^2 > 0.$$

Ainsi, $y_n(t) \notin c_0(\mathbb{N})$. Ceci est impossible.

Exercice 7 Toute fonction impaire est nulle en 0. De plus, il existe une unique solution globale au problème de Cauchy considéré, vérifiant $y(0) = 0$. Ceci montre l'unicité. Pour l'existence, on considère y l'unique solution associée à la condition initiale $y(0) = 0$. On note $z : t \in \mathbb{R} \mapsto -y(-t)$. Montrons que z vérifie le même problème de Cauchy. Elle admet la même condition initiale en 0. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$z'(t) = y'(-t) = -a(-t)y(-t) + b(-t) = a(t)y(-t) + b(t) = -a(t)z(t) + b(t).$$

On conclut par l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 8 Soit y une solution non nulle de l'équation différentielle scalaire d'ordre n considéré. Soit t_0 un zéro de y ; montrons qu'il est isolé. Puisque l'équation est à coefficients continus, il existe une unique solution globale (Cauchy-Lipschitz à l'équation vectorisée). La fonction nulle est solution de l'équation, avec condition initiale $y^{(k)}(t_0) = 0$, pour $0 \leqslant k \leqslant n - 1$. Puisque y est non nulle, d'après l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe $1 \leqslant k \leqslant n - 1$ tel que $y^{(k)}(t_0) \neq 0$. Soit p le plus petit des entiers k vérifiant cette propriété. Alors, d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de t_0, on a

$$y(t) \underset{t \to t_0}{\sim} \frac{y^{(p)}(t_0)}{p!}(t - t_0)^p.$$

Ainsi, la fonction ne s'annule pas dans un voisinage épointé de t_0.

Exercice 9 On utilise l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz : on suppose par l'absurde qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) \geqslant g(t)$. Alors, par le théorème de valeurs intermédiaires, il existe $t^* \in \mathbb{R}$, tel que $f(t^*) = g(t^*)$. Alors, f et g sont deux solutions du même problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' & = & F(t, y) \\ y(t^*) & = & f(t^*) \end{cases}.$$

Par unicité (F est $\mathcal{C}^1$, donc continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable), on obtient $f = g$. Ainsi, $f(t_0) = g(t_0)$. C'est impossible. Par suite,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) < g(t).$$