Feuille 6

Exercice 1

1. On considère une solution (I, x) (ceci a un sens, car la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique). Alors, pour tout $t \in I$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t)) = \mathrm{d}V(x(t))(x'(t)) = \langle \nabla V(x(t)), x'(t) \rangle = \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle \leqslant 0.$$

2.a. Par continuité de V, l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n, \quad V(x) < \alpha_r\} = V^{-1}(]-\infty, \alpha_r[)$$

est un ouvert. Puisque l'intersection de deux ouverts est un ouvert, ceci conclut. Il contient clairement x_0, par hypothèse, car x_0 est un minimum local strict de V. Soit $x_0 \in U_r$ une condition initiale. On considère (I, x) l'unique solution maximale associée. On suppose que la solution sort de $B(x_0, r)$. Alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t^* \in I \cap \mathbb{R}^+$ que $\|x(t^*) - x_0\| = r$. On a alors :

$$\alpha_r = \min_{\|x - x_0\| = r} V(x) \leqslant V(x(t^*)) \underset{Q.1.}{\leqslant} V(x(0)) = V(x_0) < \alpha_r.$$

Ceci fournit une contradiction. Alors, pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}^+$, $x(t) \in B(x_0, r)$.

2.b Montrons que le point x_0 est un équilibre stable : c'est un point d'équilibre, par hypothèse. Soit $\varepsilon > 0$, on considère $x_0 \in U_r$, avec $r = \min(\varepsilon, r_1)$. Soit (I, x) l'unique solution maximale associée à cette condition initiale. Alors, par la question 2.*a*., pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}^+$, $x(t) \in B(x_0, r)$. Ainsi, la solution est bornée : par le théorème d'explosion en temps fini, elle est définie pour tout temps. Alors, $\mathbb{R}^+ \subseteq I$. De plus,

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+, \quad x(t) \in B(x_0, r) \subseteq B(x_0, \varepsilon).$$

Ceci montre la stabilité de x_0.

3.a. On considère $y \in \omega(x)$. Par décroissance de la solution, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$V(\phi(y, t)) \leqslant V(\phi(y, 0)) = V(y).$$

Montrons l'autre inégalité : par définition du bassin d'attraction $\omega(x)$, il existe une suite de temps $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $t_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et $\phi(x, t_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, il existe une extractrice $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{\psi(n)} \geqslant t_n + t$, et

$$V(\phi(x, t_{\psi(n)})) \underset{Q.1.}{\leqslant} V(\phi(x, t_n + t)) = V(\phi(\phi(x, t_n), t)).$$

En prenant la limite quand $n \to +\infty$, on obtient :

$$V(y) \leqslant V(\phi(y, t)).$$

Ceci montre l'égalité.

3.b. On remarque que, pour tout $y \in \omega(x)$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$V(\phi(y, t)) = V(y).$$

Alors, en différenciant cette égalité,

$$\mathrm{d}V(\phi(y, t)) f(\phi(y, t)) = 0.$$

En prenant $t = 0$ dans cette égalité, il vient :

$$\mathrm{d}V(y) f(y) = \langle \nabla V(y), f(y) \rangle = 0.$$

Ceci montre l'inclusion souhaitée.

3.c On obtient finalement,

$$\omega(x) \subset \{y \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}V(y)(f(y)) = 0\} \subseteq \{x_0\},$$

la dernière inclusion valant par hypothèse. On a de plus l'égalité :

$$\omega(x) = \bigcap_{T \geqslant 0} \overline{\{\phi(x,T), \quad T \geqslant t\}}. \tag{1}$$

En effet, montrons l'égalité par double inclusion. Soit $y \in \omega(x)$. Par définition de $\omega(x)$, il existe une suite $(t_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et $y = \lim\limits_{n\to+\infty} \phi(x,t_n)$. Soit $T \geqslant 0$. Montrons que $y \in \overline{\{\phi(x,t), \quad T \geqslant t\}}$. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $t_n \geqslant T$. Alors, en enlevant les premier termes,

$$y = \lim_{n\to+\infty} \phi(x,t_n) \in \overline{\{\phi(x,t), \quad T \geqslant t\}}.$$

Réciproquement, par définition, pour tout $T > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t(T,\varepsilon) > T$ tel que :

$$\|y - \phi(x,t)\| \leqslant \varepsilon.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en prenant $T = n$, et $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, il existe $t_n \geqslant n$ tel que,

$$\|y - \phi(x,t_n)\| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Alors, $y = \lim\limits_{n\to+\infty} \phi(x,t_n)$, où $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, l'égalité (1) fait intervenir une suite décroissante de fermés, non vide dans un compact. Elle est donc non vide. Ainsi, on a l'égalité $\omega(x) = \{x_0\}$.

On a déjà vu que qu'il s'agissait d'un point d'équilibre stable. Montrons qu'il l'est asymptotiquement : on considère $x_0 \in U_r$ avec $r < r_1$. Alors, on veut montrer que $\phi(x_0,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$. Si ce n'est pas le cas, il existe $\varepsilon > 0$, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $t_n \geqslant n$ tel que

$$\|\phi(x_0,t_n) - x_0\| > \varepsilon.$$

Or, on a vu que la solution reste dans $B(x_0,r)$. Alors, elle est bornée. Par conséquent, la suite $(\phi(x_0,t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Elle admet donc une sous-suite convergente, vers $x_1 \neq x_0$. Alors, $x_1 \in \omega(x) \setminus \{x_0\}$. C'est impossible.

Exercice 2

1. Un calcul direct montre que les points d'équilibre du système sont $(0,0)$ et $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. On applique le théorème de linéarisation de Lyapounov :

$$\mathrm{Jac}(F)(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les valeurs propres de cette matrice sont a et $-c$. Pusique $a > 0$, le théorème de linérisation assure que le point d'équilibre est instable. De plus,

$$\mathrm{Jac}(F)\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractèristique est $X^2 + ac$. Ses racines sont $\pm i\sqrt{ac}$. Les valeurs propres sont de partie réelle nulle : on est dans le cas limite du théorème de linéarisation de Lyapounov. On ne sait pas conclure. On applique en fait le théorème qui a été démontré en exercice 1. Montrons que la fonction H introduite dans l'énoncé est une fonction de Lypaounov pour le système : elle est clairement de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\langle \nabla H(x,y), f(x,y) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} d - \frac{c}{x} \\ b - \frac{a}{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(a-by) \\ y(-c+dx) \end{pmatrix} \right\rangle = \cdots = 0 \leqslant 0.$$

On vérifie de plus que le point $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ est un minimum local strict de H (c'est clairement donné par le tableau de variations du TD3, où on a séparé H comme somme de deux fonctions à variables découplées). Ceci montre que le point d'équilibre est stable. Il ne l'est pas asymptotiquement, car les solutions non triviales sont périodiques, donc elles ne peuvent pas converger vers le point d'équilibre.

Exercice 3 L'unique point d'équilibre de ce système est $(0,0)$. Un simple calcul donne :

$$\mathrm{Jac}(f)(0,0) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$

Cette matrice admet 0 pour unique valeur propre. Encore une fois, il s'agit du cas limite du théorème de linéarisation de Lyapounov. On ne peut pas conclure à l'aide de ce théorème. On applique à nouveau la méthode décrite dans l'exercice 1. On utilise la fonction $V : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, introduite dans l'énoncé. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\langle V(x,y), f(x,y)\rangle = -(x^4+y^4) < 0$$

De plus, puisque pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

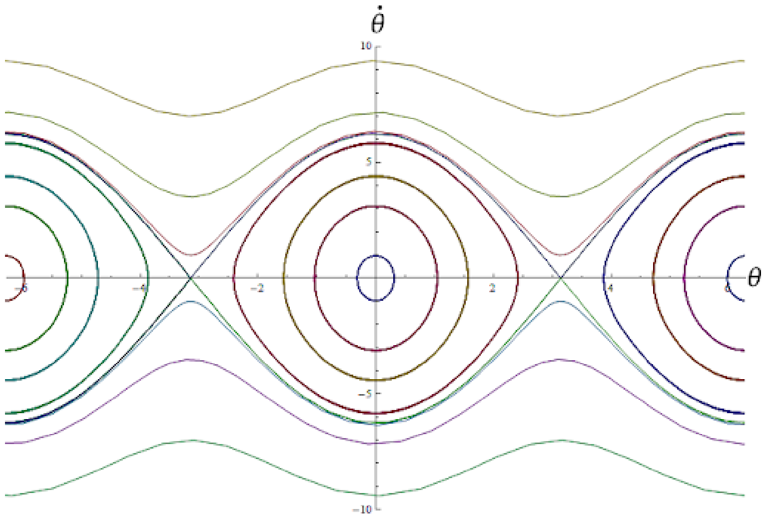
$$V(x,y) = \frac{1}{2}\,\|(x,y)\|_2^2 \geqslant \frac{1}{2}V(0,0) = 0,$$

avec égalité *ssi* $(x,y) = (0,0)$. Ainsi, il s'agit bien d'un minimum local strict (il est en fait global). Le théorème s'applique et le point d'équilibre $(0,0)$ est asymptotiquement stable.

Exercice 4 On remarque que l'on peut vectoriser cette équation pour se ramener à une équation différentielle vectorielle d'ordre 1, à coefficients continus, dont la fonction est globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, à une donnée initiale fixée, l'équation admet une unique solution globale.

1. En multipliant par θ', et en intégrant, on montre que : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$H(\theta, v)(t) = C,$$
avec
$$H : (\theta, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2}v^2 - a\cos(\theta).$$

2. On obtient le portrait de phase suivant :



3. En vectorisant l'équation, on obtient :

$$\begin{pmatrix}\theta \\ v\end{pmatrix}' = f(\theta, v),$$

où

$$f : \begin{bmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y, -a\sin(x)) \end{bmatrix}.$$

Un calcul immédiat montre que les points stationnaires de ce système sont les : $(k\pi, 0)$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Au vu du portrait de phase, il semblerait que les points d'équilibre $(k\pi, 0)$, avec k pair sont stables, et ceux avec k impair instables. Il n'est néanmoins pas évident d'étudier leur nature de manière théorique, on rajoute un coefficient de frottements, α.

4. L'équation considérée s'écrit cette fois :

$$\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix}' = g(\theta, v),$$

où

$$g : \begin{bmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y, -\alpha y - a\sin(x)) \end{bmatrix}.$$

Les points d'équilibre sont toujours les $(k\pi, 0)$, avec $k \in \mathbb{Z}$. De plus, on a :

$$\mathrm{Jac}(g)(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(-1)^k & -\alpha \end{pmatrix}.$$

a. Si k est pair, alors, on s'intéresse à la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -\alpha \end{pmatrix}$. On distingue à nouveau deux cas :

- Si les valeurs propres sont réelles, λ_1 et λ_2, alors $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 = a > 0$, donc les valeurs propres sont de même signe. De plus, $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha < 0$, donc les valeurs propres sont strictement négatives. Par théorème de linéarisation de Lyapounov, le point d'équilibre est donc asymptotiquement stable.
- Sinon, les valeurs propres sont complexes, non réelles, conjuguées, λ_1 et $\overline{\lambda_1}$. Ainsi, l'égalité $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \overline{\lambda_1} = 2\Re(\lambda_1) = -\alpha < 0$ donne le résultat : $\Re(\lambda_1) = \Re(\overline{\lambda_1}) < 0$, et le point est asymptotiquement stable.

b. Si k est impair, alors on s'intéresse cette fois à la matrice $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -\alpha \end{pmatrix}$. Puisque $\det(B) = -a < 0$, les valeurs propres sont nécessairement réelles (sinon, elles seraient complexes, non réelles, conjuguées, donc $\det(B) = \lambda_1\overline{\lambda_1} = |\lambda_1|^2 \geqslant 0$), et non nulles (car c'est le cas pour leur produit). Ainsi, elles sont de sigen opposé : l'une des deux est strictement positive. Par suite, le point est instable.

Exercice 5

1. Le système que l'on considère est équivalant à :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = f(x, y),$$

où

$$f : \begin{bmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y + \varepsilon(x^3 + 2xy^2), -x + \varepsilon y^3) \end{bmatrix}.$$

Puisque $f(0,0) = 0$, il est clair que $(0,0)$ est un point d'équilibre du système. Le système linéarisé autour de cet équilibre s'écrit donc $X' = AX$, où $A := \mathrm{Jac}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Le polynôme caractéristique de A est donné par : $\chi_A(X) = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$. Les valeurs propres sont de partie réelle nulle. Puisqu'elles sont simples, elles sont non défectives, et le critère de Routh assure que le point d'équilibre $(0,0)$ est stable, non asymptotiquement stable.

3. Un simple calcul donne le résultat : pour tout $t \in I = (T_*, T^*)$, intervalle de définition de l'unique solution maximale associée à la donnée initiale $X_0 \in \mathbb{R}^2$, fixée (on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz local, au vu de la régularité de f),

$$\rho'(t, X_0) = 2\varphi_1(t, X_0)\varphi_1'(t, X_0) + 2\varphi_2(t, X_0)\varphi_2'(t, X_0) = 2\varepsilon(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2(t, X_0) = 2\varepsilon\rho^2(t, X_0).$$

La condition initiale est évidemment vérifiée, par définition.

4. On résout cette équation différentielle. Après quelques calculs, on en déduit, que :

$$\rho(t, X_0) = \frac{\|X_0\|^2}{1 - 2\|X_0\|^2 \varepsilon t}$$

cette formule faisant foi pour $t \in I \cap \left]\frac{1}{2\|X_0\|^2\varepsilon}; +\infty\right[$ si ε est strictement négatif, et pour $t \in I \cap \left]-\infty, \frac{1}{2\|X_0\|^2\varepsilon}\right[$ si ε est strictement positif.

5. On distingue deux cas selon le signe de ε :
   a. On suppose que $\varepsilon < 0$. On suppose (par l'absurde) que $T^* < +\infty$. Par le théorèmes des bouts,
   $$\lim_{t \to (T^*)^-} \|(\varphi_1(t, X_0), \varphi_1(t, X_0))\| = +\infty.$$
   C'est impossible car :
   $$\|(\varphi_1(t, X_0), \varphi_1(t, X_0))\|^2 = \rho(t, X_0) \underset{t \to (T^*)^-}{\longrightarrow} \rho(T^*, X_0) = \frac{\|X_0\|^2}{1 - 2\|X_0\|^2 \varepsilon T^*} < +\infty.$$
   Ainsi, $T^* = +\infty$ et la solution est définie pour tout temps positif, quelque soit la condition initiale. De plus, pour tout $\eta > 0$, pour tout $X_0 \in B(0, \eta)$, la solution $\varphi(\cdot, X_0)$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ (vu précédemment), et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,
   $$\|(\varphi_1(t, X_0), \varphi_1(t, X_0))\|^2 = \rho(t, X_0) = \frac{\|X_0\|^2}{1 - 2\|X_0\|^2 \varepsilon t} \leqslant \|X_0\|^2 \leqslant \eta^2.$$
   Ceci montre que le point est stable. Il est asymptotiquement stable car, pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^2$ (on aurait besoin seulement que cette propriété ait lieu localement) :
   $$\|(\varphi_1(t, X_0), \varphi_1(t, X_0))\|^2 = \rho(t, X_0) = \frac{\|X_0\|^2}{1 - 2\|X_0\|^2 \varepsilon t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   b. Dans le cas où $\varepsilon > 0$, la solution n'est pas définie en tout temps, quelque soit la condition initiale, puisque :
   $$\|(\varphi_1(t, X_0), \varphi_1(t, X_0))\|^2 = \rho(t, X_0) \underset{t \to \left(\frac{1}{2\|X_0\|^2\varepsilon}\right)^-}{\longrightarrow} +\infty.$$
   Le point d'équilibre ne peut donc pas être stable ; il est instable.

   Ceci montre que lorsque le système linéarisé admet une valeur propre de partie réelle nulle, le point d'équilibre du système non linéaire peut être stable ou instable. On ne peut rien déduire du théoème de linéarisation de Lyapounov dans ce cas.