Solution des questions de cours

1. Il suffit que F soit localement lipschitzienne.
2. On dit que F est globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable s'il existe $k > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}^d\right)^2$,
$$\|F(t,x) - F(t,y)\| \leq k \|x - y\|.$$
3. Dans le cas où la fonction est globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution globale, *i.e.* définie sur $\mathbb{R}$.
4. Il suffit que F soit de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.
5. Il s'agit d'une application du lemme de Grönwall. On utilise la formulation intégrale de l'équation différentielle. En notant L la constante de lipschitziannité, on a : pour tout t réel,
$$\|X_1(t) - X_2(t)\| = \left\|X_{0,1} + \int_0^t F(s, X_1(s))\mathrm{d}s - X_{0,2} + \int_0^t F(s, X_2(s))\mathrm{d}s\right\|.$$
Ainsi, pour tout t réel,
$$\|X_1(t) - X_2(t)\| \leq \|X_{0,1} - X_{0,2}\| + \left|\int_0^t L \|X_1(s) - X_2(s)\| \,\mathrm{d}s\right|.$$
En appliquant le lemme de de Grönwall, il vient : pour tout t réel,
$$\|X_1(t) - X_2(t)\| \leq \|X_{0,1} - X_{0,2}\| \, e^{L|t|}.$$

Solution de l'exercice 1

1. Nous proposons deux solutions afin de calculer l'exponentielle matricielle :

   (a) Calcul direct de la somme : on remarque que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. C'est une matrice de rang 1. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $A^{2n} = \mathrm{tr}(A^2)^{n-1}A = A$. De plus, on remarque que $A^3 = -A^2$. Ainsi, on déduit de ces deux calculs que pour tout $n \geq 2$, $A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Ainsi, pour tout t réel,
$$e^{tA} = I_3 + tA + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} A^2 = I_3 + tA + \left(e^{-t} - 1 + t\right) A^2.$$
On obtient alors :
$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} + 3t & e^{-t} - 1 + 3t & e^{-t} - 1 + 2t \\ -3e^{-t} + 3 - 3t & -3e^{-t} - 3t + 4 & -3e^{-t} - 2t + 3 \\ 3e^{-t} - 3 & 3e^{-t} - 3 & 3e^{-t} - 2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Réduction : on calcule le polynôme caractéristique de A. On a :
$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -2 & -1 \\ 0 & X & -1 \\ 3 & 3 & X+3 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} X & -2 & -1 \\ -X & X & -1 \\ 0 & 3 & X+3 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_1 + L_2}{=} X \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & X-2 & -2 \\ 0 & 3 & X+3 \end{vmatrix}.$$
$$\chi_A(X) = X \begin{vmatrix} X-2 & -2 \\ 3 & X+3 \end{vmatrix} = X\left((X-2)(X+3) + 6\right) = X^2(X+1).$$
On remarque immédiatement que $\mathrm{rg}(A) = 2$ (puisque 0 est valeur propre de A, et qu'elle n'est pas de rang 1). Ainsi, la valeur propre 0 est défective, et la matrice n'est pas diagonalisable. On la met sous forme de Jordan. Par calcul direct, on obtient :
$$\ker(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \ker(A^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors, on obtient $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par suite, $e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. Avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, on retrouve le résultat annoncé.

2. Les points stationnaires de l'équation différentielle sont $\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Puisqu'il s'agit d'un système linéaire à coefficients constants, tous les points d'équilibre sont de même nature. On remarque que $\sigma(A) = \{0, -1\}$. Puisque 0 est une valeur propre défective, les critères de Routh assurent que le point est instable (il y a un bloc de Jordan).

4. L'unique solution de l'équation différentielle est donnée par $Y(t) = e^{tA}Y(0) = \begin{pmatrix} e^{-t} + t + 1 \\ -3e^{-t} - t \\ 3e^{-t} - 1 \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 2

1. On remarque que : pour tout $x > 0$,

$$\bar{y}'(x) - \frac{\bar{y}(x)}{x} - \bar{y}^2(x) = -9x^2 \Leftrightarrow -9x^2 = -\alpha^2 x^2.$$

Ceci valant pour tout x réel strictement positif, et comme $\alpha > 0$, on obtient $\alpha = 3$.

2. Il s'agit d'une équation de Ricatti. On pose : $y = u + \bar{y}$, et

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2 \Leftrightarrow u'(x) + \bar{y}'(x) - \frac{1}{x}(u + \bar{y})(x) - (u + \bar{y})^2(x) = -9x^2.$$

Puisque $\bar{y}$ est solution, il vient :

$$u'(x) - \frac{u(x)}{x} - u^2(x) - 2u(x)\bar{y}(x) = 0,$$

i.e.

$$u'(x) - u(x)\left(\frac{1}{x} + 6x\right) - u^2(x) = 0.$$

On doit maintenant résoudre l'équation de Bernoulli associée :

$$\frac{u'(x)}{u^2(x)} - \left(\frac{1}{x} + 6x\right)\frac{1}{u(x)} = 1.$$

Plus précisement, on introduit comme suggéré $z(x) = -\frac{1}{u(x)}$, et on obtient :

$$z'(x) + \left(\frac{1}{x} + 6x\right) z(x) = 1.$$

3. On résout l'équation linéaire d'ordre 1 à coefficients continus sur $]0, +\infty[$. On remarque que les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda \frac{e^{-3x^2}}{x}$. On utilise la méthode de variation de la constante afin de déteminer une solution particulière, on la cherche sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)\frac{e^{-3x^2}}{x}$. On obtient alors

$$\lambda(x) = \int x e^{3x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{6} e^{3x^2}.$$

Ainsi, $y_0(x) = \frac{1}{6x}$. En conclusion,

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda e^{-3x^2} + 1}{6x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. On définit $F : (x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R} \mapsto \dfrac{y}{x} + y^2 - 9x^2$. Elle est $\mathcal{C}^1$, donc continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. On a vu que $\bar{y}$ était solution sur $]0,+\infty[$. Si on considère y une autre solution sur $]0,+\infty[$, alors, pour tout $x > 0$, $y(x) \neq \bar{y}(x)$ (par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipshcitz), on peut donc poser z comme avant, et on obtient $\dfrac{1}{y(x)-\bar{y}(x)} = -\dfrac{\lambda e^{-3x^2}+1}{6x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Il faut que cette quantité ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$, c'est-à-dire $\lambda \geq -1$. Réciproquement, de telles fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et sont solutions. On obtient alors :

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in]0,+\infty[\mapsto 3x - \frac{6x}{\lambda e^{-3x^2}+1}, \lambda \geq -1 \right\}.$$

Solution de l'exercice 3

1. On définit

$$F : \begin{bmatrix} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (X,Y,Z) & \mapsto & (r(Y-X), -XZ+rX-Y, XY-Z) \end{bmatrix}.$$

Alors, le problème de Cauchy est équivalent à $X' = F(X)$, avec $X(0) = (X_0, Y_0, Z_0)$. Puisque F est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est localement lipschitzienne et le théorème de Cauchy-lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $]T^-, T^+[$, contenant 0.

2. On définit pour $X, Y \in \mathbb{R}$, $f_{X,Y} : Z \in \mathbb{R} \mapsto \|(X,Y,Z)\|^2 - (r+1)Z$. On remarque que :

$$\forall Z \in \mathbb{R},\ f'_{X,Y}(Z) = 2Z - (r+1).$$

Ainsi, pour tout $Z > \dfrac{r+1}{2}$, on a : $f'_{X,Y}(Z) > 0$. En particulier, $f_{X,Y}$ est strictement croissante, et :

$$\forall Z > r+1 > \frac{r+1}{2},\ f_{X,Y}(Z) > f_{X,Y}(r+1) = X^2 + Y^2 \geq 0.$$

Ainsi, pour tout $Z > r+1$, on a :

$$(r+1)Z < \|(X,Y,Z)\|^2.$$

Puisque l'inégalité est trivialement vraie pour Z négatif, on obtient donc l'inégalité pour tout $|Z| > r+1$. Ainsi, en dehors de la boule de rayon $R_0 = r+1$, l'inégalité est vraie.

3. Pour tout $(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\langle \nabla V, F \rangle (X,Y,Z) = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{2X}{r} \\ 2Y \\ 2(Z-(r+1)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r(Y-X) \\ -XZ+rX-Y \\ XY-Z \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\langle \nabla V, F \rangle (X,Y,Z) = 2X(Y-X) + 2Y(-XZ+rX-Y) + 2(Z-(r+1))(XY-Z).$$

$$\langle \nabla V, F \rangle (X,Y,Z) = 2\left(Z(r+1) - \|(X,Y,Z)\|^2\right) < 0$$

en dehors d'une boule par la question précédente.

4. Par l'absurde, supposons qu'il existe un temps $t_1 \in [0, T^+[$ tel que

$$V(X(t_1), Y(t_1), Z(t_1)) > m := \sup_{B(0,R)} V + 1.$$

On introduit alors $\tau = \inf \{t \in [0,T^+[,\ V(X(t),Y(t),Z(t)) > m\}$. Il est bien défini, puisque, par hypothèse, il s'agit de l'infimum d'un ensemble non vide (contenant t_1), minoré par 0. De plus, $\tau > 0$. En effet : puisque $R \geq \|(X_0,Y_0,Z_0)\|$, alors :

$$V(X(0),Y(0),Z(0)) \leq \sup_{B(0,R)} V < \sup_{B(0,R)} V + \frac{1}{2}.$$

Alors, par continuité de V et de la solution, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [0,\eta]$, $V(X(t),Y(t),Z(t)) \leq \sup_{B(0,R)} V + \frac{1}{2} < m$, et $\tau \geq \eta > 0$.

De plus, $V(X(\tau),Y(\tau),Z(\tau)) = m$. Enfin, pour $\varepsilon > 0$, assez petit (pour que cela soit bien défini)

$$V(X(\tau-\varepsilon),Y(\tau-\varepsilon),Z(\tau-\varepsilon)) = V(X(\tau),Y(\tau),Z(\tau)) - \varepsilon\langle \nabla V, F\rangle(X(\tau),Y(\tau),Z(\tau)) + o(\varepsilon).$$

Puisque $V(X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)) = \sup_{B(0,R)} V + 1$, nécessairement $\|(X(\tau), Y(\tau), Z(\tau))\| > R \geq R_0$. Par la question précédente, $\langle \nabla V, F\rangle(X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)) < 0$. Alors :

$$V(X(\tau-\varepsilon), Y(\tau-\varepsilon), Z(\tau-\varepsilon)) = m \underbrace{-\varepsilon\langle \nabla V, F\rangle(X(\tau), Y(\tau), Z(\tau))}_{>0} + o(\varepsilon) > m$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Ceci contredit la minimalité de l'infimum.

5. On sait donc que pour tout $t \in [0, T^+[$,

$$0 \leq V(X(t), Y(t), Z(t)) \leq m, \ \textit{i.e.}\ (X(t), Y(t), Z(t)) \in V^{-1}([0,m]) =: K.$$

L'ensemble K est fermé, comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Puisque V est coercive, K est borné : en effet, sinon $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ tel que $\|x_n\| \geq n$. Ainsi, $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. V étant coercive, $V(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est impossible, car pour tout entier naturel n, $V(x_n) \leq m$. Ainsi, K est fermé et borné en dimension finie, donc compact. Les solutions sont donc bornées. Par théorème de sortie de tout compact, on obtient $T^+ = +\infty$.

Solution de l'exercice 4

1. En vectorisant, on se ramène à un système différentiel homogène d'ordre 1 en dimension 2, à coefficients continus, donc les solutions sont globales, et forment un espace vectoriel de dimension 2. Par suite, pour tout x réel,

$$y_1'(x) = y_1'(0) + \int_0^x y_1''(t)\mathrm{d}t.$$

Puisque y_1 est solution de l'équation différentielle, on conclut. Par hypothèse, y_1 est bornée sur $\mathbb{R}^+$, et $e^{-\cdot}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$, c'est le cas pour $t \mapsto e^{-t}y_1(t)$. Ainsi, y_1' admet une limite en $+\infty$.

2. Supposons que cette limite, notée l, est strictement positive. Alors, il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $y_1'(t) \geq l/2$. Ainsi,

$$\forall t \geq A,\ y_1(t) \geq y_1(A) + l/2(t-A) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ceci contredit le caractère borné de y_1. Idem si $l < 0$. Nécessairement, $l = 0$.

3. La formule de Liouville fournit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(y_1, y_2)(t) = \mathrm{tr}(A(t))W(y_1, y_2)(t) = 0.$$

4. On sait que $W(y_1, y_2)$ est constant : il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) = C.$$

Puisque y_1 et y_2 sont des solutions bornées, par la question 2, $\lim_{t\to+\infty} y_1'(t) = \lim_{t\to+\infty} y_2'(t) = 0$. Comme y_1 et y_2 sont bornées, on obtient $C = 0$. Le wronskien est nul.

5. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Puisque deux solutions bornées sur $\mathbb{R}^+$ sont nécessairement liées, il existe une solution non bornée sur $\mathbb{R}^+$.