Feuille 4

Exercice 1 [Résolution d'équations différentielles d'ordre 2 scalaires.]
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 4y' + 3y = t$,
2. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-2t}}$.

Exercice 2 [Résolution d'un système à coefficients constants.]
On considère le système différentiel suivant :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) &=& y(t), \\ y'(t) &=& z(t), \\ z'(t) &=& x(t) - y(t) + z(t). \end{cases}$$

1. Donner un système fondamental de solutions de l'équation (S).
2. Résoudre (S) avec la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.
3. En déduire e^{tA}.

Exercice 3 [Résolution de systèmes à coefficients constants.]
Donner un système fondamental de solutions pour l'équation $y' = Ay$ lorsque A est définie par :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 [Préservation d'un sous-espace.]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de dimension p et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui préserve E. Montrer que si x est une solution de l'équation différentielle $x' = Ax$ telle que $x(0) = x_0 \in E$, alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad x(t) \in E.$$

Exercice 5 [Autour de l'équation $y'' + qy = 0$: existence de solution bornée.]
Soit $p \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $p \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que toute solution maximale de $y''(t) + (1 + p(t))\, y(t) = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}$. (*Indication : Résoudre l'équation $y''(t) + y(t) = f(t)$ où $f(t) = -p(t)y(t)$ grâce à la technique de variation de la constante puis utiliser le lemme de Gronwall.*)

Exercice 6 [Autour de l'équation $y'' + qy = 0$: existence de solution non bornée.]
Soit $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $q \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Soit ϕ une solution bornée de $y''(t) + q(t)y(t) = 0$. Montrer que
$$\lim_{t \to +\infty} \phi'(t) = 0.$$
2. Montrer que l'équation $y''(t) + q(t)y(t) = 0$ admet des solutions non bornées.

Exercice 7 [Autour du produit d'exponentielles.]
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A et B commutent. Montrer que $e^{A+B} = e^A e^B$. Montrer que c'est faux en général si A et B ne commutent pas.

2. *(Réciproque)* Montrer que si $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors A et B commutent. Montrer que l'égalité seulement pour $t = 1$ ne suffit pas à avoir la réciproque.

3. Montrer que si A et B commutent **avec** le commutateur $[A, B] := AB - BA$ alors $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$.
Indication : On pourra considérer la fonction $\phi(t) := e^{tA}e^{tB}e^{-t(A+B)}$ et montrer qu'elle vérifie une équation différentielle en calculant la quantité $\phi'(t)\phi(t)^{-1}$.

Exercice 8 [Autour de la notion de résolvante.]
Soient $T > 0$, $d > 0$, $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une application continue T-périodique. On note $S(t, s)$ la résolvante du système

$$Y' = A(t)Y.$$

1. Comparez $S(t + T, T)$ et $S(t, 0)$.

2. Trouvez une condition nécessaire et suffisante sur $S(T, 0)$ pour que toute solution de l'EDO soit T-périodique.

3. Donnez un exemple où il y a des solutions périodiques mais aussi des solutions non-périodiques.

4. Démontrez le *théorème de Floquet* : il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et une application $P : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ T-périodique telle que
$$S(t, 0) = P(t)e^{tB}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de B pour que toute solution soit bornée sur $[0, +\infty[$.

6. On veut appliquer ce qui précède au système suivant :
$$(E) : \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) + y(t), \\ y'(t) & = & \dfrac{\cos t + \sin t}{2 + \sin t - \cos t} y(t). \end{array} \right.$$
   (a) Calculer pour ce système $S(t, 0)$. Donner une trajectoire explicite du système qui est non bornée.
   (b) Calculer la matrice B du théorème de Floquet. En déduire P et vérifier qu'elle est bien $T-$périodique.
   (c) Retrouver le fait que ce système admet des trajectoires non bornées sur $[0, +\infty[$.