Feuille 5

Rappels 1 (***Critère de stabilité/d'instabilité des systèmes linéaires à coefficients constants***)

On considère un système différentiel linéaire, à coefficients constants, de la forme :

$$y'(t) = Ay(t),$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, l'ensemble des points d'équilibre de A, $\ker(A)$, ont la même nature. On se contente donc d'étudier la nature de 0. De plus, on a les conditions nécessaires et suffisantes suivantes :

1. *Le point 0 est asymptotiquement stable ssi $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) < 0\}$.*
2. *Le point 0 est stable ssi $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) \leqslant 0\}$ et toute valeur propre de partie réelle nulle est non défective.*

Exercice 1

1. Un simple calcul fournit $\chi_A(X) = (X+3)(X+2)(X+1)$. Ainsi, il est clair que $\sigma(A) = \{-3, -2, -1\}$ et les points d'équilibre sont asymptotiquement stables (et donc stables).
2. On a $\chi_A(X) = X^2(X+2)$. Puisqu'on voit que $\text{rang}(A) = 2$, le théorème du rang fournit $\dim(\ker(A)) = 1$. Alors, la valeur propre 0 est défective. Les points d'équilibre de ce système différentiel sont donc instables.
3. On a $\chi_A(X) = (X+1)(X^2+1) = (X+1)(X-i)(X+i)$. Puisque la matrice admet trois valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres associés sont de dimension 1. En particulier les valeurs propres $\pm i$ sont non défectives. Les points d'équilibre de ce système différentiel sont donc stables, non asymptotiquement stables.
4. On a $\chi_A(X) = (X-1)(X^2+3X-1)$ Puisque la matrice admet 1 pour valeur propre, les points d'équilibre de ce système différentiel sont donc instables.

Rappels 2 (***Critère de stabilité/d'instabilité en première approche***)

On considère $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, un champ de vecteurs, et $x_0 \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $v(x_0) = 0$. On note $A = \text{Jac}(v)(x_0)$. Alors,

1. *Si $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) < 0\}$, x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.*
2. *S'il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $\Re(\lambda) > 0$, le point d'équilibre x_0 est instable.*

Remarque. *1. Il convient de remarque que ce sont des conditions suffisantes, non nécessaires.*
2. Si A admet une valeur propre de partie réelle nulle, on ne peut pas conclure.

Exercice 2

1. Les points d'équilibre du système sont les (x, y) vérifiant

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y &= x \\ y(y-2) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0), (2,2)\}.$$

De plus,

$$\text{Jac}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2y-2 \end{pmatrix}|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice étant triangulaire supérieure, on déduit du critère de stabilité en première approche que $0_{\mathbb{R}^2}$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable. Finalement,

$$\text{Jac}(f)(2,2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

le théorème de linéarisation de Lyapounov assure que le point $(2,2)$ est instable.

2. Les points d'équilibre du système sont les (x, y) vérifiant

$$\begin{cases} y - \sin(2x) & = & 0 \\ 1 - e^y & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sin(2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(k\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Jac}(f)\left(k\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -2\cos(2x) & 1 \\ 0 & -e^y \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)=\left(k\frac{\pi}{2},0\right)} = \begin{pmatrix} -2(-1)^k & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Si k est pair,

$$\mathrm{Jac}(f)\left(k\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

b. Si k est impair,

$$\mathrm{Jac}(f)\left(k\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le point d'équilibre est instable.

Exercice 3

1. On vectorise l'équation, on considère $X := \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$. Alors, le problème de Cauchy est équivalent à :

$$X' = f(X),$$

où f est la fonction définie par

$$f : \begin{bmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (y, -ky - g(x)) \end{bmatrix}.$$

On sait que la fonction g est $\mathcal{C}^1$. Ainsi, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ et le problème de Cauchy admet une unique solution maximale. Montrons que celle-ci est globale ; on remarque que f est à croissance au plus linéaire. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|f(x, y)\| \leqslant (k+1)|y| + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant (k+1)\,\|(x, y)\|_1 + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

On conclut grâce à la continuité et la positivité des applications constantes $C_1(t) := k + 1$ et $C_2(t) := \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

2. Il est clair que $(0, 0)$ est un point d'équilibre car $g(0) = 0$. On a alors :

$$\mathrm{Jac}(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(x) & -k \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & -k \end{pmatrix} =: A.$$

Si $g'(0) > 0$, alors :

a. Si la matrice admet deux valeurs propres réelles, λ_1 et λ_2, alors, $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = -k < 0$, et $\det(A) = g'(0) = \lambda_1\lambda_2 > 0$. Les valeurs propres sont non nulles, de même signe (déterminant) négatif (au vu de la trace). Alors, le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

b. Sinon, la matrice admet deux valeurs propres complexes non réelles, λ_1 et $\overline{\lambda_1}$, alors, $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \overline{\lambda_1} = 2\mathrm{Re}(\lambda_1) = -k < 0$, et $\det(A) = g'(0) = \lambda_1\overline{\lambda_1} > 0$. Ainsi, le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Si $g'(0) < 0$, alors, les valeurs propres sont nécessairement réelles, de signe opposé. Ainsi, A admet une valeur propre strictement positive, donc le point est instable.
Enfin, **si** $g'(0) = 0$,

$$\mathrm{Jac}(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(x) & -k \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k \end{pmatrix}.$$

Cette matrice admet pour valeur propre 0 et $-k$. Ces valeurs propres étant au nombre de 2, $0_{\mathbb{R}^2}$ est stable, non asymptotiquement stable. En conclusion,

- ✓ Si $g'(0) > 0$, le point $(0,0)$ est asymptotiquement stable.
- ✓ Si $g'(0) < 0$, le point $(0,0)$ est instable.
- ✓ Si $g'(0) = 0$, le point $(0,0)$ est stable, non asymptotiquement stable.

EXERCICE 4 Il convient de remarquer que, si $u \equiv 0$, on a :

$$\mathrm{Jac}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice admet pour polynôme caractéristique $X^2 - X + 1$, et pour valeurs propres $\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Le point $(0,0)$ est donc instable. Dans la deuxième situation,

$$\mathrm{Jac}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice admet pour polynôme caractéristique $X^2 + X + 1$, et pour valeurs propres $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Le point $(0,0)$ est donc asymptotique stable. Le choix de u a donc permis de rendre le point d'équilibre stable.