Feuille 3

Exercice 1 [Globalité via intégrale première.]
Soient x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant,

$$\begin{cases} x'(t) &=& -x(t) - 2y(t)^2, \\ y'(t) &=& x(t)y(t) - y(t), \\ x(0) &=& x_0, \\ y(0) &=& y_0. \end{cases}$$

1. Montrer que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I.

2. Montrer que $I = \mathbb{R}$.
Indication: on pourra utiliser la fonction H définie sur $\mathbb{R}^2$ par $H(x, y) = x^2 + 2y^2$.

Exercice 2 [Globalité pour des fonctions à croissance au plus linéaire.]

1. Soit $]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f :]a, b[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. On suppose qu'il existe deux fonctions C_1 et C_2 positives et continues sur $]a, b[$ telles que

$$\|f(t, y)\| \leqslant C_1(t)\|y\| + C_2(t), \quad (t, y) \in]a, b[\times\mathbb{R}^n.$$

Montrer que toute solution maximale de $y' = f(t, y)$ est globale.

2. *Exemple d'application.*
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bornée. Alors toute solution maximale de $\theta'' = -\sin(\theta) - F(\theta')$ est en faite globale.

3. *Autre exemple d'application : globalité des solutions des systèmes différentiels linéaires à coefficients continus.*
Soient $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que le problème de Cauchy suivant admet une unique solution maximale, qui est définie globalement :

$$\begin{cases} x'(t) &=& A(t)x(t) + B(t), \\ x(t_0) &=& x_0. \end{cases}$$

Exercice 3 [Étude du système de Lotka-Volterra.]
Soient a, b, c, d des réels strictement positifs, x_0, y_0 des réels positifs. On s'intéresse au système différentiel suivant, pour $t \geq 0$,

$$\begin{cases} x'(t) &=& x(t)(a - by(t)), \\ y'(t) &=& y(t)(-c + dx(t)), \\ x(0) &=& x_0, \\ y(0) &=& y_0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution maximale $(x(t), y(t))$ définie sur I intervalle ouvert de $\mathbb{R}^+$.

2. Résoudre explicitement dans les cas où $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$. Représenter ces solutions dans le plan (x, y).

3. Montrer que si $x_0 > 0$, alors $\forall t \in I$, $x(t) > 0$ et que si $y_0 > 0$, alors $\forall t \in I$, $y(t) > 0$.

4. Dorénavant, on se place dans le cas $x_0, y_0 > 0$. On définit H par $H(x, y) = dx - c\ln(x) + by - a\ln(y)$ pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que H est une intégrale première i.e. que $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est constante sur I.

5. (a) Montrer que la fonctionnelle H est coercive au sens où $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to+\infty} H(x, y) = +\infty$.
   (b) Montrer que les lignes de niveaux de la fonctionnelle H sont compactes.
   (c) En déduire que la solution maximale de (1) est globale.

6. Montrer la périodicité des solutions de Lotka-Volterra.

Exercice 4 [Champ rentrant]
Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire associé à la norme euclidienne.

1. Soit $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ telle que,
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle v(x), x\rangle \leq 0.$$
Montrer que pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution globale au problème de Cauchy,
$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & v(x(t)), \quad t > 0, \\ x(0) & = & x_0. \end{array}\right.$$

2. Soit $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ telle que,
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = 1 \Rightarrow \langle v(x), x\rangle < 0.$$
Montrer que pour tout point de départ $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dans la boule unité, la solution maximale du problème de Cauchy,
$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & v(x(t)), \quad t > 0, \\ x(0) & = & x_0, \end{array}\right.$$
reste dans la boule unité. En déduire qu'elle est globale.

Exercice 5 [Équivalent]
On considère l'équation différentielle suivante :
$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(x) & = & y^2(x) - x, \quad x > 0, \\ y(0) & = & 0. \end{array}\right. \tag{E}$$
Soit $(y, [0, b[)$ la solution maximale de (E) ($b \in \bar{\mathbb{R}}$).

1. Donner un équivalent simple de y en 0. En déduire l'existence de $\delta \in]0, b[$ tel que pour tout $x \in]0, \delta[$ on ait $y^2(x) < x$.
2. Montrer que $y^2(x) < x$ pour tout $x \in]0, b[$.
3. En déduire que $b = +\infty$.