Feuille Supplémentaire 2

Exercice 1 [Système de Lorentz] Soient $(X_0, Y_0, Z_0) \in \mathbb{R}^3$. On considère l'équation différentielle autonome suivante

$$\left\{ \begin{array}{ccc} X' & = & r(Y-X) \\ Y' & = & -XZ + rX - Y \\ Z' & = & XY - Z \\ (X,Y,Z)(0) & = & (X_0, Y_0, Z_0) \end{array} \right. ,$$

où r est un paramètre strictement positif.

1. Montrer que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale $(]T^-, T^+[, (X, Y, Z))$.
2. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Montrer l'existence d'un réel $R_0 \geq 0$ tel que pour tout (X, Y, Z) en dehors de la boule de rayon R_0 centrée en 0, on ait
$$(r+1)Z < \|(X,Y,Z)\|^2 .$$
3. On définit
$$V : (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{X^2}{r} + Y^2 + (Z-(r+1))^2 \in \mathbb{R}, \quad F : (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} r(Y-X) \\ -XZ + rX - Y \\ XY - Z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$
Montrer que pour (X, Y, Z) en dehors de la boule de centre R_0 centrée en 0, on a $\langle \nabla V, F \rangle < 0$.
4. Soit $R \geq \max(R_0, \|(X_0, Y_0, Z_0)\|)$. Montrer que
$$\sup_{0 \leq t < T^+} V(X(t), Y(t), Z(t)) \leq \sup_{\overline{B(0,R)}} V + 1.$$
En déduire que $T^+ = +\infty$.

Exercice 2 [Théorème de Hadamard–Levy]

1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN. Une application $f : E \to F$ est dite propre si, pour tout $K \subseteq F$, compact, $f^{-1}(K)$ est un compact de $(E \|\cdot\|_E)$. Proposer un exemple d'une fonction développable en série entière qui n'est pas propre.
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est propre *ssi* elle vérifie $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$.
3. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant : soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Alors,
$$\begin{array}{c} f \text{ est un } \mathcal{C}^1 \text{ difféomorphisme} \\ \text{global de } \mathbb{R}^n \end{array} \quad \textit{ssi} \quad \begin{array}{c} f \text{ est propre et vérifie pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \\ \mathrm{d}f(x) \text{ est inversible.} \end{array}$$
Démontrer le sens direct.
4. Par le théorème d'inversion locale, f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme local. Il suffit alors de montrer que f est bijective pour conclure. On fixe $y \in \mathbb{R}^n$ et on veut montrer que $\#f^{-1}(\{y\}) = 1$. Quitte à poser $g := f - y$, qui vérifie les mêmes hypothèses que f, on se ramène à étudier le nombre d'antécédents de 0 par f. On considère
$$F : \left[\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & -df(x)^{-1}(f(x)) \end{array} \right].$$
Montrer que l'équation différentielle $\left\{ \begin{array}{ccc} y' & = & F(y) \\ y(0) & = & q \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$ admet une unique solution maximale $y(\cdot, q)$ définie sur un intervalle ouvert dont on note $[0, T^*[$ la restriction aux temps positifs.
5. En considérant $g : t \in [0, T^*[\mapsto f \circ y(t, q) \in \mathbb{R}^n$, montrer que $T^* = +\infty$.

6. En déduire que $\# f^{-1}(\{0\}) \geq 1$.

7. Soit $y^* \in f^{-1}(\{0\})$. Justifier l'existence de U_{y^*} un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant y^* et $\delta_{y^*} > 0$ tels que

$$f|_{U_{y^*}} : U_{y^*} \to B(0, \delta_{y^*})$$

est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

8. Justifier qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $y(t_0, q) \in U_{y^*}$. Montrer que pour tout $t \geqslant t_0$, $y(t,q) \in U_{y^*}$. En déduire que $y(t,q) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} y^*$.

9. Pour $y^* \in f^{-1}(\{0\})$, on pose $\mathcal{W}_{y^*} := \left\{ q \in \mathbb{R}^n, \quad y(t,q) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} y^* \right\}$. En remarquant que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{y^* \in f^{-1}(\{0\})} \mathcal{W}_{y^*}$, conclure.

Exercice 3 [Condition de contrôlabilité de Kalman] On considère $n, m \in \mathbb{N}$, $T_0 < T_1$, $A \in \mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B \in \mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$ et on s'intéresse au système suivant

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \text{ pour } t \in [T_0, T_1], \tag{1}$$

où x désigne l'état du système et u, le contrôle de ce système. Le système (1) est dit **contrôlable** sur $[T_0, T_1]$ si pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u \in \mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^m)$ tel que l'unique solution x associée au problème de Cauchy (1) avec condition initiale $x(T_0) = x_0$ vérifie $x(T_1) = x_1$. En notant $R(\cdot, \cdot)$ la résolvante associée à A, on appelle gramienne associée au système (1) la matrice

$$\mathfrak{S} := \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, s) B(s)^t B(s)^t R(T_1, s) \mathrm{d}s \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que $\mathfrak{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2. Le but de cette question est de montrer que le système (1) est contrôlable sur $[T_0, T_1]$ *ssi* la matrice gramienne associée au système est inversible.

   (a) Supposons $\mathfrak{S} \in GL_n(\mathbb{R})$. Soient $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Montrer que

   $$\bar{u} : t \in (T_0, T_1) \mapsto {}^t B(t)^t R(T_1, t) \mathfrak{S}^{-1} \left(x_1 - R(T_1, T_0) x_0 \right) \in \mathbb{R}^m$$

   est un contrôle adapté.

   (b) Réciproquement, on suppose que $\mathfrak{S} \notin GL_n(\mathbb{R})$. Soient $y \in \ker(\mathfrak{S}) \setminus \{0\}$, $u \in \mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^m)$ et x l'unique solution du problème de Cauchy associée à ce contrôle, issue de 0. Montrer que $(y, x(T_1))_{2, \mathbb{R}^n} = 0$. Conclure.

3. Le système $\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & -\sin(t) x_3 \\ x_2' & = & \cos(t) x_3 \\ x_3' & = & u \end{array} \right.$ est-il contrôlable sur $[0, 2\pi]$?

4. Le système $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & u \end{array} \right.$ est-il contrôlable sur $[0, T]$, avec $T > 0$?

5. Dans la suite de cet exercice, on suppose que A et B sont des matrices à coefficients constants. On définit l'opérateur

   $$\mathcal{F}_{T_1} : \left[\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\infty) & \to & \mathbb{R}^n \\ u & \mapsto & \displaystyle\int_{T_0}^{T_1} R(T_1, s) B(s) u(s) \mathrm{d}s \end{array} \right].$$

   Montrer que le système (1) est contrôlable sur l'intervalle $[T_0, T_1]$ ssi l'application $\mathcal{F}_{T_1}$ est surjective

6. On introduit la matrice de Kalman du système (1),

   $$K = [B | AB | \cdots | A^{n-1} B] \in \mathcal{M}_{n, n \times m}(\mathbb{R}),$$

   matrice dont les m premières colonnes sont celles de B, les m suivantes celles de AB etc. Montrer que $\mathrm{Im}(K) = \mathrm{Im}(\mathcal{F}_{T_1})$

7. Montrer que $\mathrm{Im}(K)^\perp = \ker(\mathfrak{S})$.

8. En déduire que le système (1) est contrôlable *ssi* $\mathrm{rg}(K) = n$.