# Feuille 2

Exercice 1 [Problèmes de Cauchy]
Etudier l'existence et l'unicité de solutions maximales et l'expression éventuelle de ces solutions pour les problémes de Cauchy suivants :

1. $y' = y^2$ avec $y(2) = -\dfrac{1}{2}$,
2. $y' = \dfrac{1}{y}$ avec $y(0) = 1$,
3. $y' = 1 + y^2$ avec $y(1) = 1$.

Exercice 2 [Comparaison de quasi-solutions]
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue $k$-lipschitzienne par rapport à $y$. On s'intéresse à l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$, et on considère deux quasi-solutions $x_1$ et $x_2$, i.e. $x_1, x_2 : [0,T] \subseteq I \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^1([0,T])$, telles qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ telles que

$$\forall t \in [0,T], \quad \|x_i'(t) - f(t, x_i(t))\| \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, 2.$$

On pose $x_i^0 = x_i(0)$ pour $i = 1, 2$.

1. Montrer que :
$$\forall t \in [0,T], \quad \|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x_1^0 - x_2^0\| e^{kt} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{e^{kt} - 1}{k}.$$
2. Discuter le résultat dans le cas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$.

Exercice 3 [Périodicité] Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction localement lipschitzienne. Soit $x$ une solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

définie sur un intervalle $I$. Supposons qu'il existe $\tau_1 \neq \tau_2 \in I$ tels que $x(\tau_1) = x(\tau_2)$. Montrer que $I = \mathbb{R}$ et que $x$ est périodique.

Exercice 4 [Approximation de solutions] Soit $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ une fonction bornée. Le but de cet exercice est d'approximer la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} x''(t) - q(t)x(t) = 0, \\ x(0) = 0, \ x'(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

1. Mettre l'équation (1) sous la forme suivante :
$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)), \\ X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2}$$
2. Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz au problème (2).
3. On définit la suite $X_n$ par récurrence
$$\begin{cases} X_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ X_{n+1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \displaystyle\int_0^t F(s, X_n(s))\,\mathrm{d}s. \end{cases}$$
Montrer que pour $\alpha > 0$ suffisamment petit, la suite $(X_n)_n$ converge dans $\mathcal{C}([-\alpha, \alpha]; \mathbb{R}^2)$ vers la solution de (2).

EXERCICE 5 [Le théorème d'unicité de Osgood]
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne et $x_0 \in \Omega$. On suppose que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \Omega \times \Omega, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \omega(\|x_1 - x_2\|),$$

où $\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ vérifie :

$$\forall \sigma > 0, \quad \omega(\sigma) > 0, \quad \text{et} \quad \forall \alpha > 0, \quad \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}\sigma}{\omega(\sigma)} = +\infty.$$

Soient $x_1, x_2 : I \to \Omega$ deux solutions du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Montrer que $x_1 = x_2$.

EXERCICE 6 [Cauchy-Peano]

1. Montrer que les fonctions $t \to \{(t-\alpha)^+\}^2/4$, $\alpha > 0$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

2. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie $f(x_0) \neq 0$ au point $x_0 \in \mathbb{R}$, alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

admet une solution locale unique.

3. On note $c_0(\mathbb{N})$ l'espace de Banach des suites réelles $u = (u_n)_n$ convergeant vers 0 quand $n \to +\infty$, muni de la norme $\|u\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

   (a) Montrer que l'application $f : u \mapsto \left( \sqrt{|u_n|} + \frac{1}{n+1} \right)$ est continue de $c_0(\mathbb{N})$ dans $c_0(\mathbb{N})$.

   (b) Montrer que la solution du problème de Cauchy ci-dessous ne prend pas ses valeurs dans $c_0(\mathbb{N})$ :

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

EXERCICE 7 Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues avec $a$ impaire et $b$ paire. Montrer que l'équation différentielle

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

admet une unique solution impaire.

EXERCICE 8 [Zéros isolés] Soient $a_1, \cdots, a_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que toute solution non-nulle de l'équation $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0$ a ses zéros isolés.

EXERCICE 9 [Inégalités] Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux solutions globales de l'équation dfférentielle $y' = F(t, y)$. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) < g(t_0)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) < g(t)$.