Feuille Supplémentaire 2

Exercice 1 [Système de Lorentz] Soient $(X_0, Y_0, Z_0) \in \mathbb{R}^3$. On considère l'équation différentielle autonome suivante

$$\begin{cases} X' &= r(Y-X) \\ Y' &= -XZ + rX - Y \\ Z' &= XY - Z \\ (X,Y,Z)(0) &= (X_0,Y_0,Z_0) \end{cases},$$

où r est un paramètre strictement positif.

1. Montrer que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale $(]T^-, T^+[, (X,Y,Z))$.

   ✰ **Solution.** On définit

   $$F : \begin{bmatrix} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (X,Y,Z) & \mapsto & (r(Y-X), -XZ + rX - Y, XY - Z) \end{bmatrix}.$$

   Alors, le problème de Cauchy est équivalent à $\begin{cases} (X,Y,Z)'(t) &= F((X,Y,Z)(t)) \\ (X,Y,Z)(0) &= (X_0,Y_0,Z_0) \end{cases}$. Puisque F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ (polynomiale), elle est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^3$. Le théorème de Cauchy–Lipschitz (local) assure l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $]T^-, T^+[$ contenant 0.

2. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Montrer l'existence d'un réel $R_0 \geq 0$ tel que pour tout (X,Y,Z) en dehors de la boule de rayon R_0 centrée en 0, on ait

   $$(r+1)Z < \|(X,Y,Z)\|^2.$$

   ✰ **Solution.** Soient $X, Y \in \mathbb{R}$. On définit $f_{X,Y} : \begin{bmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ Z & \mapsto & \|(X,Y,Z)\|^2 - (r+1)Z \end{bmatrix}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

   $$\forall Z \in \mathbb{R}, \quad f'_{X,Y}(Z) = 2Z - (r+1).$$

   Ainsi, pour tout $Z > \frac{r+1}{2}$, on a $f'_{X,Y}(Z) > 0$ donc $f_{X,Y}$ est strictement croissante sur $[\frac{r+1}{2}, +\infty[$. Par conséquent,

   $$\forall Z > r+1 > \frac{r+1}{2}, \quad f_{X,Y}(Z) > f_{X,Y}(r+1) = X^2 + Y^2 \geq 0.$$

   Ainsi, pour tout $Z > r+1$, on a

   $$(r+1)Z < \|(X,Y,Z)\|^2.$$

   Puisque l'inégalité est évidemment vérifiée pour Z négatif ($r > 0$), on obtient donc l'inégalité pour tout $|Z| > r+1$. Comme $\|(X,Y,Z)\| \geq |Z|$, l'inégalité est vérifiée en dehors de la boule de rayon $R_0 := r+1$.

3. On définit

   $$V : (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{X^2}{r} + Y^2 + (Z-(r+1))^2 \in \mathbb{R}, \quad F : (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} r(Y-X) \\ -XZ + rX - Y \\ XY - Z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   Montrer que pour (X,Y,Z) en dehors de la boule de centre R_0 centrée en 0, on a $\langle \nabla V, F \rangle < 0$.

   ✰ **Solution.** Pour tout $(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3$,

   $$\begin{aligned} \langle \nabla V, F \rangle (X,Y,Z) &= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{2X}{r} \\ 2Y \\ 2(Z-(r+1)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r(Y-X) \\ -XZ + rX - Y \\ XY - Z \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 2X(Y-X) + 2Y(-XZ + rX - Y) + 2(Z-(r+1))(XY-Z) \\ &= 2\left(Z(r+1) - \|(X,Y,Z)\|^2\right). \end{aligned}$$

   Cette quantité est négative pour $(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(0,R_0)}$, par la question précédente.

4. Soit $R \geq \max(R_0, \|(X_0, Y_0, Z_0)\|)$. Montrer que

$$\sup_{0 \leq t < T^+} V(X(t), Y(t), Z(t)) \leq \sup_{\overline{B(0,R)}} V + 1.$$

En déduire que $T^+ = +\infty$.

☆ **Solution.** Par l'absurde, supposons qu'il existe un temps $t_1 \in [0, T^+[$ tel que

$$V(X(t_1), Y(t_1), Z(t_1)) > \sup_{\overline{B(0,R)}} V + 1 =: m.$$

On introduit alors

$$\tau := \inf \left\{ t \in [0, T^+[,\ V(X(t), Y(t), Z(t)) > m \right\}.$$

La quantité τ est bien définie puisque, par hypothèse, il s'agit de l'infimum d'un ensemble non vide (contenant t_1), minoré par 0. De plus, $\tau > 0$. En effet, puisque $R \geq \|(X_0, Y_0, Z_0)\|$, alors

$$V(X(0), Y(0), Z(0)) \leq \sup_{\overline{B(0,R)}} V < m.$$

Par continuité de V et de la solution, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \eta]$, $V(X(t), Y(t), Z(t)) < m$ et $\tau \geq \eta > 0$.

De plus, $V(X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)) = m$. Enfin, pour $\varepsilon > 0$, assez petit, un développement limité à l'ordre 2 donne

$$V(X(\tau - \varepsilon), Y(\tau - \varepsilon), Z(\tau - \varepsilon)) = V(X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)) - \varepsilon \langle \nabla V, F \rangle (X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)) + o_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon).$$

Puisque $V(X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)) = \sup_{\overline{B(0,R)}} V + 1$, nécessairement $\|(X(\tau), Y(\tau), Z(\tau))\| > R \geq R_0$. Par la question précédente, $\langle \nabla V, F \rangle (X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)) < 0$. Alors

$$V(X(\tau - \varepsilon), Y(\tau - \varepsilon), Z(\tau - \varepsilon)) = m \underbrace{-\varepsilon \langle \nabla V, F \rangle (X(\tau), Y(\tau), Z(\tau))}_{>0} + o(\varepsilon) > m$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Ceci contredit la minimalité de l'infimum. Ainsi, l'hypothèse formulée au départ est fausse : pour tout $t \in [0, T^+[$,

$$0 \leq V(X(t), Y(t), Z(t)) \leq m \quad \textit{i.e.} \quad (X(t), Y(t), Z(t)) \in V^{-1}([0, m]) =: K.$$

L'ensemble K est fermé, comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Puisque V est coercive, K est borné. Ainsi, K est fermé et borné en dimension finie, donc compact. Par conséquent, les solutions sont bornées. Par théorème de sortie de tout compact, on obtient $T^+ = +\infty$.

Exercice 2 [Théorème de Hadamard–Levy]

1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN. Une application $f : E \to F$ est dite propre si, pour tout $K \subseteq F$, compact, $f^{-1}(K)$ est un compact de $(E\,\|\cdot\|_E)$. Proposer un exemple d'une fonction développable en série entière qui n'est pas propre.

   ☆ **Solution.** La fonction cos est DSE sur $\mathbb{R}$ mais vérifie $\cos^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est propre *ssi* elle vérifie $\lim_{\|x\| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$.

   ☆ **Solution.** Supposons que f est propre. Si elle ne vérifie pas $\lim_{\|x\| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$, il existe $A > 0$, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_n\| \geqslant n$ et $|f(x_n)| \leqslant A$. Ainsi,

   $$\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq f^{-1}([-A, A]),$$

   Puisque f est propre, $f^{-1}([-A, A])$ est compact donc borné. C'est une contradiction avec $\|x_n\| \geqslant n$. **Réciproquement**, soit $K \subseteq \mathbb{R}$ un compact. Alors, $f^{-1}(K)$ est fermé, par continuité de f. De plus, c'est un borné. En effet, si ce n'est pas le cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in f^{-1}(K)$ tel que $\|x_n\| \geqslant n$. Alors, par hypothèse, $|f(x_n)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. C'est une contradiction puisque $f(x_n) \in K$, borné.

3. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant : soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Alors,

$$\begin{array}{c} f \text{ est un } \mathcal{C}^1 \text{ difféomorphisme} \\ \text{global de } \mathbb{R}^n \end{array} \quad ssi \quad \begin{array}{c} f \text{ est propre et vérifie pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \\ \mathrm{d}f(x) \text{ est inversible.} \end{array}$$

Démontrer le sens direct.

☆ **Solution.** Pour le sens direct, il convient de remarquer que f est nécessairement propre puisque, pour tout compact $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(K)$ est compact comme image directe de K par la fonction continue f^{-1}. De plus, le théorème de différentiation des fonctions composées appliqué à la relation $f^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{R}^n}$ donne

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{d}f^{-1}(f(x)) \circ \mathrm{d}f(x) = Id_{\mathbb{R}^n}.$$

Ainsi, $\mathrm{d}f(x) \in GL(\mathbb{R}^n)$.

4. Par le théorème d'inversion locale, f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme local. Il suffit alors de montrer que f est bijective pour conclure. On fixe $y \in \mathbb{R}^n$ et on veut montrer que $\#f^{-1}(\{y\}) = 1$. Quitte à poser $g := f - y$, qui vérifie les mêmes hypothèses que f, on se ramène à étudier le nombre d'antécédents de 0 par f. On considère

$$F : \left[\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & -df(x)^{-1}(f(x)) \end{array} \right].$$

Montrer que l'équation différentielle $\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & F(y) \\ y(0) & = & q \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$ admet une unique solution maximale $y(\cdot, q)$ définie sur un intervalle ouvert dont on note $[0, T^*[$ la restriction aux temps positifs.

☆ **Solution.** Puisque $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ainsi, F est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$. Par le théorème de Cauchy–Lipschitz (local), l'équation différentielle autonome considérée admet une unique solution maximale $y(\cdot, q)$.

5. En considérant $g : t \in [0, T^*[\mapsto f \circ y(t, q) \in \mathbb{R}^n$, montrer que $T^* = +\infty$.

☆ **Solution.** Par définition,

$$\forall t \in [0, T^*[, \qquad g'(t) = \mathrm{d}f(y(t, q))(y'(t, q)) = -f \circ y(t, q) = -g(t).$$

Alors,

$$\forall t \in [0, T^*[, \qquad g(t) = f \circ y(t, q) = f(q)e^{-t}.$$

Ainsi, $\forall t \in [0, T^*[$, on a $y(t, q) \in f^{-1}\left(\overline{B(0, \|f(q)\|)}\right) =: K$, qui est compact puisque f est propre. Par principe de majoration a priori, on en déduit que $T^* = +\infty$.

6. En déduire que $\#f^{-1}(\{0\}) \geq 1$.

☆ **Solution.** On a $(y(k, q))_{k \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$. Par compacité, il existe $y^* \in K$, $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ tel que $t_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $y(t_k, q) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} y^*$. Alors,

$$f(y(t_k, q)) = g(t_k) = f(q)e^{-t_k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par continuité de f et unicité de la limite dans un espace séparé, il vient $f(y^*) = 0$. Ceci conclut.

7. Soit $y^* \in f^{-1}(\{0\})$. Justifier l'existence de U_{y^*} un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant y^* et $\delta_{y^*} > 0$ tels que

$$f|_{U_{y^*}} : U_{y^*} \to B(0, \delta_{y^*})$$

est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

☆ **Solution.** Il suffit d'appliquer le théorème d'inversion locale en y^* ; ceci est possible grâce à l'hypothèse d'inversibilité de la différentielle.

8. Justifier qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $y(t_0, q) \in U_{y^*}$. Montrer que pour tout $t \geqslant t_0$, $y(t, q) \in U_{y^*}$. En déduire que $y(t, q) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} y^*$.

☆ **Solution.** Puisque $y(t_k,q) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} y^*$ (question 6), il existe $t_0>0$ tel que $y(t_0,q)\in U_{y^*}$. De plus,

$$\{t\in[t_0,+\infty[,\quad y(t,q)\in U_{y^*}\} = \left\{t\in[t_0,+\infty[,\quad y(t,q)=\left(f_{|U_{y^*}}\right)^{-1}\left(e^{-t}f(q)\right)\right\}$$

L'ensemble de gauche est ouvert, celui de droite est fermé et il est non vide. Il est donc égal à $[t_0,+\infty[$ par connexité. Par unicité du zéro de f sur U_{y^*} (difféomorphisme), on conclut.

9. Pour $y^*\in f^{-1}(\{0\})$, on pose $\mathcal{W}_{y^*} := \left\{q\in\mathbb{R}^n,\quad y(t,q)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} y^*\right\}$. En remarquant que $\mathbb{R}^n=\bigcup_{y^*\in f^{-1}(\{0\})}\mathcal{W}_{y^*}$, conclure.

   ☆ **Solution.** Montrons que ce sont des ouverts, non vides, disjoints. Le caractère lié à l'unicité de la limite dans un espace séparé. L'ensemble est non vide car $y^*\in\mathcal{W}_{y^*}$ (point d'équilibre). Montrons qu'il est ouvert : on considère $\eta_{y^*}>0$ tel que $B(y^*,2\eta_{y^*})\subseteq U_{y^*}$. Soit $q\in\mathcal{W}_{y^*}$, alors, il existe $T>0$, tel que $y(T,q)\in B(y^*,\eta_{y^*})$. La continuité du flot par rapport à la donnée initiale assure qu'il existe $\delta>0$ tel que

$$\forall q'\in\mathbb{R}^n,\ \|q-q'\|\leqslant\delta\Rightarrow\|y(T,q)-y(T,q')\|\leqslant\eta_{y^*}.$$

   Ainsi, pour tout $q'\in B(q,\delta)$, par inégalité triangulaire,

$$\|y(T,q')-y^*\|\leqslant\|y(T,q)-y^*\|+\|y(T,q)-y(T,q')\|\leqslant 2\eta_{y^*}.$$

   Alors, $y(T,q')\in B(y^*,2\eta_{y^*})\subseteq U_{y^*}$. Par la question 8, $y(t,q')\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} y^*$. Ainsi, $q'\in\mathcal{W}_{y^*}$ donc $B(q,\delta)\subseteq\mathcal{W}_{y^*}$. Par convexité de $\mathbb{R}^n$, $\#f^{-1}(\{0\})\leq 1$. Ainsi, le résultat obtenu à la question 6 conclut.

Exercice 3 [Condition de contrôlabilité de Kalman] On considère $n,m\in\mathbb{N}$, $T_0<T_1$, $A\in\mathcal{C}^0([T_0,T_1],\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B\in\mathcal{C}^0([T_0,T_1],\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$ et on s'intéresse au système suivant

$$x'(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t) \text{ pour } t\in[T_0,T_1], \tag{1}$$

où x désigne l'état du système et u, le contrôle de ce système. Le système (1) est dit **contrôlable** sur $[T_0,T_1]$ si pour tout $x_0,x_1\in\mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u\in\mathcal{C}^0([T_0,T_1],\mathbb{R}^m)$ tel que l'unique solution x associée au problème de Cauchy (1) avec condition initiale $x(T_0)=x_0$ vérifie $x(T_1)=x_1$. En notant $R(\cdot,\cdot)$ la résolvante associée à A, on appelle gramienne associée au système (1) la matrice

$$\mathfrak{S}:=\int_{T_0}^{T_1} R(T_1,s)B(s)^tB(s)^tR(T_1,s)\mathrm{d}s\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que $\mathfrak{S}\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

   ☆ **Solution.** La matrice est clairement symétrique ; en effet

$${}^t\mathfrak{S}={}^t\left(\int_{T_0}^{T_1}R(T_1,s)B(s)^tB(s)^tR(T_1,s)\mathrm{d}s\right)=\int_{T_0}^{T_1}{}^t\left(R(T_1,s)B(s)^tB(s)^tR(T_1,s)\right)\mathrm{d}s=\mathfrak{S}.$$

   De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}(x|\mathfrak{S}x)_{2,\mathbb{R}^n} &= {}^tx\mathfrak{S}x\\ &=\int_{T_0}^{T_1}{}^txR(T_1,s)B(s)^tB(s)^tR(T_1,s)x\mathrm{d}s.\\ &=\int_{T_0}^{T_1}\left({}^tB(s)^tR(T_1,s)x|{}^tB(s)^tR(T_1,s)x\right)_{2,\mathbb{R}^m}\mathrm{d}s\\ &=\int_{T_0}^{T_1}\left\|{}^tB(s)^tR(T_1,s)x\right\|_{2,\mathbb{R}^m}^2\mathrm{d}s\geqslant 0.\end{aligned}$$

2. Le but de cette question est de montrer que le système (1) est contrôlable sur $[T_0,T_1]$ *ssi* la matrice gramienne associée au système est inversible.

(a) Supposons $\mathfrak{G} \in GL_n(\mathbb{R})$. Soient $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\bar{u} : t \in (T_0, T_1) \mapsto {}^tB(t){}^tR(T_1, t)\mathfrak{G}^{-1}\left(x_1 - R(T_1, T_0)x_0\right) \in \mathbb{R}^m$$

est un contrôle adapté.

☆ **Solution.** Cette application est clairement $\mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^m)$. Montrons qu'elle permet d'amener la solution de x_0 à x_1 : par la formule de Duhamel, l'unique solution du problème de Cauchy est donnée par

$$\forall t \in [T_0, T_1], \quad x(T_1) = R(T_1, T_0)x_0 + \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, s)B(s){}^tB(s){}^tR(T_1, s)\mathfrak{G}^{-1}\left(x_1 - R(T_1, T_0)x_0\right) \mathrm{d}s.$$

Ainsi,

$$\forall t \in [T_0, T_1], \quad x(T_1) = R(T_1, T_0)x_0 + \underbrace{\left(\int_{T_0}^{T_1} R(T_1, s)B(s){}^tB(s){}^tR(T_1, s)\mathrm{d}s\right)}_{=\mathfrak{G}}\mathfrak{G}^{-1}\left(x_1 - R(T_1, T_0)x_0\right).$$

On obtient donc $x(T_1) = x_1$, ce qui conclut.

(b) Réciproquement, on suppose que $\mathfrak{G} \notin GL_n(\mathbb{R})$. Soient $y \in \ker(\mathfrak{G}) \setminus \{0\}$, $u \in \mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^m)$ et x l'unique solution du problème de Cauchy associée à ce contrôle, issue de 0. Montrer que $(y, x(T_1))_{2,\mathbb{R}^n} = 0$. Conclure.

☆ **Solution.** Par la question 1, on a

$${}^ty\mathfrak{G}y = \int_{T_0}^{T_1} \left\|{}^tyR(T_1, s)B(s)\right\|_{2,\mathbb{R}^m}^2 \mathrm{d}s = 0.$$

Par suite, $s \in [T_0, T_1] \mapsto {}^tyR(T_1, s)B(s)$ est nulle. Par la formule de Duhamel,

$$x(T_1) = R(T_1, T_0) \times 0 + \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, s)B(s)u(s)\mathrm{d}s.$$

De cette égalité, on obtient

$$(y, x(T_1))_{2,\mathbb{R}^n} = 0,$$

ceci valant quel que soit le contrôle. On ne peut donc pas trouver de contrôle $u \in \mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^m)$ amenant la solution de $x_0 = 0$ à $x_1 = y$ puisque y est non nul.

3. Le système $\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & -\sin(t)x_3 \\ x_2' & = & \cos(t)x_3 \\ x_3' & = & u \end{array}\right.$ est-il contrôlable sur $[0, 2\pi]$?

☆ **Solution.** Il se met sous la forme (1) avec $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 0 & \cos(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque la matrice A vérifie pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, $A(t)A(s) = A(s)A(t)$, la résolvante est donnée par

$$R(2\pi, t) = \exp\left(\int_t^{2\pi} A(s)\mathrm{d}s\right) = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - \cos(t) \\ 0 & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque la matrice est nilpotente (d'ordre de nilpotence valant 2), on peut calculer facilement son exponentielle et pour tout réel t,

$$R(2\pi, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 - \cos(t) \\ 0 & 1 & -\sin(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite, la matrice gramienne est donnée par

$$\mathfrak{G} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (1 - \cos(t))^2 & -\sin(t)(1 - \cos(t)) & 1 - \cos(t) \\ -\sin(t)(1 - \cos(t)) & \sin^2(t) & -\sin(t) \\ 1 - \cos(t) & -\sin(t) & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 3\pi & 0 & 2\pi \\ 0 & \pi & 0 \\ 2\pi & 0 & 2\pi \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de déterminant $2\pi^3$, qui est donc inversible. Ceci montre la contrôlabilité du système.

4. Le système $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x \\ y' & = & u \end{array} \right.$ est-il contrôlable sur $[0,T]$, avec $T>0$?

☆ **Solution.** Il se met sous la forme (1) avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le système étant à coefficients constants, la résolvante est donnée par une exponentielle matricielle. On remarque facilement que pour tout réel t,

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la gramienne du système est donnée par

$$\mathfrak{G} = \int_0^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est non inversible, ce qui prouve que le système est non contrôlable. Ce calcul est fidèle à l'intuition. En effet, le contrôle n'affecte que la dynamique en y, la coordonnée en x agit selon une dynamique indépendante de u et ne peut donc pas être contrôlée.

5. Dans la suite de cet exercice, on suppose que A et B sont des matrices à coefficients constants. On définit l'opérateur

$$\mathcal{F}_{T_1} : \left[\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}^0([T_0,T_1],\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\infty) & \to & \mathbb{R}^n \\ u & \mapsto & \displaystyle\int_{T_0}^{T_1} R(T_1,s)B(s)u(s)\mathrm{d}s \end{array} \right].$$

Montrer que le système (1) est contrôlable sur l'intervalle $[T_0,T_1]$ *ssi* l'application $\mathcal{F}_{T_1}$ est surjective

☆ **Solution.** Si le système est contrôlable sur $[T_0,T_1]$, alors, pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe $u \in \mathcal{C}^0([T_0,T_1],\mathbb{R}^m)$ tel que $x(T_1) = x_1 + R(T_1,T_0)x_0$. La formule de Duhamel fournit

$$x(T_1) = R(T_1,T_0)x_0 + \mathcal{F}_{T_1}(u) = x_1 + R(T_1,T_0)x_0 \quad i.e. \quad \mathcal{F}_{T_1}(u) = x_1.$$

Ceci montre la surjectivité de $\mathcal{F}_{T_1}$. La réciproque se traite de la même manière : pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, la surjectivité de $\mathcal{F}_{T_1}$ assure l'existence de $u \in \mathcal{C}^0([T_0,T_1],\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathcal{F}(T_1) = x_1 - R(T_1,T_0)x_0$. Alors, la formule de Duhamel donne, pour ce contrôle

$$x(T_1) = R(T_1,T_0)x_0 + \mathcal{F}_{T_1}(u) = R(T_1,T_0)x_0 + x_1 - R(T_1,T_0)x_0 = x_1.$$

Ceci conclut.

6. On introduit la matrice de Kalman du système (1),

$$K = [B|AB|\cdots|A^{n-1}B] \in \mathcal{M}_{n,n\times m}(\mathbb{R}),$$

matrice dont les m premières colonnes sont celles de B, les m suivantes celles de AB etc. Montrer que $\mathrm{Im}(K) = \mathrm{Im}(\mathcal{F}_{T_1})$

☆ **Solution.** On remarque que $\mathrm{Im}(K) = \mathrm{Vect}(A^iBu, u \in \mathbb{R}^m,\ i \in [\![0,n-1]\!])$.

Pour le sens direct, on considère $y \in \mathrm{Im}(K)^\perp$. Alors, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, ${}^tyA^iB = 0$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on peut écrire A^n comme combinaison linéaire des $(A^i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$. Alors, par récurrence, on montre que $\forall i \in \mathbb{N}$, ${}^tyA^iB = 0$. Par suite, pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout réel t,

$${}^ty \sum_{k=0}^N \frac{t^kA^k}{k!}B = 0.$$

En passant à la limite, on obtient ${}^tye^{At}B = 0$, pour tout réel t. Ainsi, pour tout contrôle $u \in \mathcal{C}^0([T_0,T_1],\mathbb{R}^m)$,

$$(y, \mathcal{F}_{T_1}(u))_{2,\mathbb{R}^n} = {}^ty \int_{T_0}^{T_1} e^{(T_1-s)A}Bu(s)\mathrm{d}s = 0.$$

Par suite, $y \in \mathrm{Im}(\mathcal{F}_{T_1})^\perp$.

Réciproquement, on considère $y \in \mathrm{Im}(\mathcal{F}_{T_1})^\perp$, alors, pour tout $u \in \mathcal{C}^0([T_0,T_1],\mathbb{R}^m)$, on a

$$(y, \mathcal{F}_{T_1}(u))_{2,\mathbb{R}^n} = {}^t y \mathcal{F}_{T_1}(u) = \int_{T_0}^{T_1} {}^t y e^{(T_1-s)A} B u(s) \mathrm{d}s = 0.$$

Ainsi, on obtient avec le contrôle particulier $u : t \in [T_0,T_1] \mapsto {}^t B e^{(T-t)^t A} y \in \mathbb{R}^m$

$$\int_{T_0}^{T_1} \left\| {}^t y e^{(T_1-s)A} B \right\|_{2,\mathbb{R}^m}^2 \mathrm{d}s = 0.$$

Ainsi,

$$g : t \in [T_0,T_1] \mapsto {}^t y e^{(T_1-t)A} B \in \mathbb{R}^m$$

est nulle. Ainsi, $\forall i \in [\![0,n-1]\!]$, $g^{(i)}(T_1) = (-1)^{i\,t} y A^i B = 0$. Par suite,

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!], \forall u \in \mathbb{R}^m, \qquad {}^t y A^i B u = 0;$$

Donc, $y \in \mathrm{Im}(K)^\perp$.

7. Montrer que $\mathrm{Im}(K)^\perp = \ker(\mathfrak{S})$.

   ✰ **Solution.** En introduisant $g : s \in [T_0,T_1] \mapsto {}^t y e^{(T_1-s)A} B$, on a

$$\begin{array}{rcl} y \in \mathrm{Im}(K)^\perp & \Leftrightarrow & \forall i \in [\![0,n-1]\!], \forall u \in \mathbb{R}^m,\ (y, A^i Bu)_{2,\mathbb{R}^n} = {}^t y A^i B u = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall i \in [\![0,n-1]\!],\ {}^t y A^i B = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall i \in \mathbb{N},\ {}^t y A^i B = 0 \text{ (par Cayley-Hamilton)} \\ & \Leftrightarrow & \forall i \in \mathbb{N},\ g^{(i)}(T_1) = 0 \\ & \Leftrightarrow & g \equiv 0 \text{ (car } g \text{ est analytique)} \\ & \Leftrightarrow & \displaystyle\int_{T_0}^{T_1} \|g(t)\|_{2,\mathbb{R}^m}^2 \,\mathrm{d}t = 0 \text{ (par continuité)} \\ & \Leftrightarrow & {}^t y \mathfrak{S} y = 0 \\ & \Leftrightarrow & y \in \ker(\mathfrak{S}). \end{array}$$

   Pour la dernière équivalence, le sens réciproque est clair. Pour le sens direct, si ${}^t y \mathfrak{S} y = 0$, alors, comme $\mathfrak{S}$ est symétrique positive, elle admet une racine carré, *i.e.* il existe $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $S^2 = \mathfrak{S}$. Ainsi,

$$0 = {}^t y \mathfrak{S} y = {}^t y S^2 y = \|Sy\|_{2,\mathbb{R}^n}^2 .$$

   Donc, $y \in \ker(S) = \ker(S^2) = \ker(\mathfrak{S})$.

8. En déduire que le système (1) est contrôlable *ssi* $\mathrm{rg}(K) = n$.

   ✰ **Solution.** Par ce qui a été démontré dans les questions précédentes, le système est contrôlable ssi $\mathfrak{S} \in GL_n(\mathbb{R})$ ssi $\ker(\mathfrak{S}) = 0$ ssi $\mathrm{Im}(K) = \mathbb{R}^n$ ssi $\mathrm{rg}(K) = n$.