Feuille 6

EXERCICE 1 [Fonctions de Lyapunov.]
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{1}$$

admet une fonction de Lyapounov, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ \nabla V(x).f(x) \leqslant 0.$$

1. Soit (x, I) une solution de (1). Montrer que $t \mapsto V(x(t))$ est décroissante sur I.

2. Soit x_0 un point d'équilibre de (1). On suppose que x_0 est un minimum local strict de V, c'est-à-dire qu'il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $r \in]0, r_1[$, $\alpha_r := \min_{\|x-x_0\|=r} V(x) > V(x_0)$.

   (a) Soit $r \in]0, r_1[$. Montrer que $U_r := \{x \in \mathbb{R}^n, V(x) < \alpha_r\} \cap B(x_0, r)$ est un ouvert contenant x_0, et que toutes les trajectoires partant de U_r restent dans $B(x_0, r)$.

   (b) Montrer que x_0 est un point d'équilibre stable.

3. Avec les mêmes hypothèses et notations que dans la question précédente, on fait l'hypothèse supplémentaire que
$$\forall x \neq x_0, \ \ \nabla V(x).f(x) < 0.$$
   On veut montrer que x_0 est asymptotiquement stable. Soit $r \in]0, r_1[$. Grâce à la question 2(a), on sait que, le flot $\phi(x, t)$ de (1) est défini sur $U_r \times \mathbb{R}_+$.

   (a) Pour $x \in U_r$, on note $\omega(x)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $t \mapsto \phi(x, t)$ quand $t \to +\infty$:
$$\omega(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n ; \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, t_n \to +\infty \ \ avec \lim_{n \to +\infty} \phi(x, t_n) = y \right\}.$$
   Montrer que pour tout $y \in \omega(x)$, $t \longmapsto V(\phi(y, t))$ est constante.

   (b) Montrer que $\omega(x) \subset \{y \in \mathbb{R}^n ; \nabla V(y).f(y) = 0\}$.

   (c) Montrer que $\omega(x) = \{x_0\}$ et conclure.

EXERCICE 2 [Lotka-Volterra.]
Soient a, b, c, d des réels strictement positifs, x_0, y_0 des réels positifs. On s'intéresse au système différentiel suivant, pour $t \geq 0$:

$$\begin{cases} X'(t) = F\left(X(t)\right), \\ X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{2}$$

où
$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(-c + dx) \end{pmatrix}, \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Dans tout l'exercice, on pourra utiliser la fonction H définie sur $(\mathbb{R}_+^\star)^2$ par $H(x, y) = dx - c\ln(x) + by - a\ln(y)$.

On rappelle que dans l'exercice 3 de la feuille 3, on a montré grâce à l'intégrale première H que pour toute condition initiale $x_0 \geqslant 0$ et $y_0 \geqslant 0$, il existe une unique solution définie globalement.

1. Quels sont les points d'équilibre de ce système ?

2. Etudier la stabilité de ces points d'équilibre.

Exercice 3 On considère le système différentiel:

$$(E): \begin{cases} x'(t) &= -x^3(t) - y^2(t), \\ y'(t) &= x(t)y(t) - y^3(t). \end{cases}$$

On pourra commencer par se poser rapidement la question de l'existence et l'unicité de solutions globales.

1. Quels sont les points d'équilibre de (E) ?
2. Etudier la stabilité de ces points d'équilibre.
   Remarque: On pourra considérer l'application $V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

Exercice 4 [Pendule avec et sans frottements.]
On considère un pendule de longueur ℓ. On note g l'accélération de la pesanteur et $a = g/\ell$. En l'absence de force de frottement, l'équation du mouvement du pendule est donnée par :

$$\theta'' = -a\sin(\theta).$$

1. On pose $v = \theta'$. Montrer que (θ, v) satisfait une équation du type $H(\theta, v) = C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.
2. Dans le plan de phase (θ, v), représenter une trajectoire dans les cas suivants :
   $$C = -a, \quad -a < C < a, \quad C = a, \quad C > a.$$
3. Ecrire l'équation d'ordre 1 satisfaite par le couple (θ, v). Quels sont les points stationnaires ? Au vu des trajectoires représentées à la question précédente, quels points stationnaires vous semblent stables, asymptotiquement stables, instables ?
4. On considère maintenant le cas où les frottements sont pris en compte : l'équation du pendule devient
   $$\theta'' = -\alpha\theta' - a\sin(\theta),$$
   avec $\alpha > 0$. Ecrire l'équation d'ordre 1 associée et montrer que les points d'équilibre $(k\pi, 0)$ sont asymptotiquement stables si k est pair et instables si k est impair.

Exercice 5 On considère le système d'edo autonome suivant:

$$(S): \begin{cases} x'(t) &= y(t) + \varepsilon\left(x^3(t) + 2x(t)y^2(t)\right), \\ y'(t) &= -x(t) + \varepsilon y^3(t), \end{cases}$$

où ε est un réel donné. On note $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi(t, X_0) = (\varphi_1(t, X_0), \varphi_2(t, X_0))$ la solution de (S) vérifiant $\varphi(0, X_0) = X_0$.

1. Vérifier que $(0,0)$ est un point d'équilibre de (S) et écrire le système linéarisé au voisinage de ce point sous la forme $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice 2×2 que l'on précisera.
2. Déterminer les valeurs propres de A et étudier la stabilité du système linéarisé du point $(0,0)$.
3. Soit $\varepsilon \neq 0$. On note $\rho(t, X_0) = \varphi_1^2(t, X_0) + \varphi_2^2(t, X_0)$. Vérifier que ρ est solution de l'edo $x'(t) = 2\varepsilon x^2(t)$ avec la condition initiale $\rho(0, X_0) = \|X_0\|^2$.
4. Intégrer exlicitement l'edo de la question précédente. En déduire que:
   - Si $\varepsilon > 0$, la solution $\rho(t, X_0)$ est instable.
   - Si $\varepsilon < 0$, la solution $\rho(t, X_0)$ est asymptotiquement stable.
5. En déduire la nature du point d'équilibre $(0,0)$ du système (S) et comparer avec celle du système linéarisé. Que constatez-vous ?