Équations Différentielles

Contrôle Continu Terminal, Décembre 2022
Durée : 2h

L'usage des documents, calculatrices et téléphones portables n'est pas autorisé.

Questions de cours

Soit l'équation différentielle

$$X'(t) = F(t, X(t)), \quad X(0) = X_0$$

où $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est continue.

1. Donner une condition sur F pour que l'équation ait une unique solution locale.
2. Rappeler la définition d'une application globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.
   On suppose ci-dessous que F est globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.
3. Que peut-on dire pour l'intervalle d'existence des solutions ?
4. Donner une condition pour que, pour tout X_0, la solution X soit une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer qu'il existe une constante L telle que, si X_1, X_2 sont solutions avec données initiales $X_1(0) = X_{0,1}$, $X_2(0) = X_{0,2}$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|X_1(t) - X_2(t)\| \leq e^{L|t|} \|X_{0,1} - X_{0,2}\| .$$

Exercice 1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer e^{tA}, où t est un paramètre réel.
2. Quels sont les points stationnaires de l'EDO $Y' = AY$, avec $Y(t) \in \mathbb{R}^3$.
3. Que dire de leur stabilité ?
4. Résolver le problème de Cauchy $Y' = AY$, $Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2. \tag{1}$$

On se propose d'intégrer cette équation sur le plus grand intervalle possible de $]0, +\infty[$.

1. Déterminer $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $\bar{y}(x) = \alpha x$ soit solution.
2. Soit y une solution sur un intervalle $I \subset]0, +\infty[$ telle qu'il existe $x \in I$ vérifiant $y(x) \neq \bar{y}(x)$. En définissant $z(x)$ par $y(x) = \bar{y}(x) - \dfrac{1}{z(x)}$, montrer qu'on se ramène à l'équation :

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1. \tag{2}$$

3. Résoudre (2) sur $]0,+\infty[$.

4. Donner toutes les solutions de (1) sur $]0,+\infty[$.

Exercice 3

On considère l'EDO autonome suivante, où r est un paramètre strictement positif.

$$\begin{cases} X' &= r(Y-X) \\ Y' &= -XZ+rX-Y \\ Z' &= XY-Z \end{cases} \tag{3}$$

1. Étant donné une condition initale (X_0, Y_0, Z_0) au temps $t_0 = 0$, justifier l'existence et l'unicité de la solution maximale du problème de Cauchy correspondant, définie sur un intervalle $]T^-, T^+[$.

2. Montrer l'existence d'un réel $R_0 \geq 0$ tel que pour tout (X, Y, Z) en dehors de la boule de rayon R_0 centrée en 0, on ait :
$$(r+1)Z < \|(X,Y,Z)\|^2.$$

3. On pose
$$V(X,Y,Z) = \frac{X^2}{r} + Y^2 + (Z-(r+1))^2.$$
$$F(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} r(Y-X) \\ -XZ+rX-Y \\ XY-Z \end{pmatrix}.$$
Montrer que pour (X, Y, Z) en dehors de la boule de centre R_0 centrée en 0, on a :
$$\langle \nabla V, F \rangle < 0.$$

4. Soit $R \geq \max(R_0, \|(X_0, Y_0, Z_0)\|)$. Montrer que si $(X(t), Y(t), Z(t))$ est la solution du problème de Cauchy avec condition initiale (X_0, Y_0, Z_0) au temps $t_0 = 0$, alors :
$$\sup_{0 \leq t < T^+} V(X(t), Y(t), Z(t)) \leq \sup_{B(0,R)} V + 1.$$

5. En déduire que la solution reste bornée en temps positif, puis que $T^+ = +\infty$.

Exercice 4

On étudie l'équation différentielle $y'' + e^{-x}y = 0$. Soit y_1 une solution bornée sur $[0, +\infty[$.

1. Montrer que $y_1'(x) = y_1'(0) - \displaystyle\int_0^x e^{-t} y_1(t) \mathrm{d}t$. En déduire que la dérivée y_1' admet une limite en $+\infty$.

2. Montrer que cette limite est nulle. (On pourra raisonner l'absurde et montrer que, si la limite est non nulle, y_1 n'est pas bornée).

3. Soit y_2 une autre solution, on définit le wronskien :
$$W(y_1, y_2)(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}.$$
Donner sans justification la valeur de $W(y_1, y_2)'(t)$.

4. On suppose que y_2 est aussi bornée sur $[0, +\infty[$, montrer que $W(y_1, y_2)(t)$ est identiquement nul.

5. Montrer qu'il existe nécessairement une solution non bornée sur $[0, +\infty[$.