Feuille 4

Rappels 1

On considère l'équation différentielle linéaire à coefficients continus suivante :

$$\begin{cases} X'(t) & = & A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) & = & x_0 \end{cases}, \quad t \in I$$

où $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors, ce problème de Cauchy admet une unique solution globale sur I (car la fonction $f : (t, X) \in I \times \mathbb{R}^n \mapsto A(t)X + B(t)$ est une fonction continue, localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, et au plus linéaire (voir TD 3)).

Rappels 2

On considère l'équation différentielle linéaire, scalaire, sous forme résolue, d'ordre n, à coefficients continus :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = a(t), \quad t \in I$$

où $a, a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$), avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. On fixe la condition initiale :

$$\begin{array}{ccc} y(t_0) & = & b_0 \\ \vdots & & \\ y^{(n-1)}(t_0) & = & b_{n-1} \end{array},$$

avec $t_0 \in I$ et $b_0, \cdots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$. Alors, cette équation admet une unique solution globale sur I (il suffit de vectoriser l'équation et d'appliquer la proposition précédente).

Exercice 1

1. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4r + 3 = 0$. Elle admet pour solution -3 et -1. Une base de solutions de l'équation homogène est donnée par $\left(t \mapsto e^{-t}, t \mapsto e^{-3t}\right)$. On applique la méthode de variation de la constante en dimension 2, on cherche une solution particulière y_p sous la forme

$$y_p(t) = \lambda(t)e^{-t} + \mu(t)e^{-3t}, \qquad \lambda, \mu \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$

Alors, on a :

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ -e^{-t} & -3e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix},$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}t \begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, par intégration par parties, il vient :

$$\lambda(t) = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\int e^t \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t-1)e^t,$$

$$\mu(t) = -\frac{1}{6}te^{3t} + \frac{1}{6}\int e^{3t}\mathrm{d}t = \frac{1}{18}e^{3t}\left(1 - 3t\right).$$

Ainsi, une solution particulière est donnée par :

$$y_p(t) = \frac{t}{3} - \frac{4}{9}.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{-3t} + \frac{t}{3} - \frac{4}{9}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$. Elle a pour solution 1 et 2. Une base de solutions de l'équation homogène est donnée par $\left(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{2t}\right)$. On cherche une solution particulière y_p sous la forme

$$y_p(t) = \lambda(t)e^t + \mu(t)e^{2t}.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^{-2t}} \end{pmatrix},$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+e^{-2t}} \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\lambda(t) = -\int \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\mathrm{d}t \underset{x=e^{-t}}{=} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(e^{-t}),$$

$$\mu(t) = \int \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\mathrm{d}t \underset{x=e^{-2t}}{=} -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = -\frac{1}{2}\ln|1+e^{-2t}|.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} + \arctan(e^{-t})e^t - \frac{1}{2}e^{2t}\ln|1+e^{-2t}|, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Rappels 3

On rappelle que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'exponentielle de A est définie comme la série :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Cette série est bien convergente car absolument convergente (clair en utilisant une norme sous-multiplicative) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, complet (car de dimension finie). On rappelle que la résolvante associée à l'équation différentielle $y' = Ay$ est donnée par $R(t,s) = e^{A(t-s)}$, $(t,s) \in \mathbb{R}^2$. ***Ceci est faux dans le cas à coefficients non constants.***

On rappelle que l'exponentielle matricielle

$$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$$

est surjective, (elle n'est pas injective car $\exp(0) = \exp(2i\pi I_n)$). Ce n'est pas le cas sur $\mathbb{R}$, mais :

$$\exp\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right) = \left\{M^2, \quad M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\right\}.$$

Rappels 4 (*Formule de Duhamel (à coefficients constants)*)

L'unique solution globale du système linéaire $\begin{cases} x'(t) &= Ax(t) + B \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$, $t \in I$ est donnée par :

$$\forall t \in I, \quad x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \left(\int_{t_0}^t e^{(t-s)A}\mathrm{d}s\right)B.$$

Rappels 5

On considère le système différentiel linéaire homogène à coefficients constants : $y'(t) = Ay(t)$. Si λ est une valeur propre de A et v un vecteur propre associé, alors $t \mapsto e^{\lambda t}v$ est solution.

Exercice 2

1. On remarque que, le système différentiel est équivalent à
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'(t) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(t),$$
avec la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = (X-1)(X^2+1) = (X-1)(X-i)(X+i)$. De plus, les éléments propres de la matrice sont
$$\ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$
$$\ker(A - iI_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$
$$\ker(A + iI_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$
Remarque. *Puisque A est a coefficients réels, si $v = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un vecteur associé à une valeur propre λ, $\bar{v} := (\bar{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\bar{\lambda}$.*

Une base de solutions complexes est donnée par :
$$\left(t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} e^{it}, t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} e^{-it} \right).$$
Une base de solutions réelles est donnée par :
$$\left(t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right).$$

2. On sait alors qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$X(t) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \beta \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$
En particulier,
$$X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta & = & x_0 \\ \alpha + \gamma & = & y_0 \\ \alpha - \beta & = & z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = & \frac{x_0+z_0}{2} \\ \beta & = & \frac{x_0-z_0}{2} \\ \gamma & = & \frac{2y_0-x_0-z_0}{2} \end{cases}$$

3. On a donc, pour tout réel t,
$$X(t) = e^{tA}X(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + \cos(t) - \sin(t) & 2\sin(t) & e^t - \cos(t) - \sin(t) \\ e^t - \sin(t) - \cos(t) & 2\cos(t) & e^t + \sin(t) - \cos(t) \\ e^t - \cos(t) + \sin(t) & -2\sin(t) & e^t + \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} X(0).$$
Par identification, il vient, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$e^{tA} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + \cos(t) - \sin(t) & 2\sin(t) & e^t - \cos(t) - \sin(t) \\ e^t - \sin(t) - \cos(t) & 2\cos(t) & e^t + \sin(t) - \cos(t) \\ e^t - \cos(t) + \sin(t) & -2\sin(t) & e^t + \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

1. On a directement $\chi_A(X) = (X-1)(X+1)$. Les éléments propres de la matrice sont :
$$\ker(A - I_2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \qquad \ker(A + I_2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$
Une base de solutions est donc donnée par :
$$\left(t \mapsto \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} e^t, t \mapsto \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} e^{-t}\right).$$

2. On a $\chi_A(X) = (X-4)(X^2-6X+10) = (X-4)(X-3-i)(X-3+i)$. Les éléments propres de la matrice sont :
$$\ker(A-4I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \ker(A-(3+i)I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}4\\1-i\\-2\end{pmatrix}, \ker(A-(3-i)I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}4\\1+i\\-2\end{pmatrix}.$$
Une base de solutions sur $\mathbb{C}$ est donnée par :
$$\left(t \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} e^{4t}, t \mapsto \begin{pmatrix}4\\1-i\\-2\end{pmatrix} e^{(3+i)t}, t \mapsto \begin{pmatrix}4\\1+i\\-2\end{pmatrix} e^{(3-i)t}\right).$$
Ainsi, une base de solutions réelles de l'équation est donnée par :
$$\left(t \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} e^{4t}, t \mapsto \begin{pmatrix}4\cos(t)\\\cos(t)+\sin(t)\\-2\cos(t)\end{pmatrix} e^{3t}, t \mapsto \begin{pmatrix}4\sin(t)\\\sin(t)-\cos(t)\\-2\sin(t)\end{pmatrix} e^{3t}\right).$$

3. On a directement $\chi_A(X) = X^2(X+2)$. On voit immédiatement que $\mathrm{rg}(A) = 2$. Par le théorème du rang, la valeur propre 0 est défective, la matrice n'est donc pas diagonalisable. On va alors la mettre sous forme de Jordan : les éléments propres de la matrice A sont donnés par :
$$\ker(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \ker(A+2I_2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}.$$
On cherche donc un vecteur $e_3 \in \ker(A^2) \setminus \ker(A)$ pour compléter la base. On vérifie facilement que
$$\ker(A^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$
Dans la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right)$, l'application canoniquement associée à A s'écrit :
$$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$
Si des matrices sont semblables, il en est de même pour leurs exponentielles. Il suffit donc de calculer l'exponentielle de cette matrice : pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\exp\left(t\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right) = \exp\left(t\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right) = \exp(t(D+N)).$$

Ces deux matrices commutent, on obtient donc :

$$\exp(t(D+N)) = \exp(tD)\exp(tN) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (I_3 + tN) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une base de solution de l'équation est donnée par :

$$\left(t \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}, t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 4 Il convient de remarquer que, puisque la matrice A est à coefficients constants, la solution est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = e^{tA} x_0.$$

Puisque A stabilise E, on a, par récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad A^k x_0 \in E.$$

Un espace-vectoriel étant stable par combinaison linéaire, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{t^k A^k}{k!} x_0 \in E.$$

L'espace vectoriel E étant de dimension finie, il est fermé. Ainsi, sa limite est dans E, *i.e.* $x(t) \in E$. Ceci valant pour tout $t \in \mathbb{R}$, on conclut.

Voici **une autre preuve** qui n'utilise pas le fait que A est à coefficients constants : quitte a changer de base, on peut supposer que la matrice A s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \begin{pmatrix} \tilde{x_0} \\ 0_{n-p} \end{pmatrix}.$$

On considère y l'unique solution du système différentiel :

$$\begin{cases} y'(t) & = & A_1 y(t) \\ y(0) & = & \tilde{x_0} \end{cases}$$

On pose $z(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ 0_{n-p} \end{pmatrix}$ Alors,

$$z'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ 0_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 y(t) \\ 0_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ 0_{n-p} \end{pmatrix} = Az(t), \quad z(0) = x_0.$$

Par unicité, $x = z$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ 0_{n-p} \end{pmatrix} \in E.$$

Exercice 5 On commence donc par résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = f.$$

Puisque les racines de l'équation caractéristique sont $\pm i$, la base de solutions de l'équation différentielle autonome est donnée par :

$$(t \mapsto \cos(t), t \mapsto \sin(t)).$$

On recherche alors une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t)$. Alors, on a :

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\lambda(t) = -\int_0^t \sin(s) f(s) \mathrm{d}s, \qquad \mu(t) = \int_0^t \cos(s) f(s) \mathrm{d}s.$$

Alors,

$$y(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + \int_0^t \sin(t-s) f(s) \mathrm{d}s, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|y(t)| \leqslant |A| + |B| + \left| \int_0^t p(s) y(s) \mathrm{d}s \right|.$$

Par le lemme de Grönwall, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|y(t)| \leqslant (|A| + |B|) \exp\left(\left| \int_0^t p(s) \mathrm{d}s \right| \right) \leqslant (|A| + |B|) \exp(\|p\|_{L^1(\mathbb{R})}).$$

Ceci conclut, la solution est bornée.

Exercice 6

1. On sait que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi'(t) = \phi'(0) + \int_0^t \phi''(s) \mathrm{d}s.$$

Puisque ϕ est solution de l'équation différentielle,

$$\phi'(t) = \phi'(0) - \int_0^t p(s)\phi(s) \mathrm{d}s.$$

Puisque la solution est bornée, $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$, et, comme $p \in L^1(\mathbb{R})$, $p\phi \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, il est clair que ϕ' admet une limite quand $t \to +\infty$, donnée par :

$$\phi'(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \phi'(0) - \int_0^\infty p(s)\phi(s) \mathrm{d}s.$$

On note l cette limite. Si $l > 0$, alors, il existe $A \in \mathbb{R}^+$, tel que, pour tout $t \geqslant A$, $\phi'(t) \geqslant \frac{l}{2}$. Alors, pour tout $t \geqslant A$,

$$\phi(t) = \phi(A) + \int_A^t \phi'(s) \mathrm{d}s \geqslant \frac{l}{2}(t - A) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ceci est impossible puisque ϕ est bornée. De la même façon, $l < 0$ aboutit à une contradiction. Ainsi, on obtient $l = 0$.

2. On suppose donnée une solution bornée de l'équation, g. On considère le wronskien, $W(\phi, g)$. Alors,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W(\phi, g)(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\phi g' - g\phi'\right)(t) = \left(\phi g'' + \phi' g' - g'\phi' - g\phi''\right)(t) = \left(-\phi q g + g q \phi\right)(t) = 0.$$

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$, tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$W(\phi, g)(t) = \phi(t) g'(t) - \phi'(t) g(t) = C.$$

Puisque les deux solutions sont bornées, elles vérifient $\lim_{t \to +\infty} \phi'(t) = \lim_{t \to +\infty} g'(t) = 0$. Ainsi, les solutions étant bornées, le passage à la limite $t \to +\infty$ dans l'égalité suivante donne $C = 0$. Ainsi, le wronskien est nul ; les solutions sont liées. Puisque l'équation est linéaire, d'ordre 2, à coefficients continus, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel d'ordre 2, il existe donc une solution non bornée.

Exercice 7

1. La preuve classique fait intervenir un produit de Cauchy de deux séries. On produit une preuve liée aux EDO : soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t(A+B)}$ et $g : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA}e^{tB}$ deux fonctions. Pour tout réel t,
$$f'(t) = (A+B)f(t), \qquad g'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}.$$
Il est clair que $e^{tA} \in \mathbb{R}[A]$. Alors, puisque B commute avec A, B commute avec e^{tA}, et
$$g'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + Be^{tA}e^{tB} = (A+B)g(t).$$
Puisque $f(0) = g(0) = I_n$, les fonctions f et g sont solutions du même problème de Cauchy. Ainsi, elles coïncident, par unicité. L'égalité $f(1) = g(1)$ fournit le résultat souhaité. Montrons que le résultat est faux en général : soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ces matrices sont nilpotentes, donc $\exp(A) = I_2 + A$ et $\exp(B) = I_2 + B$. De plus, la matrice $A+B$ vérifie $(A+B)^2 = I_2$. Alors,
$$\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} I_2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(A+B) = \begin{pmatrix} \cosh(1) & \sinh(1) \\ \sinh(1) & \cosh(1) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = e^A e^B.$$

2. On considère
$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB},$$
qui est nulle par hypothèse. Pour $t \in \mathbb{R}$,
$$\varphi''(t) = (A+B)^2 e^{t(A+B)} - A^2 e^{tA}e^{tB} - 2Ae^{tA}Be^{tB} - e^{tA}B^2e^{tB}.$$
Ainsi, $\varphi''(0) = (A+B)^2 - A^2 - 2AB - B^2 = 0$ donne $[A,B] = 0$. Pour le cas où $t = 1$, On a besoin des lemmes suivants :

Lemme. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1. Alors,*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ A^n = tr(A)^{n-1}A.$$

Démonstration : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une telle matrice. Alors, par définition, $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(U)$, pour $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (car A n'est pas la matrice nulle). Alors, les colonnes de A étant proportionnelles à U, il existe $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}$ tel que $A = (v_1U, \cdots, v_nU)$. Par suite, $A = U \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = U^tV$, avec $V = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Ainsi,
$$A^2 = U^tVU^tV = U \underbrace{\left({}^tVU\right)}_{\in \mathbb{R}} {}^tV = \left({}^tVU\right) A.$$
Remarquons finalement que :
$${}^tVU = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \mathrm{tr}(A).$$
Ainsi, $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$. La conclusion suit par récurrence immédiate. ■

Corollaire. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1 et de trace non nulle. Alors, pour tout réel t,*
$$e^{tA} = I_2 + \frac{1}{tr(A)}\left(e^{tr(A)t} - 1\right)A.$$

Démonstration : Pour tout réel t,
$$e^{tA} = I_2 + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\mathrm{tr}(A)^{k-1}\right)A = I_2 + \frac{1}{\mathrm{tr}(A)}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\mathrm{tr}A^k\right)A.$$
■

Alors, en considérant $A = \begin{pmatrix} 2i\pi & 0 \\ 0 & -2i\pi \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix}$, il vient : $e^A = I_2$. Puisque B est de rang 1, $e^B = I_2 + \frac{1}{2i\pi}\left(e^{2i\pi} - 1\right) B = I_2$. Avec un calcul similaire, on a $e^{A+B} = I_2 = e^A e^B$. Pourtant, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2i\pi \\ 0 & 4\pi^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -2i\pi \\ 0 & 4\pi^2 \end{pmatrix} = BA$.

3. Soit $\Phi : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tB} A e^{-tB}$. Alors, pour tout t réel,
$$\Phi'(t) = Be^{tB}Ae^{-tB} - e^{tB}ABe^{-tB}.$$
Comme B commute avec $e^{tB} \in \mathbb{R}[B]$,
$$\Phi'(t) = e^{tB}(BA - AB)e^{-tB} = -e^{tB}[A,B]e^{-tB}.$$
Par hypothèse, B commute avec $[A,B]$, donc,
$$\Phi'(t) = -[A,B]e^{tB}e^{-tB} = -[A,B].$$
Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\Phi(t) = \Phi(0) - [A,B]t = A - [A,B]t.$$

Considérons $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)}$. Alors, pour tout t réel,
$$\phi'(t)\phi^{-1}(t) = A + e^{tA}Be^{-tA} - e^{tA}e^{tB}(A+B)e^{-tB}e^{-tA}$$
$$\phi'(t)\phi^{-1}(t) = A + e^{tA}Be^{-tA} - e^{tA}\underbrace{e^{tB}Ae^{-tB}}_{=A-[A,B]t}e^{-tA} - e^{tA}\underbrace{e^{tB}Be^{-tB}}_{=B}e^{-tA}$$
$$\phi'(t)\phi^{-1}(t) = A - \underbrace{e^{tA}Ae^{-tA}}_{=A} + e^{tA}[A,B]te^{-tA}.$$
Par hypothèse, $[A,B]$ commute avec A, donc, $\phi'(t) = [A,B]t\phi(t)$. Ainsi,
$$\phi(t) = e^{\frac{t^2}{2}[A,B]}\phi(0) = e^{\frac{t^2}{2}[A,B]}.$$
En évaluant en $t = 1$, on a : $e^A e^B = e^{A+B}e^{\frac{1}{2}[A,B]}$. En utilisant une dernière fois le fait que A et B commutent avec $[A,B]$, et la question 1, on conclut.

Rappels 6 (*Résolvante*)

On rappelle que la résolvante $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une EDO linéaire, à coefficients continus
$$y'(t) = A(t)y(t)$$
est définie comme suit : pour tout $s \in \mathbb{R}$, $R(\cdot, s)$ est l'unique solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t) \\ M(s) = I_n \end{cases}.$$
Une définition équivalente est : la résolvante $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie comme : pour tout $s \in \mathbb{R}$, $R(\cdot, s)$ est une matrice dont la $j-$ème colonne est l'unique solution de
$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(s) = e_j \end{cases}.$$
Elle vérifie l'égalité suivante : pour tout $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$,
$$R(t_1,t_2)R(t_2,t_3) = R(t_1,t_3).$$
En particulier, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $R(t_1,t_2)$ est inversible et $R(t_1,t_2)^{-1} = R(t_2,t_1)$.

Rappels 7 (***Formule de Duhamel***)

On considère le système différentiel linéaire, à coefficients continus

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t), \quad t \in I.$$

Alors, l'unique solution de ce problème de Cauchy avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ est donnée par :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)B(s)\mathrm{d}s,$$

où R est la résolvante associée à $y' = A(t)y$.

Exercice 8

1. Soit $f(t) := S(t + T, T)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = A(t + T)S(t + T, T) = A(t)f(t), \qquad f(0) = S(T, T) = I_d.$$

Si on considère $g(t) := S(t, 0)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g'(t) = A(t)g(t), \qquad g(0) = S(0, 0) = I_d.$$

Par unicité dans la solution du problème de Cauchy, $f \equiv g$.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ une condition initiale, et x l'unique solution de l'EDO associée à cette condition initiale. Alors, si elle est $T-$périodique, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t + T) = S(t + T, 0)x_0 = x(t) = S(t, 0)x_0.$$

Alors,

$$S(t + T, 0) = s(t, 0) \qquad \text{i.e.} \qquad S(t + T, T)S(T, 0) = s(t, 0) \qquad \text{i.e.} \qquad S(T, 0) = I_d.$$

Réciproquement, si $S(T, 0) = I_d$, alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$S(t + T, 0)x_0 = S(t + T, T)s(T, 0)x_0 = S(t + T, T)x_0 = S(t, 0)x_0.$$

3. On considère le système différentiel

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

L'unique solution de cette équation avec condition initiale $x_0 = e_1$ est donnée par $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$, qui n'est pas $T-$périodique, quelque soit T. L'unique solution de cette équation avec condition initiale $x_0 = e_2$, $x(t) = e_2$, est $T-$périodique, quelque soit T.

4. On sait que $S(T, 0) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, par surjectivité de l'exponentielle matricielle, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $e^{TB} = S(T, 0)$. Par suite, on définit :

$$P : t \in \mathbb{R} \mapsto S(t, 0)e^{-tB}.$$

Par définition, on a l'égalité souhaitée. Montrons que P est $T-$périodique. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P(t + T) = S(t + T, 0)e^{-(t+T)B} = S(t + T, T)\left(S(T, 0)e^{-TB}\right)e^{-tB},$$

$$P(t + T) = S(t + T, T)e^{-tB} = S(t, 0)e^{-tB} = P(t).$$

L'intérêt de ce théorème est d'écrire la solution d'une équation différentielle à coefficients $T-$périodique comme la solution d'une équation différentielle à coefficients constants, à une modulation périodique près.

5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on sait que l'unique solution avec condition initiale x_0 est donnée par :

$$X(t) = S(t,0)x_0 = P(t)e^{tB}x_0.$$

La fonction P est bornée, puisqu'elle est continue et périodique. Ainsi, toute solution de l'équation est bornée, i.e. toute solution de l'EDO à coefficients constants $y'(t) = By(t)$ est bornée. Ainsi, une CNS est : toute les valeurs propres de B sont de partie réelle négative, et les valeurs propres de partie réelle nulle sont non défectives.

6.a. La deuxième ligne de l'équation différentielle s'intègre immédiatement :

$$y(t) = Ae^{\ln|2+\sin(t)-\cos(t)|} = A(2+\sin(t)-\cos(t)), \quad A \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, il faut déterminer l'expression de x. On a

$$x(t) = Be^t + x_p(t), \quad B \in \mathbb{R},$$

où x_p est une solution particulière, que l'on va déterminer par méthode de variation de la constante. On cherche x_p sous la forme $x_p(t) := A(t)e^t$, où $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Alors,

$$A'(t) = A(2+\sin(t)-\cos(t))e^{-t}.$$

Donc,

$$A(t) = -2Ae^{-t} + A\int \Im(e^{(i-1)t})\mathrm{d}t - A\int \Re(e^{(i-1)t})\mathrm{d}t.$$

Après simplifications, on obtient :

$$A(t) = A(2+\sin(t))e^{-t}.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = Be^t - A(2+\sin(t)).$$

De plus,

$$(x,y)(0) = (x_0,y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} B-2A &= x_0 \\ A &= y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B &= x_0+2y_0 \\ A &= y_0 \end{cases}.$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) &= (x_0+2y_0)e^t - y_0(2+\sin(t)) \\ y(t) &= y_0(2+\sin(t)-\cos(t)) \end{cases}.$$

Pour finir, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^t & 2e^t-(2+\sin(t)) \\ 0 & 2+\sin(t)-\cos(t) \end{pmatrix}}_{=S(t,0)} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Pour $x_0 = e_1$, l'unique solution est donnée par : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.b. Remarquons que l'on travaille avec $T = 2\pi$, pour que les coefficients de l'équation soient T-périodiques. On cherche $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que

$$\exp(2\pi B) = \begin{pmatrix} e^{2\pi} & 2e^{2\pi}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche B sous la forme triangulaire supérieure (car son exponentielle l'est), $B = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$. On a clairement,

$$\exp(2\pi B) = \begin{pmatrix} e^\alpha & * \\ 0 & e^\gamma \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a clairement $\alpha = 2\pi$ et $\gamma = 0$. Alors, $B = \dfrac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} 2\pi & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et (matrice de rang 1)

$$\exp(2\pi B) = \begin{pmatrix} e^{2\pi} & \frac{\beta}{2\pi}(e^{2\pi}-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite, $\beta = 4\pi$. Ainsi,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

convient. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P(t) := S(t,0)e^{-tB} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^t - (2+\sin(t)) \\ 0 & 2+\sin(t)-\cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{-t}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P(t) := \begin{pmatrix} 1 & -\sin(t) \\ 0 & 2+\sin(t)-\cos(t) \end{pmatrix}.$$

P est bien $2\pi-$périodique.

6.c. Les valeurs propres de B sont 1 et 0. Puisque $1 > 0$, on conclut.

Exercice 9

1. Le problème admet une unique solution globale : en effet, en vectorisant l'équation, on obtient un problème de Cauchy (à condition initiale fixée), linéaire, à coefficients continus.
2. On sait que, le wronskien est défini comme :

$$W(x_1, x_2) = x_1x_2' - x_2x_1'.$$

Ce dernier est non nul, quelque soit $t \in I$, car les solutions sont indépendantes. En particulier, l'évaluation en $t = u$ donne :

$$W(x_1, x_2)(u) = x_1(u)x_2'(u) - x_2(u)x_1'(u) = -x_2(u)x_1(u) \neq 0.$$

Nécessairement, on a $x_2(u) \neq 0$. En évaluant en $t = v$, on obtient $x_2(v) \neq 0$.

3. Puisque par hypothèse, x_2 ne s'annule pas sur $]u; v[$ (et que ce n'est pas le cas non plus en u et v pas la question précédente) la fonction $f := \frac{x_1}{x_2}$ est bien définie sur $[u; v]$. Elle est continue sur cet intervalle, et dérivable sur $]u; v[$. Alors, le théorème des accroissements finis assure l'existence de $c \in]u; v[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} = 0.$$

Or,

$$f'(c) = \frac{x_1'(c)x_2(c) - x_1(c)x_2'(c)}{x_2(c)^2} = -\frac{W(x_1, x_2)(c)}{x_2(c)^2}.$$

C'est impossible, car les solutions sont indépendantes. On obtient une contradiction.

4. Ainsi, il existe $t \in]u; v[$ tel que $x_2(t) = 0$. Il faut montrer l'unicité d'un tel point : s'il existe $t' \in]u; v[\setminus\{t\}$ tel que $x_2(t') = 0$, alors, en reproduisant l'argument, on obtient une valeur d'annulation de x_1 entre t et t'. Ceci est impossible car les zéros u et v sont supposés consécutifs.